Bloques de exponentes unitarios en los ciclos de Collatz: todo ciclo no trivial tiene un bloque corto

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

En un ciclo no trivial de la aplicación impar $F(u) = (3u+1)/2^{\nu_2(3u+1)}$, los exponentes iguales a 1 forman $r \geq 1$ bloques cíclicos máximos, de longitudes $s_1, \ldots, s_r$; en la órbita de la aplicación H, cada bloque de longitud s_i es una subida de $s_i + 1$ pasos impares. Se demuestra que, si el ciclo tiene n términos impares,

$$\min_i s_i < \frac{\log_2 3}{20 \ln 2}\, n + \log_2 r + 0{,}85, \qquad \frac{\log_2 3}{20 \ln 2} = 0{,}1143\ldots,$$

y también, con una constante muy grande, que $\min_i s_i = O(\log n)$ uniformemente en $r \leq n$. La demostración controla todos los términos del ciclo mediante los inicios de los bloques, siguiendo a Hercher, y combina la identidad del producto alrededor del ciclo con cotas inferiores explícitas de $|\sigma \log 2 - n \log 3|$: la que se deduce del trabajo de Ellison para la primera desigualdad y la de Matveev para la segunda. Como consecuencias, se recupera el teorema del escrito anterior sobre los ciclos con un único bloque de exponentes unitarios, y se obtiene que, con un número fijo de bloques de longitudes comparables, solo puede haber ciclos de longitud acotada. Los enunciados son condiciones necesarias para todo ciclo no trivial; no excluyen por sí solos los ciclos generales.

1. Introducción

Este escrito continúa *Memorias binarias, acarreos y cierre de ciclos* [9] y *Ciclos de Collatz con un único bloque de exponentes unitarios* [1], cuya notación seguimos. Para un entero impar positivo u,

$$\ell(u) = \nu_2(3u+1), \qquad F(u) = \frac{3u+1}{2^{\ell(u)}}.$$

Un ciclo de F de longitud n tiene un perfil $(\ell_0, \ldots, \ell_{n-1})$, definido salvo rotación, y escribimos $\sigma = \ell_0 + \cdots + \ell_{n-1}$. Todo ciclo positivo cumple $3^n < 2^\sigma \leq 4^n$, y todo ciclo no trivial contiene exponentes iguales a 1 y exponentes mayores o iguales que 2 [9].

En [1] se demostró que los exponentes iguales a 1 de un ciclo no trivial no pueden formar un único bloque cíclico. Aquí se considera el caso general: los unos forman $r \geq 1$ bloques cíclicos máximos, de longitudes $s_1, \ldots, s_r$. Los resultados principales dicen que alguno de esos bloques es corto.

Teorema 1.1. *Sea un ciclo no trivial de F con n términos impares, cuyos exponentes iguales a 1 forman r bloques cíclicos máximos de longitudes $s_1, \ldots, s_r$. Entonces*

$$\min_{1 \leq i \leq r} s_i < \frac{\log_2 3}{20 \ln 2}\, n + \log_2 r + 0{,}85.$$

Teorema 1.2. *En las condiciones del Teorema 1.1,*

$$\min_{1\le i\le r} s_i < \log_2 \frac{5r}{3} + \frac{K}{\ln 2}(1+\ln(2n)), \qquad K = 1{,}4\cdot 30^5\cdot 2^{4{,}5}\ln 2\,\ln 3 < 5{,}87\cdot 10^8.$$

En términos de la aplicación $H(n) = n/2$ para n par y $H(n) = (3n+1)/2$ para n impar, todo ciclo no trivial tiene alguna subida de más de un paso impar cuya longitud está acotada por una fracción fija del número de términos impares, más un término logarítmico en el número de tales subidas; y esa longitud es también $O(\log n)$, aunque con una constante que solo es efectiva para n astronómicamente grande.

2. Estructura de un ciclo por bloques

Fijamos un ciclo no trivial de F, formado por enteros impares positivos $u_0, \dots, u_{n-1}$, con $u_{j+1} = F(u_j)$ e índices módulo n. Como el único ciclo que contiene al 1 es el trivial, todos los términos cumplen $u_j \ge 3$.

