Ciclos de Collatz con exactamente dos bloques de exponentes unitarios

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

Para la aplicación impar $F(u) = (3u+1)/2^{\nu_2(3u+1)}$, se demuestra que ningún ciclo no trivial tiene sus exponentes iguales a 1 formando exactamente dos bloques cíclicos máximos. La demostración combina tres ingredientes: la cota del escrito anterior, que obliga a que uno de los dos bloques sea corto; una cota superior del acarreo cuando el ciclo se empieza en el bloque largo, en la que el bloque corto solo interviene mediante un factor $(3/2)^{s_2+1}$; y la cota inferior de $|\sigma \ln 2 - n \ln 3|$ que se deduce del trabajo de Ellison. Las desigualdades resultantes son incompatibles para $n \geq 54$, y los ciclos con $n \leq 53$ están excluidos por el teorema de Hercher. En el lenguaje de Simons y de Weger, el resultado se refiere a los ciclos con exactamente dos subidas de más de un paso impar, con cualquier número de mínimos locales.

1. Introducción

Este escrito continúa la serie formada por *Memorias binarias, acarreos y cierre de ciclos* [10], *Ciclos de Collatz con un único bloque de exponentes unitarios* [1] y *Bloques de exponentes unitarios en los ciclos de Collatz* [2], cuya notación seguimos. Para un entero impar positivo u, $\ell(u) = \nu_2(3u+1)$ y $F(u) = (3u+1)/2^{\ell(u)}$. Para un ciclo de F con n términos y suma de exponentes σ, escribimos

$$L = \log_2 3, \qquad \Lambda = \sigma \ln 2 - n \ln 3 > 0, \qquad \delta = 2^\sigma - 3^n = 2^\sigma\big(1 - e^{-\Lambda}\big).$$

En un ciclo no trivial, los exponentes iguales a 1 forman $r \geq 1$ bloques cíclicos máximos. El caso $r = 1$ está excluido [1]. El resultado de este escrito es:

Teorema 1.1. *Ningún ciclo no trivial de F tiene sus exponentes iguales a 1 formando exactamente dos bloques cíclicos máximos.*

En términos de la aplicación $H(n) = n/2$ para n par y $H(n) = (3n+1)/2$ para n impar, un ciclo así tendría exactamente dos subidas de más de un paso impar, y todas las demás subidas serían de un solo paso.

2. Resultados que se utilizan

Para un ciclo no trivial con r bloques de unos de longitudes $s_1, \ldots, s_r$, ponemos $A = \sum_i 2^{-s_i}$ y $N_1 = \sum_i s_i$.

Proposición 2.1 ([2])**.** *Para todo ciclo no trivial de F:*

1. *el inicio v de un bloque de unos de longitud s cumple $v \geq 2^{s+1} - 1$;*
2. *$\Lambda < \frac{5}{3}A$;*
3. *$\min_i s_i < \dfrac{L}{20 \ln 2}\, n + \log_2 r + \log_2 \dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{20(\ln 2)^2}$;*
4. *el ciclo tiene $n \geq 92$ términos impares.*

La primera parte es el Lema 3.1 de [1] (Lema 8 de [6]); la segunda y la tercera son el Lema 3.1 y el Teorema 1.1 de [2]; la cuarta se deduce del teorema de Hercher [6], $m \geq 92$, porque cada mínimo local de un ciclo de H es un término impar distinto.

