Lógica Imaginaria Collatz II

Fundamentos matemáticos de la estructura triangular y del juego

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

Se formaliza la estructura de filas utilizada en el juego *Lógica Imaginaria Collatz*. Se demuestra que las filas constituyen una partición de los enteros positivos y se obtiene una localización aritmética única. Se define la transición determinista entre filas y su relación exacta con la transformación de Collatz sobre impares. Se precisa la regla reglamentaria de finalización cuando una fila ya está sobre la mesa, sin deducir de la partición una ausencia general de revisitas. El objetivo es fundamentar el juego, no resolver ni aportar una demostración de la conjetura de Collatz.

1. Objeto y alcance

El reglamento de *Lógica Imaginaria Collatz* presenta una caja imaginaria de triángulos numéricos. El presente texto estudia exactamente las mismas filas, pero sustituye la descripción lúdica por definiciones y demostraciones. La condición de victoria y el límite convencional de 200 filas pertenecen al reglamento, no a los teoremas aritméticos.

Escribiremos $\mathbb{N}_{>0}$ para los enteros positivos y $\nu_p(m)$ para la valoración p-ádica de $m > 0$.

2. Triángulos y filas

Definición 2.1 (Vértices y filas)**.** Sea

$$\mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : a \equiv 0 \text{ o } 4 \pmod 6\}.$$

Para $a \in \mathcal{A}$ y $r \geq 1$ se define la fila

$$F_{a,r} = (x_0, \ldots, x_r), \qquad x_j = 2^{r-j}3^j(a+1) - 1 \quad (0 \leq j \leq r).$$

Para $r = 0$ se admite $F_{a,0} = (a)$ si $a > 0$. El vértice $a = 0$ no constituye una fila de índice cero del juego. Denotamos por $\mathcal{F}$ el conjunto de todas estas filas.

Como $a + 1$ es impar y no es divisible por 3, para $j < r$ el número x_j es impar, mientras que x_r es par. Por tanto, el *par terminal* de la fila es

$$e(F_{a,r}) = 3^r(a+1) - 1 \quad (r \geq 1), \qquad e(F_{a,0}) = a.$$

Proposición 2.2 (Relación dentro de la fila)**.** *Para $0 \leq j < r$ se tiene*

$$x_{j+1} = \frac{3x_j + 1}{2}.$$

Demostración. Al sustituir la fórmula de x_j,

$$\frac{3(2^{r-j}3^j(a+1)-1)+1}{2} = 2^{r-j-1}3^{j+1}(a+1)-1 = x_{j+1}.$$

□

La Figura 1 muestra las primeras filas del triángulo $T(4)$ y permite observar las recurrencias que gobiernan sus extremos.

4														
9	14													
19	29	44												
39	59	89	134											
79	119	179	269	404										
159	239	359	539	809	1214									
319	479	719	1079	1619	2429	3644								
639	959	1439	2159	3239	4859	7289	10934							
1279	1919	2879	4319	6479	9719	14579	21869	32804						
2559	3839	5759	8639	12959	19439	29159	43739	65609	98414					
5119	7679	11519	17279	25919	38879	58319	87479	131219	196829	295244				
10239	15359	23039	34559	51839	77759	116639	174959	262439	393659	590489	885734			
20479	30719	46079	69119	103679	155519	233279	349919	524879	787319	1180979	1771469	2657204		
40959	61439	92159	138239	207359	311039	466559	699839	1049759	1574639	2361959	3542939	5294409	7971614	
81919	122879	184319	276479	414719	622079	933119	1399679	2099519	3149279	4723919	7085879	10588819	15943229	23914844

Figura 1: Primeras filas del triángulo $T(4)$. Cada fila se construye mediante la transformación $x \mapsto (3x+1)/2$, mientras que sus extremos satisfacen las recurrencias $P_{r+1} = 2P_r + 1$ y $E_{r+1} = 3E_r + 2$.