Recorriendo el ciclo, los términos con $\ell(u_j) = 1$ forman $r \ge 1$ *bloques de subida* máximos, y entre cada dos consecutivos hay un *bloque de bajada* no vacío formado por términos con $\ell(u_j) \ge 2$. Numeramos los bloques de subida cíclicamente, $i = 1, \dots, r$, y denotamos por v_i el primer término del bloque i y por $s_i \ge 1$ su longitud. El bloque de bajada que sigue al bloque de subida i termina justo antes de v_{i+1}, con $v_{r+1} = v_1$. Cada término del ciclo pertenece a exactamente un bloque de uno de los dos tipos.

Lema 2.1 (inicio de un bloque de subida)**.** *Para cada i se tiene $v_i \ge 2^{s_i+1} - 1$, y por tanto*

$$v_i \ge \tfrac{3}{2}\,2^{s_i}, \qquad v_i - 1 \ge 2^{s_i}.$$

Demostración. Es el Lema 3.1 de [1] y el Lema 8 de [5]: los s_i exponentes iguales a 1 a partir de v_i exigen $2^{s_i+1} \mid v_i + 1$. Las otras dos desigualdades equivalen a $2^{s_i} \ge 2$, que se cumple porque $s_i \ge 1$. □

Lema 2.2 (términos de una subida)**.** *La suma de los inversos de los términos del bloque de subida i es menor que $3/v_i$.*

Demostración. Es la Observación 7 de [5]. Los términos son $w_0 = v_i$ y $w_{k+1} = (3w_k + 1)/2 > \frac{3}{2}w_k$, de modo que $w_k \ge (3/2)^k v_i$ y

$$\sum_{k=0}^{s_i-1} \frac{1}{w_k} < \frac{1}{v_i}\sum_{k\ge 0}\Big(\frac{2}{3}\Big)^k = \frac{3}{v_i}.$$ □

Lema 2.3 (términos de una bajada)**.** *La suma de los inversos de los términos del bloque de bajada que precede a v_{i+1} es menor que $3/(v_{i+1} - 1)$.*

Demostración. Sean $x_1, \dots, x_\tau$ los términos de ese bloque y $x_{\tau+1} = v_{i+1}$. Como $\ell(x_k) \ge 2$,

$$x_{k+1} = \frac{3x_k + 1}{2^{\ell(x_k)}} \le \frac{3x_k + 1}{4}, \qquad \text{luego} \qquad x_k - 1 \ge \frac{4}{3}\,(x_{k+1} - 1).$$

Por inducción, $x_{\tau+1-j} - 1 \ge (4/3)^j (v_{i+1} - 1)$ para $1 \le j \le \tau$. Como $x_k > x_k - 1 > 0$,

$$\sum_{k=1}^{\tau} \frac{1}{x_k} < \sum_{j=1}^{\tau} \frac{(3/4)^j}{v_{i+1} - 1} < \frac{1}{v_{i+1} - 1}\sum_{j\ge 1}\Big(\frac{3}{4}\Big)^j = \frac{3}{v_{i+1} - 1}.$$ □

Proposición 2.4. *Con $A = \sum_{i=1}^{r} 2^{-s_i}$, se tiene*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{u_j} < 5A.$$

Demostración. Cada término del ciclo aparece exactamente una vez, en una subida o en una bajada. La subida i aporta menos de $3/v_i$ y la bajada que la sigue, menos de $3/(v_{i+1}-1)$; como los índices son cíclicos,

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{3}{v_{i+1}-1} = \sum_{i=1}^{r} \frac{3}{v_i - 1}.$$

Por el Lema 2.1, $3/v_i \le 2\cdot 2^{-s_i}$ y $3/(v_i-1) \le 3\cdot 2^{-s_i}$. Sumando los Lemas 2.2 y 2.3 sobre todos los bloques,

$$\sum_{j} \frac{1}{u_j} < \sum_{i=1}^{r}\Big(\frac{3}{v_i} + \frac{3}{v_i - 1}\Big) \le 5\sum_{i=1}^{r} 2^{-s_i}. \qquad \square$$

