Conexión entre los triángulos $T(a)$ y los segmentos de Collatz

Construcción, partición y transiciones aritméticas

Miguel Cerdá Bennassar

Noviembre de 2026

Resumen

Se estudia una familia de triángulos aritméticos $T(a)$, con $a \equiv 0$ o $4 \pmod 6$, construida mediante una recurrencia aditiva. Se obtiene la fórmula cerrada de sus elementos y se demuestra que las filas constituyen una partición de los enteros no negativos. Cada fila de índice positivo coincide con el segmento de la iteración simplificada de Collatz que parte de su primer impar y termina en el primer par; el segmento que parte de un impar arbitrario es un sufijo único de una fila. Se describe asimismo la transición aritmética entre filas y se precisa el alcance de esta representación, sin deducir de ella convergencia global ni ausencia de ciclos.

1. Introducción

La iteración simplificada de Collatz sobre los enteros positivos es

$$C(n) = \begin{cases} (3n+1)/2, & n \text{ impar}, \\ n/2, & n \text{ par}. \end{cases}$$

Llamaremos *segmento impar–par* a la sucesión que empieza en un impar positivo y aplica la rama impar de C hasta alcanzar el primer par, incluido.

La familia de triángulos $T(a)$ y su relación con las rachas de la iteración se estudian con más extensión en [1], junto con una segunda familia de triángulos para las cadenas de divisiones de pares. Aquí la familia $T(a)$ se define de manera autónoma, mediante una regla de construcción, y se muestra que sus filas describen exactamente estos segmentos. La localización de un entero y el enlace entre filas se expresarán por factorizaciones de $n+1$. La representación no presupone ni demuestra la conjetura de Collatz.

2. La familia triangular y su estructura

Sea

$$\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : a \equiv 0 \text{ o } 4 \pmod 6\}.$$

Para $a \in \mathcal{A}$ definimos $T(a)$ mediante los elementos $x_{a,r,j}$, con $r \geq 0$ y $0 \leq j \leq r$, determinados por

$$x_{a,0,0} = a, \qquad x_{a,r+1,0} = 2x_{a,r,0} + 1, \tag{1}$$

$$x_{a,r,j} = x_{a,r,j-1} + x_{a,r-1,j-1} + 1 \qquad (1 \leq j \leq r). \tag{2}$$

La fila $F_{a,r} = (x_{a,r,0}, \ldots, x_{a,r,r})$ tiene $r+1$ posiciones, numeradas desde $j = 0$. La fila $F_{a,0} = (a)$ es el vértice, que siempre es par. Denotamos por $\mathcal{F}$ la familia de todas las filas.

Proposición 2.1 (Fórmula cerrada)**.** *La construcción anterior da, para todo $a \in \mathcal{A}$, $r \geq 0$ y $0 \leq j \leq r$,*

$$x_{a,r,j} = 2^{r-j}3^j(a+1) - 1.$$

Demostración. De la primera columna se obtiene por inducción $x_{a,r,0} + 1 = 2^r(a+1)$. Supongamos establecida la fórmula en la columna $j-1$ para todas las filas donde está definida. Entonces, por la recurrencia aditiva,

$$\begin{aligned} x_{a,r,j} &= \big(2^{r-j+1}3^{j-1}(a+1) - 1\big) + \big(2^{r-j}3^{j-1}(a+1) - 1\big) + 1 \\ &= 2^{r-j}3^j(a+1) - 1. \end{aligned}$$

La inducción sobre las columnas concluye la demostración. □

Proposición 2.2 (Relaciones entre posiciones)**.** *Para los índices indicados se cumplen*

$$\begin{aligned} x_{a,r,j} &= 2x_{a,r-1,j} + 1 && (r \geq 1,\ 0 \leq j < r), \\ x_{a,r,j} &= 3x_{a,r-1,j-1} + 2 && (r \geq 1,\ 1 \leq j \leq r), \\ x_{a,r,j} &= x_{a,r-1,j-1} + x_{a,r,j-1} + 1 && (r \geq 1,\ 1 \leq j \leq r). \end{aligned}$$

Demostración. Las dos primeras igualdades se obtienen sustituyendo la fórmula cerrada de la proposición 2.1. Para la tercera, si $A = 2^{r-j}3^{j-1}(a+1)$, los tres términos son, respectivamente, $3A-1$, $A-1$ y $2A-1$; por tanto, $3A - 1 = (A-1) + (2A-1) + 1$. □

Observación 2.3. La tercera identidad es la propia regla de construcción. Recuerda a la del triángulo de Pascal, pero no es la misma. Al trasladar las entradas mediante $u_{a,r,j} = x_{a,r,j} + 1$, se obtiene la regla homogénea $u_{a,r,j} = u_{a,r,j-1} + u_{a,r-1,j-1}$. Las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 3x + 2$ describen, respectivamente, el paso a lo largo de las columnas y de las diagonales, no el avance horizontal dentro de una misma fila.

