Los ciclos no triviales del problema $3x+1$ tienen al menos cuatro bloques de exponentes unitarios

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

Para la aplicación de Collatz acelerada sobre los impares positivos, $F(u) = (3u+1)/2^{\nu_2(3u+1)}$, consideramos un ciclo no trivial con n términos y exponentes $\ell_j = \nu_2(3u_j+1)$, y ponemos $\sigma = \sum_{j=0}^{n-1} \ell_j$. Los exponentes iguales a 1 forman $r \geq 1$ bloques cíclicos máximos, de longitudes $s_1, \ldots, s_r$; para la aplicación $H(n) = n/2$ si n es par y $H(n) = (3n+1)/2$ si n es impar, corresponden a las subidas máximas formadas por al menos dos pasos impares consecutivos. Se demuestra que $r \geq 4$: ningún ciclo no trivial tiene uno, dos o tres de esos bloques, sean cuales sean sus longitudes y sin restringir el número de mínimos locales. El argumento combina una cota superior del acarreo de la ecuación de cierre del ciclo, en la que la contribución de los demás bloques se acota en función de $(3/2)^O$, donde O es el número de exponentes iguales a 1 fuera del bloque inicial, con la cota inferior $|\sigma \ln 2 - n \ln 3| \geq e^{-\sigma/1000}$. Esta se obtiene a partir de la cota de Eliahou para la longitud de un ciclo no trivial, de un cálculo con el desarrollo en fracción continua de $\log 2/\log 3$ certificado con aritmética racional exacta y del teorema de Matveev. Como resultados intermedios se obtiene que cada bloque cumple $s_i < 0{,}3691\, N_1 + 0{,}00092\, \sigma + 1{,}73$, donde N_1 es el total de exponentes iguales a 1, y una cota superior para la longitud del bloque más corto. El problema general de los ciclos sigue abierto.

1. Introducción

Para un entero impar positivo u, escribimos

$$\ell(u) = \nu_2(3u+1), \qquad F(u) = \frac{3u+1}{2^{\ell(u)}}.$$

Un *ciclo* de F es una sucesión de enteros impares positivos $u_0, \ldots, u_{n-1}$ con $u_{j+1} = F(u_j)$ e índices módulo n; su *perfil* es la sucesión de exponentes $\ell_j = \ell(u_j)$, definida salvo rotación, y escribimos $\sigma = \ell_0 + \cdots + \ell_{n-1}$. El ciclo trivial es el punto fijo $F(1) = 1$. Los ciclos de F corresponden a los de la aplicación $H(n) = n/2$ para n par y $H(n) = (3n+1)/2$ para n impar: los términos de un ciclo de F son los términos impares de un ciclo de H.

En un ciclo no trivial hay exponentes iguales a 1 y exponentes mayores o iguales que 2 (Lema 2.2). Los exponentes iguales a 1 forman $r \geq 1$ *bloques* cíclicos máximos, de longitudes $s_1, \ldots, s_r$, y escribimos $N_1 = s_1 + \cdots + s_r$. En la órbita de H, un bloque de longitud s es una subida de $s+1$ pasos impares consecutivos; los demás pasos impares son subidas de un solo paso. Así, r es el número de subidas de más de un paso impar, y $r \leq m$, donde m es el número de mínimos locales del ciclo.

El resultado principal es el siguiente.

Teorema 1.1. *Todo ciclo no trivial de F tiene al menos cuatro bloques cíclicos máximos de exponentes iguales a* 1.

Se apoya en dos resultados intermedios.

Teorema 1.2. *En todo ciclo no trivial de F, cada bloque de exponentes iguales a* 1 *cumple*

$$s_i \ln 3 < N_1 \ln \tfrac{3}{2} + \frac{\sigma}{1000} + \ln \tfrac{20}{3}, \qquad \text{y por tanto} \qquad s_i < 0{,}3691\, N_1 + 0{,}00092\, \sigma + 1{,}73.$$

Teorema 1.3. *En todo ciclo no trivial de F con r bloques,*

$$\min_i s_i < \log_2 \frac{5r}{3} + \frac{\sigma}{1000 \ln 2}.$$

El Teorema 1.2 acota la longitud de cada bloque por la fracción $\ln \tfrac{3}{2} / \ln 3 = 0{,}369\ldots$ del total N_1, más términos de error explícitos; el Teorema 1.3 dice que algún bloque es muy corto frente a σ. Con tres bloques o menos, ambas condiciones son incompatibles.

Relación con resultados conocidos

Steiner [15] excluyó los ciclos con una sola subida y una sola bajada (los *circuitos*); Simons [13] excluyó los ciclos con dos mínimos locales, y Simons y de Weger [14] y Hercher [7] todos los ciclos con $m \le 68$ y $m \le 91$ mínimos locales, respectivamente. Rozier [12] demostró que, agrupando los términos de un ciclo de la aplicación $3x+1$ en bloques de igual paridad, para cada k solo hay un número finito de ciclos con a lo sumo k bloques; Brox [3], la finitud de los ciclos con pocos descensos. Luca [9] demostró (su Teorema 2.1) que existe una constante absoluta C_1 tal que todo ciclo no trivial tiene al menos $C_1 \log \sigma$ bloques de exponentes iguales a 1, y dedujo (su Corolario 2.2) que para cada r fijo solo hay un número finito de ciclos con r bloques; Mimuro [11] lo había demostrado antes para los perfiles $(1^i, (j+1)^k)$, y excluyó algunos casos particulares. El Teorema 1.1 se refiere a los ciclos con $r \le 3$, sin restringir m.