3. Partición y localización única

Teorema 3.1 (Partición de los enteros no negativos)**.** *Cada entero $n \geq 0$ pertenece a exactamente una fila de $\mathcal{F}$, y ocupa exactamente una posición dentro de ella.*

Demostración. Sea $n \geq 0$. Factorizamos de manera única

$$n+1 = 2^\alpha 3^\beta q, \qquad \alpha, \beta \geq 0, \quad \gcd(q,6) = 1.$$

Pongamos $a = q-1$, $r = \alpha + \beta$ y $j = \beta$.

Como $\gcd(q,6) = 1$, necesariamente $q \equiv 1$ o $5 \pmod 6$. En el primer caso, $a = q-1 \equiv 0 \pmod 6$; en el segundo, $a = q-1 \equiv 4 \pmod 6$. Por tanto, en ambos casos $a \in \mathcal{A}$.

Además, $0 \leq j \leq r$ y

$$2^{r-j}3^j(a+1) - 1 = 2^\alpha 3^\beta q - 1 = n.$$

Si $r = 0$, entonces $n = a$ y el número pertenece a la fila de índice cero. Esto incluye el caso $n = 0$, para el cual $a = r = j = 0$.

La unicidad de α, β, q impone la unicidad de a, r, j, y por tanto de la fila y de la posición. □

Observación 3.2 (Filas de índice cero). Las filas de índice cero contienen únicamente su vértice, que es par. Aunque pertenecen a la partición de los enteros no negativos, no intervienen en el juego, pues cada jugada se determina a partir de un número impar.

Corolario 3.3 (Localizador aritmético)**.** *Si $n \geq 0$, su fila y posición se obtienen directamente mediante*

$$\alpha = \nu_2(n+1), \qquad \beta = \nu_3(n+1),$$
$$a = \frac{n+1}{2^\alpha 3^\beta} - 1, \qquad r = \alpha + \beta, \qquad j = \beta.$$

No es necesario recorrer la caja ni construir los triángulos anteriores.

4. La transformación entre filas

Definición 4.1 (Sucesora de una fila)**.** Para un par positivo e definimos su parte impar

$$\mathrm{impar}(e) = e/2^{\nu_2(e)}.$$

Sea $R(n)$ la fila única que contiene a n. La transformación de filas es

$$\boxed{\Phi(F) = R(\mathrm{impar}(e(F))).}$$

Está bien definida porque todas las filas tienen par terminal positivo y porque el teorema de partición proporciona $R(n)$ para todo entero positivo.

Proposición 4.2 (Correspondencia con el paso sobre impares)**.** *Sea n un elemento impar de la fila $F_{a,r}$, situado en la posición $j < r$. Al aplicar sucesivamente la transformación $(3x+1)/2$ hasta el par terminal y, después, eliminar todos sus factores de 2, se obtiene el impar que determina $\Phi(F_{a,r})$.*

Demostración. La primera parte es la proposición 2.2 aplicada desde la posición j hasta la posición r. La segunda parte es exactamente la definición de $\mathrm{impar}(e(F_{a,r}))$. □

Observación 4.3 (Relación con Collatz). El paso de una fila a su sucesora representa un tramo de la dinámica habitual, no una única iteración. La fila puede contener varios elementos impares antes del par terminal; a continuación se efectúan tantas divisiones por 2 como requiera ese terminal. Por ello, 200 filas no equivalen a 200 pasos de Collatz.

5. Ejemplos exactos

$$\begin{array}{lll} F_{0,2} = (3,5,8), & \mathrm{impar}(8) = 1, & \Phi(F_{0,2}) = F_{0,1} = (1,2), \\ F_{4,2} = (19,29,44), & \mathrm{impar}(44) = 11, & \Phi(F_{4,2}) = F_{0,3} = (7,11,17,26), \\ F_{12,2} = (51,77,116), & \mathrm{impar}(116) = 29, & \Phi(F_{12,2}) = F_{4,2}. \end{array}$$

Los ejemplos muestran por qué una jugada debe retirar la fila completa, incluso si el impar de entrada ocupa una posición intermedia.

