Ciclos de Collatz con un único bloque de exponentes unitarios

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

Para la aplicación impar $F(u) = (3u+1)/2^{\nu_2(3u+1)}$, todo ciclo no trivial tiene exponentes iguales a 1 y exponentes mayores o iguales que 2. Se demuestra que no existe ningún ciclo no trivial en el que los exponentes iguales a 1 formen un único bloque cíclico, es decir, con perfil $(1^s, \beta_1, \ldots, \beta_t)$, $s, t \geq 1$, $\beta_i \geq 2$, salvo rotación. La demostración combina una cota inferior del inicio del bloque de unos, una cota superior del acarreo, $c_n < 3^n + 2^\sigma$, y el teorema de Ellison sobre la diferencia $|2^x - 3^y|$; los casos que estas cotas no cubren forman un conjunto finito, que se comprueba con el criterio exacto de cierre. La familia contiene los circuitos de Steiner ($t = 1$). En el lenguaje de Simons y de Weger, estos ciclos tienen t mínimos locales, de modo que el caso $t \leq 91$ está contenido en el teorema de Hercher.

1. Introducción

Este escrito usa la notación y los resultados de *Memorias binarias, acarreos y cierre de ciclos* [9], que recogemos en la sección 2. Para un entero impar positivo u, escribimos

$$\ell(u) = \nu_2(3u+1), \qquad F(u) = \frac{3u+1}{2^{\ell(u)}}.$$

Un ciclo de F de longitud n tiene un *perfil* $(\ell_0, \ldots, \ell_{n-1})$, la sucesión de los exponentes a lo largo del ciclo, definida salvo rotación. El ciclo trivial es el punto fijo $F(1) = 1$, con perfil (2).

Todo ciclo no trivial contiene exponentes iguales a 1 y exponentes mayores o iguales que 2 (Proposición 2.1). La forma más sencilla de combinarlos es que todos los unos sean consecutivos. El resultado de este escrito es que eso no ocurre:

Teorema 1.1. *No existe ningún ciclo no trivial de F cuyo perfil sea, salvo rotación,*

$$(1^s, \beta_1, \ldots, \beta_t), \qquad s \geq 1, \quad t \geq 1, \quad \beta_i \geq 2 \ \ (1 \leq i \leq t),$$

donde 1^s denota s exponentes iguales a 1.

En términos de la aplicación $H(n) = n/2$ para n par y $H(n) = (3n+1)/2$ para n impar, un ciclo así tendría una subida de $s+1$ pasos impares consecutivos y $t-1$ subidas de un solo paso impar, separadas por tramos decrecientes. La relación con los resultados conocidos se discute en la sección 6.

2. Preliminares

Para un perfil $(\ell_0, \dots, \ell_{n-1})$ de enteros positivos ponemos

$$D_0 = 0, \quad D_j = \ell_0 + \cdots + \ell_{j-1}, \qquad \sigma = D_n, \qquad c_n = \sum_{j=0}^{n-1} 3^{n-1-j} 2^{D_j}, \qquad \delta = 2^\sigma - 3^n.$$

Proposición 2.1 ([9]). *1. Un perfil produce una órbita periódica de enteros impares positivos que vuelve al inicio tras n pasos si y solo si $\delta > 0$ y $\delta \mid c_n$; en ese caso, el inicio es $u_0 = c_n/\delta$. Esta condición no depende de la rotación del perfil.*

2. Si todos los exponentes de un ciclo positivo son mayores o iguales que 2, el ciclo es el trivial. Ningún perfil formado solo por unos produce un ciclo positivo.

La primera parte es la ecuación de cierre de Böhm y Sontacchi [1]; véase también [5]. Por la segunda, un ciclo no trivial contiene exponentes de los dos tipos.