3. Correspondencia exacta con Collatz

Teorema 3.1 (Filas completas y segmentos impar–par)**.** *Para todo $a \in \mathcal{A}$ y $r \geq 1$, los términos de $F_{a,r}$ son exactamente los iterados sucesivos de C desde $x_{a,r,0}$ hasta el primer término par. En concreto, $x_{a,r,0}, \ldots, x_{a,r,r-1}$ son impares, $x_{a,r,r}$ es par y*

$$x_{a,r,j+1} = C(x_{a,r,j}) \qquad (0 \leq j < r).$$

Demostración. Como $a+1$ es impar, para $j < r$ el factor $2^{r-j}3^j(a+1)$ es par y $x_{a,r,j}$ es impar. En cambio, $x_{a,r,r} = 3^r(a+1) - 1$ es par. Finalmente,

$$\frac{3x_{a,r,j} + 1}{2} = \frac{3\big(2^{r-j}3^j(a+1) - 1\big) + 1}{2} = 2^{r-j-1}3^{j+1}(a+1) - 1 = x_{a,r,j+1}.$$

Así, el último término es el primer par de la sucesión iniciada en el primero. □

Comentario 3.2 (Demostración a partir de la construcción). La relación $x_{a,r,j+1} = C(x_{a,r,j})$ puede obtenerse también sin la fórmula cerrada. Para $0 \le j < r$, la primera identidad de la proposición 2.2 da $x_{a,r-1,j} = (x_{a,r,j} - 1)/2$. Sustituyendo en la regla de construcción (2), aplicada en la posición $j+1$,

$$x_{a,r,j+1} = x_{a,r,j} + x_{a,r-1,j} + 1 = x_{a,r,j} + \frac{x_{a,r,j} - 1}{2} + 1 = \frac{3x_{a,r,j} + 1}{2}.$$

Observación 3.3. Las filas de índice cero no son segmentos impar–par: consisten únicamente en el vértice par. Por tanto, la afirmación del teorema exige $r \ge 1$.

Ejemplo 3.4 (Primeras filas de $T(0)$ y de $T(4)$)**.**

r	$T(0)$	$T(4)$
0	0	4
1	1, 2	9, 14
2	3, 5, 8	19, 29, 44
3	7, 11, 17, 26	39, 59, 89, 134
4	15, 23, 35, 53, 80	79, 119, 179, 269, 404
5	31, 47, 71, 107, 161, 242	159, 239, 359, 539, 809, 1214

La fila 0 es el vértice. En $T(4)$, por ejemplo, la regla aditiva da $29 = 19+9+1$ y $44 = 29+14+1$; en la primera columna, $39 = 2 \cdot 19 + 1$, y en la diagonal, $134 = 3 \cdot 44 + 2$.

4. Localización y sufijos únicos

Proposición 4.1 (Longitud de un segmento)**.** *Para todo impar positivo m, el segmento impar–par que empieza en m tiene exactamente $\nu_2(m+1)$ pasos de la rama impar de C.*

Demostración. Mientras n es impar, $C(n) + 1 = 3(n+1)/2$, y por tanto $\nu_2(C(n)+1) = \nu_2(n+1) - 1$. Si $\nu_2(n+1) \ge 2$, entonces $n \equiv 3 \pmod 4$ y $C(n)$ sigue siendo impar. Si $\nu_2(n+1) = 1$, entonces $n \equiv 1 \pmod 4$ y $C(n)$ es par. Así, la valoración desciende de $\nu_2(m+1)$ a cero exactamente al llegar al primer par. □

Teorema 4.2 (Partición aritmética)**.** *Cada entero $n \ge 0$ ocupa una única posición en una única fila de $\mathcal{F}$. Si*

$$n + 1 = 2^\alpha 3^\beta q, \qquad \gcd(q, 6) = 1,$$

entonces dicha posición es

$$a = q - 1, \qquad r = \alpha + \beta, \qquad j = \beta.$$

Demostración. Por la unicidad de la factorización, α, β y q son únicos. Como q es primo con 6, se tiene $q \equiv 1$ o $5 \pmod 6$, luego $a = q - 1 \in \mathcal{A}$. La fórmula de la fila da

$$x_{a,r,j} = 2^\alpha 3^\beta q - 1 = n.$$

Recíprocamente, toda representación de n en una fila determina exactamente esa factorización de $n+1$. Esto incluye $n = 0$, con $a = r = j = 0$. □

Teorema 4.3 (Sufijo único de un segmento impar–par)**.** *Para todo impar $m \ge 1$ existen una única fila $F_{a,r}$ y una única posición $j < r$ tales que el segmento impar–par que comienza en m es exactamente*

$$(x_{a,r,j}, x_{a,r,j+1}, \ldots, x_{a,r,r}).$$

El número de aplicaciones de C hasta el primer par es $r - j = \nu_2(m+1)$.

Demostración. Aplicamos el teorema 4.2 a m. Como m es impar, $m+1$ es par y $\alpha = \nu_2(m+1) \geq 1$. En consecuencia, $j = \beta < \alpha + \beta = r$. Por el teorema 3.1, la sucesión desde esa posición hasta el extremo es exactamente el segmento buscado. La unicidad de la fila y de la posición procede de la partición. Su longitud en pasos es $r - j = \alpha$, de acuerdo también con la proposición 4.1. □

Ejemplo 4.4. El impar 11 aparece en $F_{0,3} = (7, 11, 17, 26)$ en la posición $j = 1$; su segmento es $11, 17, 26$, un sufijo propio de la fila. En particular, no todo segmento impar–par es una fila completa.