3. La forma lineal Λ y sus cotas

Escribimos $L = \log_2 3$ y

$$\Lambda = \sigma \ln 2 - n \ln 3 = \ln \frac{2^{\sigma}}{3^{n}} > 0.$$

Lema 3.1 (identidad del producto)**.** *Para todo ciclo positivo de F,*

$$\Lambda = \sum_{j=0}^{n-1} \ln\Big(1 + \frac{1}{3u_j}\Big) < \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{u_j}.$$

En particular, para un ciclo no trivial, $\Lambda < \frac{5}{3}A$ y $\sigma \le n\log_2(10/3)$.

Demostración. Cada paso cumple $u_{j+1}/u_j = (3/2^{\ell_j})(1 + 1/(3u_j))$. Multiplicando alrededor del ciclo, el producto de los cocientes vale 1, lo que da la identidad; la desigualdad se sigue de $\ln(1+x) < x$ para $x > 0$. Es, en esencia, el Teorema 16 de [5], que sigue a Eliahou [3]. La cota $\Lambda < \frac{5}{3}A$ es la Proposición 2.4. Como $u_j \ge 3$, cada factor $1 + 1/(3u_j)$ es a lo sumo $10/9$, de donde $2^{\sigma}/3^{n} \le (10/9)^{n}$. $\square$

Teorema 3.2 (consecuencia de Ellison [4])**.** *Para todos los enteros positivos x, y con $x > 84$,*

$$|x\ln 2 - y \ln 3| \ge e^{-x/20}.$$

Demostración. En la demostración del Teorema 3 de [4], la teoría de Baker (con $A = 1/10$, mediante el Lema 2 de [4]) da que toda solución de $0 < |x\log 2 - y\log 3| < e^{-x/20}$ cumple $\max(x,y) < 10^{160}$. Si $x > 84$ y se cumpliera esa desigualdad estricta, necesariamente $y < x$, pues para $y \ge x$ se tiene $|x\ln 2 - y\ln 3| \ge x\ln(3/2) > e^{-x/20}$; por tanto $\max(x,y) = x$, y en ese lema se puede tomar $H = x$. El Lema 3 de [4] enumera todas las soluciones con $x \le 10^{160}$; la mayor es $(x,y) = (84, 53)$. Como $\log 2/\log 3$ es irracional, la forma no se anula. $\square$

Teorema 3.3 (Matveev [6])**.** *Sean α_1, α_2 números racionales positivos y b_1, b_2 enteros con $\alpha_1^{b_1}\alpha_2^{b_2} \neq 1$. Sean $\log A_i \ge \max\{h(\alpha_i), |\log \alpha_i|, 0{,}16\}$, donde h es la altura logarítmica, y $B \ge \max\{|b_1|, |b_2|\}$. Entonces*

$$\log|\alpha_1^{b_1}\alpha_2^{b_2} - 1| > -1{,}4\cdot 30^{5}\cdot 2^{4{,}5}\,\log A_1\,\log A_2\,(1+\log B).$$

Es el caso de dos números racionales del teorema de Matveev, con grado $D = 1$. Para $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = 2$ se puede tomar $\log A_1 = \ln 3$ y $\log A_2 = \ln 2$, de modo que la constante es el número K del Teorema 1.2.

4. Demostración del Teorema 1.1

Sea $s = \min_i s_i$. Como $A \le r\,2^{-s}$, el Lema 3.1 da

$$\Lambda < \frac{5r}{3}\,2^{-s}. \tag{1}$$

Caso $\sigma \le 84$. De $2^\sigma > 3^n$ se sigue $n < 84/L < 53$, es decir, $n \le 52$. En la órbita de H, cada mínimo local de un ciclo es un término impar distinto, de modo que un ciclo con m mínimos locales tiene al menos m términos impares. Hercher [5] demostró que todo ciclo no trivial tiene $m \ge 92$; por tanto $n \ge 92$, y este caso no se da.