Teorema 2.2 (consecuencia de Ellison [5]; véase [2])**.** *Para todos los enteros positivos x, y con $x > 84$, se tiene $|x \ln 2 - y \ln 3| \geq e^{-x/20}$.*

3. El acarreo empezando en el bloque largo

Fijamos un ciclo no trivial con exactamente dos bloques de unos, de longitudes $s_1 \geq s_2 \geq 1$, y lo empezamos en el inicio v_1 del bloque largo. Su perfil es

$$(1^{s_1}, \beta_1, \ldots, \beta_{\tau_1}, 1^{s_2}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{\tau_2}), \qquad \beta_i, \gamma_i \geq 2, \quad \tau_1, \tau_2 \geq 1,$$

con $n = s_1 + \tau_1 + s_2 + \tau_2$. Por el criterio de cierre [10], $v_1 = c/\delta$, donde $c = \sum_{j=0}^{n-1} 3^{n-1-j} 2^{D_j}$ y D_j es la suma de los j primeros exponentes.

Lema 3.1. *Se tiene*

$$c < 3^n + 2^\sigma \Big(1 + \big(\tfrac{3}{2}\big)^{s_2+1}\Big).$$

Demostración. Para cada j, sea $R_j = \sigma - D_j$ la suma de los exponentes desde la posición j hasta el final, de modo que el término j de c es $3^{n-1-j} 2^{\sigma - R_j}$. Separamos las cuatro partes del perfil.

Primer bloque de unos ($0 \leq j < s_1$). Aquí $D_j = j$, y

$$\sum_{j=0}^{s_1-1} 3^{n-1-j} 2^j = 3^{n-s_1}\big(3^{s_1} - 2^{s_1}\big) < 3^n.$$

Primera bajada ($j = s_1 + i$, $0 \leq i < \tau_1$). Quedan $\tau_1 - i$ exponentes β, los s_2 unos y los τ_2 exponentes γ, luego $R_j \geq 2(\tau_1 - i) + s_2 + 2\tau_2$, mientras que $n - 1 - j = (\tau_1 - 1 - i) + s_2 + \tau_2$. Con $k = \tau_1 - i$, el término es a lo sumo

$$2^\sigma \Big(\frac{3}{2}\Big)^{s_2} \Big(\frac{3}{4}\Big)^{\tau_2} \frac{3^{k-1}}{4^k}, \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{\tau_1} \frac{3^{k-1}}{4^k} = 1 - \Big(\frac{3}{4}\Big)^{\tau_1} < 1.$$

La primera bajada aporta, pues, menos de $\frac{3}{4}\big(\frac{3}{2}\big)^{s_2} 2^\sigma$.

Segundo bloque de unos ($j = s_1 + \tau_1 + k$, $0 \le k < s_2$). Quedan $s_2 - k$ unos y los τ_2 exponentes γ, luego $R_j \ge (s_2 - k) + 2\tau_2$, y $n - 1 - j = (s_2 - 1 - k) + \tau_2$. La suma de estos términos es a lo sumo

$$2^\sigma \Big(\frac{3}{4}\Big)^{\tau_2} \sum_{k=0}^{s_2-1} \frac{3^{s_2-1-k}}{2^{s_2-k}} = 2^\sigma \Big(\frac{3}{4}\Big)^{\tau_2} \Big(\big(\tfrac{3}{2}\big)^{s_2} - 1\Big) < \frac{3}{4}\Big(\frac{3}{2}\Big)^{s_2} 2^\sigma.$$

Segunda bajada ($j = s_1 + \tau_1 + s_2 + i$, $0 \le i < \tau_2$). Aquí $R_j \ge 2(\tau_2 - i)$ y $n - 1 - j = \tau_2 - 1 - i$; como en la primera bajada, la suma es menor que 2^σ.

Sumando las cuatro partes, $c < 3^n + 2^\sigma + \frac{3}{2}\big(\frac{3}{2}\big)^{s_2} 2^\sigma$. □

4. Demostración del teorema principal

Supongamos que existe un ciclo no trivial con exactamente dos bloques de unos, de longitudes $s_1 \ge s_2 \ge 1$. Por la Proposición 2.1, $n \ge 92$.

Paso 1: el caso $\sigma \le 84$ no se da. De $2^\sigma > 3^n$ se seguiría $n < 84/L < 53$, en contradicción con $n \ge 92$. Por tanto $\sigma > 84$.