5. Transición aritmética entre filas

La correspondencia anterior describe los tramos impares de la iteración. Una trayectoria que empieza en un impar m recorre primero el sufijo de su fila que le asigna el teorema 4.3, hasta el par terminal. Para continuar hay que dividir ese par por 2 hasta alcanzar el siguiente impar, y a partir de ahí se aplica el teorema siguiente.

Teorema 5.1 (Localizador de la fila siguiente)**.** *Sea $F_{a,r}$ una fila con $r \geq 1$, sea $q = a + 1$ y sea*

$$e = 3^r q - 1 > 0, \qquad k = \nu_2(e) \geq 1, \qquad m = \frac{e}{2^k}.$$

Escribamos de forma única

$$m + 1 = 2^{\alpha'} 3^{\beta'} q', \qquad \gcd(q', 6) = 1.$$

Como m es impar, $\alpha' \geq 1$, y la fila que contiene el siguiente impar de la trayectoria se localiza mediante

$$a' = q' - 1, \qquad r' = \alpha' + \beta', \qquad j' = \beta'.$$

En particular,

$$m + 1 = \frac{3^r q + 2^k - 1}{2^k}, \qquad j' = \nu_3(m+1).$$

Si k es impar, $j' = 0$; si k es par, $j' \geq 1$.

Demostración. El entero e es positivo y par; su parte impar m es positiva e impar. El localizador del teorema 4.2 proporciona directamente los índices de su única fila. La identidad para $m + 1$ resulta de sustituir $e = 3^r q - 1$. Como 2^k es primo con 3, la valoración 3-ádica de $m + 1$ es la del numerador. Si k es impar, $2^k \equiv -1 \pmod 3$ y $3^r q + 2^k - 1 \equiv 1 \pmod 3$, por lo que $j' = 0$. Si k es par, $2^k \equiv 1 \pmod 3$ y el numerador es divisible por 3, por lo que $j' \geq 1$. □

Observación 5.2. Los pares intermedios $e/2, \ldots, e/2^{k-1}$ pertenecen también a filas de $\mathcal{F}$, como pares terminales o como vértices; el teorema localiza directamente la fila del siguiente impar. La transición es determinista y puede llevar a otro triángulo. No implica que disminuyan el número, el índice de fila ni el parámetro a. Tampoco impide que una trayectoria vuelva a visitar una fila anterior.

Ejemplo 5.3 (Cambio de triángulo)**.** La fila $F_{0,3} = (7, 11, 17, 26)$ termina en $e = 26$. Tenemos $k = 1$, $m = 13$ y $m + 1 = 14 = 2 \cdot 7$. Por tanto, el siguiente impar está en la fila $F_{6,1} = (13, 20)$, con posición de entrada $j' = 0$. La disjunción de los triángulos no impide el paso de $T(0)$ a $T(6)$.

Ejemplo 5.4 (Entrada interior)**.** La fila $F_{4,2} = (19, 29, 44)$ termina en $e = 44 = 4 \cdot 11$. Aquí $k = 2$ y $m = 11$, que se localiza en $F_{0,3} = (7, 11, 17, 26)$ en la posición $j' = 1$. El siguiente segmento recorrido es $11, 17, 26$.

6. Alcance y límites de la representación

La familia triangular proporciona una partición exacta de los enteros no negativos y una codificación aritmética de cada segmento impar–par. El paso entre filas se calcula de forma unívoca, pero las transiciones no respetan necesariamente el orden de los parámetros triangulares. En particular, la disjunción de los triángulos no demuestra la ausencia de ciclos: solo garantiza que cada entero tiene una localización única.

La fila $F_{0,1} = (1, 2)$ es su propia sucesora: su par terminal 2 conduce al impar 1, que está en ella misma. En términos de filas, el ciclo trivial $1 \leftrightarrow 2$ es, pues, un punto fijo de la transición, y una trayectoria que alcanza esa fila permanece en él. La conjetura de Collatz puede reformularse diciendo que toda sucesión de transiciones entre filas iniciada en un impar positivo alcanza la fila $F_{0,1}$. Esta reformulación es equivalente al problema original y no constituye una demostración de él. La finitud de cada fila tampoco implica la finitud del número de filas recorridas.

7. Conclusión

Se ha demostrado la correspondencia entre las filas de índice positivo y los segmentos de Collatz, precisando que un impar arbitrario inicia un sufijo único y no necesariamente una fila completa. Las fórmulas de localización y transición permiten reconstruir exactamente la evolución de una trayectoria mediante filas y triángulos. Estas identidades son incondicionales; no se infiere de ellas convergencia global ni exclusión de ciclos no triviales.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Tramos impares y pares de Collatz: tablas y triángulos 2-ádicos*, Zenodo, 2026, https://doi.org/10.5281/zenodo.23857015.