3. Dos cotas para el inicio del bloque de unos

Fijamos un perfil $(1^s, \beta_1, \dots, \beta_t)$ con $s, t \geq 1$ y $\beta_i \geq 2$, y ponemos $n = s+t$ y $\sigma = s+\beta_1+\cdots+\beta_t$. Como cada $\beta_i \geq 2$, se tiene

$$\sigma \geq s + 2t. \tag{1}$$

Lema 3.1 (cota inferior). *Si un entero impar positivo u cumple $\ell(u) = \ell(F(u)) = \cdots = \ell(F^{s-1}(u)) = 1$, entonces $2^{s+1} \mid u+1$. En particular, $u \geq 2^{s+1} - 1$.*

Demostración. Para un impar v se tiene $\ell(v) = 1$ si y solo si $v \equiv 3 \pmod 4$, es decir, si y solo si $\nu_2(v+1) \geq 2$. En ese caso $F(v) = (3v+1)/2$ y

$$F(v) + 1 = \frac{3(v+1)}{2}, \qquad \text{luego} \qquad \nu_2(F(v)+1) = \nu_2(v+1) - 1.$$

Por inducción, mientras los exponentes valgan 1, $\nu_2(F^i(u)+1) = \nu_2(u+1) - i$. La condición $\ell(F^{s-1}(u)) = 1$ exige $\nu_2(u+1) - (s-1) \geq 2$, es decir, $\nu_2(u+1) \geq s+1$. □

Lema 3.2 (cota superior del acarreo). *Para el perfil $(1^s, \beta_1, \dots, \beta_t)$ se tiene*

$$c_n = 3^t(3^s - 2^s) + \sum_{i=0}^{t-1} 3^{t-1-i} 2^{D_{s+i}} < 3^n + 2^\sigma.$$

Demostración. Para $j < s$ es $D_j = j$, y

$$\sum_{j=0}^{s-1} 3^{n-1-j} 2^j = 3^t \sum_{j=0}^{s-1} 3^{s-1-j} 2^j = 3^t(3^s - 2^s) < 3^n.$$

Para $j = s+i$, con $0 \leq i < t$, se tiene $D_{s+i} = \sigma - (\beta_{i+1} + \cdots + \beta_t) \leq \sigma - 2(t-i)$. Con $k = t-i$,

$$\sum_{i=0}^{t-1} 3^{t-1-i} 2^{D_{s+i}} \leq 2^\sigma \sum_{k=1}^{t} \frac{3^{k-1}}{4^k} = 2^\sigma \Big(1 - \big(\tfrac{3}{4}\big)^t\Big) < 2^\sigma. \qquad \square$$

4. El teorema de Ellison

Teorema 4.1 (Ellison [2]; véase también [10, Lema 1])**.** *Sea*

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 19, 27\}.$$

Para todos los enteros positivos x, y con $x \notin \mathcal{S}$,

$$|2^x - 3^y| > 2^x e^{-x/10}.$$

Tijdeman y Wang [10, Lema 1] recogen la misma cota para $x > 10$, con las excepciones $x \in \{10, 11, 13, 14, 16, 19, 27\}$, y atribuyen a Ellison el caso $x > 27$. Ellison obtiene este resultado a partir de la teoría de Baker sobre formas lineales en logaritmos y de un cálculo con el desarrollo en fracción continua de $\log 2/\log 3$; la constante y el conjunto excepcional son explícitos.

5. Demostración del teorema principal

Supongamos que existe un ciclo no trivial con perfil $(1^s, \beta_1, \ldots, \beta_t)$, con $s, t \geq 1$ y $\beta_i \geq 2$. Por la Proposición 2.1, podemos tomar como inicio el primer elemento del bloque de unos: $u_0 = c_n/\delta$, con $\delta > 0$.

Paso 1: cotas para u_0. Por el Lema 3.1, $u_0 \geq 2^{s+1} - 1 \geq 3$. Por el Lema 3.2,

$$u_0 = \frac{c_n}{\delta} < \frac{3^n + 2^\sigma}{2^\sigma - 3^n} = 1 + \frac{2 \cdot 3^n}{\delta}. \tag{2}$$

Paso 2: acotación de t y de σ en función de s. De $u_0 \geq 3$ y (2) se sigue $\delta < 3^n$, es decir, $2^\sigma < 2 \cdot 3^n$, y por tanto, con $L = \log_2 3$,

$$\sigma < nL + 1 = (s + t)L + 1. \tag{3}$$

Junto con (1), $s + 2t < (s + t)L + 1$, de donde

$$t < \frac{s(L - 1) + 1}{2 - L}. \tag{4}$$

Sustituyendo en (3) y usando $1 + \frac{L-1}{2-L} = \frac{1}{2-L}$,

$$\sigma < \frac{L}{2 - L}\,(s + 1) + 1 < 3{,}82\,(s + 1) + 1, \tag{5}$$

pues $L/(2 - L) = 3{,}8188\ldots < 3{,}82$.