Paso 2: cotas para σ y N_1. Como $s_1 \ge s_2 \ge 1$, se tiene $A = 2^{-s_1} + 2^{-s_2} \le 1$, y por la Proposición 2.1, $\Lambda < 5/3$. Con $C = 5/(3\ln 2) = 2{,}4044\ldots$,

$$\sigma < nL + C. \tag{1}$$

Como los exponentes distintos de 1 son al menos 2, $\sigma \ge 2n - N_1$, y por tanto

$$s_1 = N_1 - s_2 > (2 - L)\, n - C - s_2. \tag{2}$$

Paso 3: cota del bloque corto. Por la Proposición 2.1 con $r = 2$,

$$s_2 < c_1 n + k_3, \tag{3}$$

con $c_1 = L/(20\ln 2) = 0{,}11433\ldots$ y $k_3 = 1 + \log_2(5/3) + 1/(20(\ln 2)^2) = 1{,}8410\ldots$

Paso 4: cotas para v_1. Por la Proposición 2.1, $v_1 \ge 2^{s_1+1} - 1$. Por otra parte, el Teorema 2.2 da $\Lambda \ge x$, con $x = e^{-\sigma/20} < e^{-4{,}2} < 0{,}015$. Como $1 - e^{-t}$ es creciente y $1 - e^{-x} \ge x/(1+x)$ (equivalente a $e^x \ge 1 + x$),

$$\frac{\delta}{2^\sigma} = 1 - e^{-\Lambda} \ge 1 - e^{-x} \ge \frac{x}{1+x} > \frac{e^{-\sigma/20}}{1{,}015}.$$

Con el Lema 3.1 y $3^n < 2^\sigma$,

$$v_1 = \frac{c}{\delta} < \frac{2 + (3/2)^{s_2+1}}{1 - e^{-\Lambda}} < 1{,}015\Big(2 + \big(\tfrac{3}{2}\big)^{s_2+1}\Big) e^{\sigma/20}.$$

Paso 5: logaritmos. Como $s_1 + 1 \ge 2$, se tiene $\ln(2^{s_1+1} - 1) \ge (s_1 + 1)\ln 2 - \ln\frac{4}{3}$. Como $(3/2)^{s_2+1} \ge \frac{9}{4}$, se tiene $2 + (3/2)^{s_2+1} \le \frac{17}{9}(3/2)^{s_2+1}$. Las cotas del paso 4 dan, por tanto,

$$(s_1 + 1)\ln 2 - \ln\tfrac{4}{3} < \ln 1{,}015 + \ln\tfrac{17}{9} + (s_2 + 1)\ln\tfrac{3}{2} + \frac{\sigma}{20}.$$

Sustituyendo (2) a la izquierda y (1) a la derecha, y usando $\ln 2 + \ln\frac{3}{2} = \ln 3$, resulta

$$a\, n < s_2 \ln 3 + K_0, \tag{4}$$

con

$$a = (2-L)\ln 2 - \frac{L}{20}, \qquad K_0 = (C-1)\ln 2 + \ln\tfrac{4}{3} + \ln 1{,}015 + \ln\tfrac{17}{9} + \ln\tfrac{3}{2} + \frac{C}{20}.$$

Numéricamente, $a = 0{,}20843\ldots$ y $K_0 = 2{,}43777\ldots$

Paso 6: contradicción. Por (3), $s_2 \ln 3 < c_1 \ln 3 \cdot n + k_3 \ln 3$, y (4) da

$$(a - c_1 \ln 3)\, n < K_0 + k_3 \ln 3.$$

Como $a - c_1 \ln 3 > 0{,}08282$ y $K_0 + k_3 \ln 3 < 4{,}46036$, y $54 \cdot 0{,}08282 = 4{,}47228 > 4{,}46036$, esto exige $n < 54$, en contradicción con $n \geq 92$. Esto demuestra el Teorema 1.1. □

Observación 4.1. La demostración no necesita separar el caso $s_2 = 1$: la cota $A \leq 1$ del paso 2 vale en todos los casos. El papel del escrito anterior [2] es acotar s_2 linealmente con una pendiente pequeña; el del Lema 3.1, que el bloque corto solo intervenga en el acarreo mediante el factor $(3/2)^{s_2+1}$; y el del bloque largo, forzar un inicio v_1 de tamaño 2^{s_1}, con s_1 del orden de $(2-L)\,n$.