6. Determinación unívoca de las jugadas

Proposición 6.1 (Localización de un impar)**.** *Todo entero impar positivo n pertenece a una única fila $F_{a,r}$ con $r \geq 1$. Su posición dentro de ella está determinada por $\nu_3(n+1)$.*

Demostración. Como n es impar, $n+1$ es par. Escribimos de forma única

$$n+1 = 2^{\alpha}3^{\beta}q, \qquad \alpha \geq 1, \quad \beta \geq 0, \quad \gcd(q,6) = 1.$$

Por el teorema de partición, n ocupa la posición $j = \beta$ en $F_{q-1,\alpha+\beta}$. En particular, n es el primer elemento de su fila si y solo si $\beta = 0$. □

Proposición 6.2 (Determinación de la sucesora)**.** *Para cada fila $F \in \mathcal{F}$ existe una única fila sucesora $\Phi(F)$. Para cada impar positivo n existe una única fila $R(n)$ que lo contiene.*

Demostración. El par terminal $e(F)$ es un entero positivo definido por la construcción. Su factorización $e(F) = 2^k u$, con u impar y $k \geq 1$, es única. Por el teorema de partición, u pertenece a una única fila $R(u)$. En consecuencia, $\Phi(F) = R(u)$ está determinada de manera unívoca. □

Observación 6.3 (Alcance de la unicidad). La determinación unívoca significa que en ninguna jugada se puede elegir una fila distinta de la que corresponde aritméticamente al par terminal. No se utiliza esta propiedad para formular conclusiones sobre el comportamiento global de iteraciones sucesivas de Φ.

Observación 6.4 (Posición de entrada). Si el par terminal e de una fila tiene valoración $k = \nu_2(e)$ y $m = e/2^k$, la posición de m en su fila se obtiene de $j = \nu_3(m+1)$.

Para una fila $F_{a,r}$ con $r \geq 1$, se tiene $e = 3^r(a+1) - 1$ y, por tanto,

$$m + 1 = \frac{3^r(a+1) + 2^k - 1}{2^k}.$$

Si k es impar, entonces $2^k \equiv 2 \pmod 3$, el numerador no es divisible por 3 y $j = 0$: la siguiente fila se localiza por su primer elemento.

Si k es par, tanto $3^r(a+1)$ como $2^k - 1$ son divisibles por 3 y, como 2^k es primo con 3, se concluye que $j \geq 1$ y la posición es interior.

Esta distinción no es necesaria durante el juego, pues se extrae siempre la fila completa.

7. Lectura matemática de las normas

La elección del número inicial es una condición del reglamento. Su prohibición de alcanzar directamente una potencia de 2 puede comprobarse aritméticamente: como los elementos anteriores al terminal son impares, una potencia positiva de 2 dentro del tramo desde el impar inicial hasta el terminal solo puede ser el propio terminal. Así, para un comienzo impar n, basta verificar que $e(R(n))$ no es potencia de 2, además de excluir la fila que contiene al 1.

El límite de 200 filas define una partida finita por convención. Si la fila sucesora ya se encuentra sobre la mesa, el reglamento declara la partida nula antes de extraerla de nuevo. Esta disposición no afirma que tal repetición se produzca ni que sea imposible; la partición y el carácter determinista de Φ no bastan por sí solos para resolver esa cuestión. La alternancia entre jugadores determina quién coloca cada fila, pero no modifica la transformación aritmética.

8. Delimitación final

Quedan demostradas la construcción explícita de las filas, su relación interna, la partición de los enteros positivos, la localización única y la definición determinista de la transición entre filas. No se demuestra que toda sucesión alcance la fila del 1; el escrito se limita a la construcción y a la determinación de las jugadas, sin analizar los itinerarios globales.

El reglamento y este escrito se refieren a los mismos objetos. El primero invita a observarlos mediante una partida; el segundo establece qué propiedades se deducen de las definiciones y cuáles requieren argumentos adicionales. Ninguna de las afirmaciones aquí probadas constituye una demostración de la conjetura de Collatz.