Paso 3: aplicación del teorema de Ellison. Supongamos $\sigma \notin \mathcal{S}$. Por el Teorema 4.1, $\delta > 2^\sigma e^{-\sigma/10}$, y como $3^n < 2^\sigma$, la desigualdad (2) da

$$u_0 < 1 + 2\,\frac{3^n}{2^\sigma}\,e^{\sigma/10} < 1 + 2e^{\sigma/10}.$$

Con $u_0 \geq 2^{s+1} - 1$ resulta $2^s < 1 + e^{\sigma/10}$, y por (5),

$$2^s < 1 + e^{0{,}382\,s + 0{,}482}. \tag{6}$$

Para $s = 3$ el lado izquierdo vale 8 y el derecho es menor que 6,1. Si $2^s \geq 1 + e^{0{,}382s+0{,}482}$ para algún $s \geq 3$, entonces

$$2^{s+1} = 2 \cdot 2^s \geq 2 + 2e^{0{,}382s+0{,}482} > 1 + e^{0{,}382}\, e^{0{,}382s+0{,}482} = 1 + e^{0{,}382(s+1)+0{,}482},$$

pues $e^{0{,}382} = 1{,}465\ldots < 2$. Por inducción, (6) es falsa para todo $s \geq 3$. Por tanto, si $\sigma \notin \mathcal{S}$, necesariamente $s \leq 2$. Entonces (4) da $t < 5{,}24$ y (5) da $\sigma < 12{,}46$; como t y σ son enteros, $t \leq 5$ y $\sigma \leq 12$.

Paso 4: residuo finito. En todos los casos se tiene, pues, $\sigma \in \mathcal{S}$ o $\sigma \leq 12$; en particular, $\sigma \leq 27$. Con $\sigma \leq 27$ y (1), solo hay un número finito de perfiles $(1^s, \beta_1, \ldots, \beta_t)$. Hemos comprobado todos los que cumplen $\sigma \leq 27$ y $\delta > 0$, sin usar las cotas anteriores: son 511 232 perfiles, y en ninguno δ divide a c_n. Por la Proposición 2.1, ninguno produce un ciclo. El código figura en el Apéndice A. Esto concluye la demostración del Teorema 1.1. □

Observación 5.1. La demostración no usa ninguna verificación de la conjetura para valores iniciales grandes: solo el Teorema 4.1, las identidades de [9] y la comprobación finita del paso 4. El punto esencial es que el bloque de unos fuerza un inicio exponencialmente grande en s (Lema 3.1), mientras que las bajadas de al menos dos divisiones por 2 mantienen el acarreo por debajo de $3^n + 2^\sigma$ (Lema 3.2).

6. Relación con resultados conocidos

Un ciclo de H alterna tramos crecientes (pasos impares consecutivos) y decrecientes (divisiones por 2). Simons y de Weger [12] llaman *m-ciclo* a un ciclo con m mínimos locales. Tomando el perfil correspondiente al período mínimo, en un ciclo de perfil $(1^s, \beta_1, \ldots, \beta_t)$ los mínimos locales bajo H son los impares a los que se llega tras una división por 2, es decir, los que siguen a un exponente $\beta_i \geq 2$; hay exactamente t, aunque varios β_i sean consecutivos en el perfil de F. Por tanto, los ciclos del Teorema 1.1 son t-ciclos con una forma particular: una subida de $s + 1$ pasos impares y $t - 1$ subidas de un solo paso.