Observación 4.2 (alcance). El argumento no se extiende directamente a tres o más bloques. Con $r \geq 3$, la cota del acarreo pasa a depender de las longitudes de los demás bloques, y controlar únicamente el más corto, que es lo que proporciona el escrito anterior, ya no controla esas contribuciones.

5. Relación con resultados conocidos

Un ciclo de H con m mínimos locales es un *m-ciclo* en el sentido de Simons y de Weger [11]. Los ciclos del Teorema 1.1 son m-ciclos con exactamente dos subidas de más de un paso impar y $m-2$ subidas de un solo paso, con m arbitrario. Hercher [6] demostró que no hay m-ciclos con $m \leq 91$, de modo que el teorema está contenido en ese resultado para $m \leq 91$; el Teorema 1.1 impone la forma del perfil y no limita m. Brox [3] demostró que solo hay un número finito de ciclos con menos de $2\log|C|$ descensos, donde $|C|$ es el número de términos impares; el número de descensos coincide con el número m de mínimos locales. Luca [7] demostró que existe una constante absoluta C_1 tal que todo ciclo no trivial tiene al menos $C_1 \log\sigma$ bloques máximos de exponentes iguales a 1, que él llama subidas; en consecuencia, solo puede haber un número finito de ciclos con exactamente dos bloques, y el Teorema 1.1 muestra que no hay ninguno. Mimuro [8] había demostrado la finitud para los perfiles $(1^i, (j+1)^k)$, que tienen un único bloque. La demostración utiliza el resultado de Hercher para acotar inferiormente n, así como las técnicas de [6, 4] recogidas en [2] y la cota de Ellison [5].

El Corolario 5.1 de [9] obtiene este teorema como caso particular de un enunciado general sobre el bloque más largo de exponentes iguales a 1.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Ciclos de Collatz con un único bloque de exponentes unitarios*, 2026.

[2] M. Cerdá Bennassar, *Bloques de exponentes unitarios en los ciclos de Collatz: todo ciclo no trivial tiene un bloque corto*, 2026.

[3] T. Brox, *Collatz cycles with few descents*, Acta Arith. **92** (2000), 181–188.

[4] S. Eliahou, *The $3x+1$ problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths*, Discrete Math. **118** (1993), 45–56.

[5] W. J. Ellison, *On a theorem of S. Sivasankaranarayana Pillai*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1970–1971), exp. n.º 10, 1–10. https://www.numdam.org/item/STNB_1970-1971____A10_0/

[6] C. Hercher, *There are no Collatz m-cycles with $m \leq 91$*, J. Integer Seq. **26** (2023), art. 23.3.5.

[7] F. Luca, *On the nontrivial cycles in Collatz's problem*, SUT J. Math. **41** (2005), n.º 1, 31–41.

[8] T. Mimuro, *On certain simple cycles of the Collatz conjecture*, SUT J. Math. **37** (2001), n.º 2, 79–89.

[9] M. Cerdá Bennassar, *El bloque más largo de exponentes unitarios en los ciclos de Collatz*, 2026.

[10] M. Cerdá Bennassar, *Memorias binarias, acarreos y cierre de ciclos*, 2026.

[11] J. L. Simons y B. de Weger, *Theoretical and computational bounds for m-cycles of the $3n+1$ problem*, Acta Arith. **117** (2005), 51–70.