Caso $\sigma > 84$. Por el Teorema 3.2 y (1),

$$e^{-\sigma/20} \le \Lambda < \frac{5r}{3}\,2^{-s}, \qquad \text{luego} \qquad s < \log_2 \frac{5r}{3} + \frac{\sigma}{20\ln 2}.$$

Si $s < \log_2(5r/3)$, la desigualdad del teorema se cumple trivialmente, pues $\log_2(5/3) < 0{,}85$. En otro caso, $\frac{5r}{3}2^{-s} \le 1$, luego $\Lambda < 1$ y $\sigma < nL + 1/\ln 2$. Sustituyendo,

$$s < \log_2 r + \log_2 \frac{5}{3} + \frac{L}{20\ln 2}\,n + \frac{1}{20(\ln 2)^2}.$$

Como $\log_2(5/3) + 1/(20(\ln 2)^2) = 0{,}8410\ldots$, se obtiene el Teorema 1.1. □

5. Demostración del Teorema 1.2

Sea $s = \min_i s_i$. El número $\Lambda' = 3^n 2^{-\sigma} - 1$ está en $(-1, 0)$, y $|\Lambda'| = 1 - e^{-\Lambda} < \Lambda$. Por el Teorema 3.3, con $\alpha_1 = 3$, $b_1 = n$, $\alpha_2 = 2$, $b_2 = -\sigma$ y $B = \sigma$, que cumple $B \ge \max\{n, \sigma\}$ porque $\sigma > nL > n$, y usando además $\sigma \le 2n$,

$$\Lambda > |\Lambda'| > \exp\bigl(-K(1 + \ln(2n))\bigr).$$

Junto con (1), $2^s < \frac{5r}{3}\exp\bigl(K(1 + \ln(2n))\bigr)$, y tomando logaritmos en base 2 se obtiene el Teorema 1.2. □

Esta demostración no necesita separar valores pequeños de σ ni recurrir a [5]. Como $r \le n$, da $\min_i s_i = O(\log n)$. Su constante, $K/\ln 2 \approx 8{,}46 \cdot 10^8$, hace que dé una cota menor que la del Teorema 1.1 solo a partir de $n \approx 2{,}05 \cdot 10^{11}$; en esa comparación el término $\log_2 r$ se cancela.

6. Consecuencias y alcance

Denotamos por $N_1 = s_1 + \cdots + s_r$ el total de exponentes iguales a 1 del ciclo.

Lema 6.1. *Se tiene $N_1 \ge \log_2(6/5)\,n$. Si además $\min_i s_i \ge \log_2(5r/3)$, entonces $N_1 > (2 - L)\,n - 1/\ln 2$.*

Demostración. Como los demás exponentes son al menos 2, $\sigma \geq N_1 + 2(n - N_1) = 2n - N_1$. Por el Lema 3.1, $\sigma \leq n \log_2(10/3)$, de donde $N_1 \geq n(2 - \log_2(10/3)) = n \log_2(6/5)$. Bajo la condición adicional, la demostración del Teorema 1.1 da $\sigma < nL + 1/\ln 2$, y se concluye igual. □

Corolario 6.2 (un único bloque)**.** *Ningún ciclo no trivial tiene sus exponentes iguales a* 1 *formando un único bloque cíclico.*

Demostración. Supongamos $r = 1$, de modo que $N_1 = s_1 \geq 1 > \log_2(5/3)$. Por el Lema 6.1, $N_1 > 0{,}4150\, n - 1{,}443$, y por el Teorema 1.1, $N_1 < 0{,}1144\, n + 0{,}85$. Ambas desigualdades exigen $0{,}3006\, n < 2{,}293$, es decir, $n \leq 7$, lo que contradice $n \geq 92$. □

El Corolario 6.2 es el teorema de [1]. Allí se demuestra sin recurrir al resultado de Hercher, con una cota superior directa del acarreo y una comprobación finita; aquí se obtiene como caso particular de un enunciado general.

Corolario 6.3 (bloques de longitudes comparables)**.** *Sean $r \geq 1$ y $0 < \eta \leq 1$. Todo ciclo no trivial con r bloques de exponentes iguales a* 1 *cuyas longitudes cumplan $\min_i s_i \geq \eta\, N_1/r$ tiene*

$$\frac{\eta \log_2(6/5)}{r}\, n < \log_2 \frac{5r}{3} + \frac{K}{\ln 2}(1 + \ln(2n)).$$

En particular, para r y η fijos, solo puede haber tales ciclos con n menor que una cota efectivamente computable $n_0(r, \eta)$.