- El caso $t = 1$ son los *circuitos*, cuya inexistencia demostró Steiner [13]. Knight [4] da una demostración breve de este caso y excluye además los llamados *ciclos altos*.
- Simons [11] excluyó los 2-ciclos, y Simons y de Weger [12] todos los m-ciclos con $m \leq 68$.
- Mimuro [7] demostró que solo hay un número finito de ciclos con perfil $(1^s, \beta^t)$, es decir, con todas las bajadas iguales. Luca [6] demostró que existe una constante absoluta C_1 tal que todo ciclo no trivial tiene al menos $C_1 \log \sigma$ bloques máximos de exponentes iguales a 1; en consecuencia, solo puede haber un número finito de ciclos con un único bloque. El Teorema 1.1 muestra que no hay ninguno.
- Hercher [3] demostró que no hay m-ciclos con $m \leq 91$. En particular, el Teorema 1.1 está contenido en ese resultado para $t \leq 91$. Los alcances son distintos: el resultado de Hercher no impone ninguna forma al perfil y se limita a $m \leq 91$; el Teorema 1.1 impone la forma del perfil y no limita t.

El Corolario 5.1 de [8] obtiene este teorema como caso particular de un enunciado general sobre el bloque más largo de exponentes iguales a 1.

A. Código

El programa siguiente, en Python 3, comprueba con aritmética entera exacta todos los perfiles del paso 4.

```
def carry(profile):                # acarreo c_n y suma sigma
    c, D = 0, 0
    for l in profile:
        c, D = 3*c + 2**D, D + l
    return c, D

def compositions(total, parts):    # betas >= 2 con suma total
    if parts == 0:
        if total == 0:
            yield ()
        return
    for v in range(2, total - 2*(parts - 1) + 1):
        for rest in compositions(total - v, parts - 1):
            yield (v,) + rest

checked, cycles = 0, []
for sigma in range(1, 28):
    for s in range(1, sigma):
        for t in range(1, (sigma - s)//2 + 1):
            n = s + t
            delta = 2**sigma - 3**n
            if delta <= 0:
                continue
            for betas in compositions(sigma - s, t):
                checked += 1
                c, _ = carry((1,)*s + betas)
                if c % delta == 0:
                    cycles.append(((1,)*s + betas, c // delta))
print(checked, cycles)              # 511232 []
```

Referencias

[1] C. Böhm y G. Sontacchi, *On the existence of cycles of given length in integer sequences like $x_{n+1} = x_n/2$ if x_n even, and $x_{n+1} = 3x_n + 1$ otherwise*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **64** (1978), 260–264.

[2] W. J. Ellison, *On a theorem of S. Sivasankaranarayana Pillai*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1970–1971), exp. n.º 10, 1–10. https://www.numdam.org/item/STNB_1970-1971____A10_0/

[3] C. Hercher, *There are no Collatz m-cycles with $m \leq 91$*, J. Integer Seq. **26** (2023), art. 23.3.5.

[4] K. Knight, *Collatz high cycles do not exist*, 2023, HAL hal-04261183.

[5] J. C. Lagarias, *The $3x+1$ problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 3–23.

[6] F. Luca, *On the nontrivial cycles in Collatz's problem*, SUT J. Math. **41** (2005), n.º 1, 31–41.

[7] T. Mimuro, *On certain simple cycles of the Collatz conjecture*, SUT J. Math. **37** (2001), n.º 2, 79–89.

[8] M. Cerdá Bennassar, *El bloque más largo de exponentes unitarios en los ciclos de Collatz*, 2026.

[9] M. Cerdá Bennassar, *Memorias binarias, acarreos y cierre de ciclos*, 2026.

[10] R. Tijdeman y L. X. Wang, *Sums of products of powers of given prime numbers*, Pacific J. Math. **132** (1988), 177–193.

[11] J. L. Simons, *On the nonexistence of* 2*-cycles for the* $3x+1$ *problem*, Math. Comp. **74** (2005), n.º 251, 1565–1572. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-04-01728-4

[12] J. L. Simons y B. de Weger, *Theoretical and computational bounds for* m*-cycles of the* $3n+1$ *problem*, Acta Arith. **117** (2005), 51–70.

[13] R. P. Steiner, *A theorem on the Syracuse problem*, en Proceedings of the Seventh Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (Winnipeg, 1977), Congressus Numerantium **20**, Utilitas Mathematica, Winnipeg, 1978, 553–559.