Demostración. Por el Lema 6.1, $\min_i s_i \geq \eta N_1/r \geq \eta \log_2(6/5)\, n/r$, y basta aplicar el Teorema 1.2. El lado izquierdo crece linealmente en n y el derecho logarítmicamente, de modo que la desigualdad falla para n grande. □

Observación 6.4 (alcance). Los Teoremas 1.1 y 1.2 no excluyen por sí solos ninguna familia de ciclos con $r \geq 2$: son condiciones necesarias. Indican que un ciclo no trivial no puede tener todas sus subidas largas a la vez. El Corolario 6.3 lo concreta: con un número fijo de bloques, un ciclo suficientemente largo tendría que tener bloques de longitudes muy desiguales. La cota $n_0(r, \eta)$ es efectivamente computable pero enorme, por el tamaño de K.

7. Relación con resultados conocidos

Un ciclo de H con m mínimos locales es un *m-ciclo* en el sentido de Simons y de Weger [10]. Cada bloque de subida empieza en un mínimo local, de modo que $r \leq m$. Simons y de Weger demostraron $m \geq 68$, y Hercher [5], $m \geq 92$. Brox [2] demostró que solo hay un número finito de ciclos con menos de $2 \log |C|$ descensos, donde $|C|$ es el número de términos impares; el número de descensos coincide con el número m de mínimos locales. Luca [7] demostró que existe una constante absoluta C_1 tal que todo ciclo no trivial tiene al menos $C_1 \log \sigma$ bloques máximos de exponentes iguales a 1, que él llama subidas; en particular, para cada c fijo solo hay un número finito de ciclos con a lo sumo c bloques. Mimuro [8] había demostrado antes la finitud para los perfiles $(1^i, (j+1)^k)$. El teorema de Luca acota inferiormente el número de bloques; los Teoremas 1.1 y 1.2 acotan superiormente la longitud del más corto.

Los Lemas 2.1 y 2.2 y la identidad del Lema 3.1 son, respectivamente, el Lema 8, la Observación 7 y, en esencia, el Teorema 16 de [5]; el primero es un resultado conocido desde Terras, y el último sigue a Eliahou [3]. Este escrito los combina con las cotas inferiores explícitas de

$|\sigma \log 2 - n \log 3|$ que proporcionan Ellison [4] y Matveev [6], aplicada a la longitud de los bloques de exponentes unitarios.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Ciclos de Collatz con un único bloque de exponentes unitarios*, 2026.

[2] T. Brox, *Collatz cycles with few descents*, Acta Arith. **92** (2000), 181–188.

[3] S. Eliahou, *The* $3x+1$ *problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths*, Discrete Math. **118** (1993), 45–56.

[4] W. J. Ellison, *On a theorem of S. Sivasankaranarayana Pillai*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1970–1971), exp. n.º 10, 1–10. https://www.numdam.org/item/STNB_1970-1971____A10_0/

[5] C. Hercher, *There are no Collatz* m*-cycles with* $m \leq 91$, J. Integer Seq. **26** (2023), art. 23.3.5.

[6] E. M. Matveev, *An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers. II*, Izv. Math. **64** (2000), n.º 6, 1217–1269. https://doi.org/10.1070/IM2000v064n06ABEH000314

[7] F. Luca, *On the nontrivial cycles in Collatz's problem*, SUT J. Math. **41** (2005), n.º 1, 31–41.

[8] T. Mimuro, *On certain simple cycles of the Collatz conjecture*, SUT J. Math. **37** (2001), n.º 2, 79–89.

[9] M. Cerdá Bennassar, *Memorias binarias, acarreos y cierre de ciclos*, 2026.

[10] J. L. Simons y B. de Weger, *Theoretical and computational bounds for* m*-cycles of the* $3n+1$ *problem*, Acta Arith. **117** (2005), 51–70.