La demostración utiliza la cota de Eliahou para la longitud de un ciclo no trivial (Teorema 5.1), que descansa en la verificación computacional de la conjetura hasta una cota finita, y el teorema de Matveev (Teorema 5.2). Las técnicas de las secciones 2 y 4 siguen a Böhm y Sontacchi [2], Eliahou [5] y Hercher [7].

2. Preliminares

Fijamos un ciclo no trivial $u_0, \ldots, u_{n-1}$ de F, con perfil $(\ell_0, \ldots, \ell_{n-1})$, y ponemos $D_0 = 0$ y $D_j = \ell_0 + \cdots + \ell_{j-1}$, de modo que $D_n = \sigma$. Escribimos

$$L = \log_2 3, \qquad \delta = 2^\sigma - 3^n, \qquad c = \sum_{j=0}^{n-1} 3^{n-1-j} 2^{D_j}.$$

Llamamos a c el *acarreo* asociado al perfil.

Proposición 2.1 (ecuación de cierre; Böhm y Sontacchi [2])**.** *Se tiene $\delta\, u_0 = c$. En particular, $\delta > 0$, es decir, $2^\sigma > 3^n$ y $\sigma > nL$.*

Demostración. De $2^{\ell_j} u_{j+1} = 3u_j + 1$ se sigue $2^{D_{j+1}} u_{j+1} = 3 \cdot 2^{D_j} u_j + 2^{D_j}$. Multiplicando por 3^{n-1-j} y sumando para $0 \le j < n$, los términos se cancelan en cadena y queda $2^\sigma u_n = 3^n u_0 + c$. Como $u_n = u_0$, se obtiene la identidad; y como $c > 0$, también $\delta > 0$. □

Como la identidad vale empezando en cualquier término del ciclo, cada término u_k es el cociente entre el acarreo del perfil rotado para empezar en u_k y el mismo δ.

Lema 2.2. *Todos los términos del ciclo son al menos* 3*; el perfil contiene exponentes iguales a* 1 *y exponentes mayores o iguales que* 2*; y* $\sigma \ge 2n - N_1$.

Demostración. El único ciclo que contiene al 1 es el trivial. Si $\ell(u) \ge 2$ y $u \ge 3$, entonces $F(u) \le (3u+1)/4 < u$, de modo que un ciclo sin exponentes iguales a 1 sería estrictamente decreciente; si $\ell(u) = 1$, entonces $F(u) = (3u+1)/2 > u$, de modo que un ciclo sin exponentes mayores que 1 sería estrictamente creciente. La última desigualdad se sigue de que los $n - N_1$ exponentes distintos de 1 son al menos 2. □

Lema 2.3 (identidad del producto)**.** *Con* $\Lambda = \sigma \ln 2 - n \ln 3 > 0$*,*

$$\Lambda = \sum_{j=0}^{n-1} \ln\Big(1 + \frac{1}{3u_j}\Big) < \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{u_j}.$$

Además, $\delta = 2^\sigma \big(1 - e^{-\Lambda}\big)$.

Demostración. Cada paso cumple $u_{j+1}/u_j = (3/2^{\ell_j})(1 + 1/(3u_j))$, y el producto de los cocientes alrededor del ciclo vale 1. La desigualdad se sigue de $\ln(1+x) < x$ para $x > 0$. La identidad es, en esencia, la que usan Eliahou [5] y Hercher [7]. □

Lema 2.4 (inicio de un bloque)**.** *Si* v *es el primer término de un bloque de longitud* s*, entonces* $2^{s+1} \mid v+1$*; en particular,* $v \ge 2^{s+1} - 1 \ge \frac{3}{2}\, 2^s$ *y* $v - 1 \ge 2^s$.

Demostración. Para un impar w, $\ell(w) = 1$ si y solo si $\nu_2(w+1) \ge 2$, y en ese caso $F(w) + 1 = \frac{3}{2}(w+1)$, luego $\nu_2(F(w)+1) = \nu_2(w+1) - 1$. Como los s primeros exponentes a partir de v valen 1, se tiene $\nu_2(v+1) - (s-1) \ge 2$. Las dos últimas desigualdades equivalen a $2^s \ge 2$, que se cumple porque $s \ge 1$. El resultado aparece como Lema 8 en [7]. □

3. Una cota del acarreo

Lema 3.1. *Empecemos el ciclo en el primer término de un bloque de longitud* s*, y sea* $O = N_1 - s$ *el número de exponentes iguales a* 1 *fuera de ese bloque. Entonces*

$$c < 3^n + 4\Big(\frac{3}{2}\Big)^O 2^\sigma.$$

Demostración. Los s primeros términos de c suman $\sum_{j<s} 3^{n-1-j} 2^j = 3^{n-s}(3^s - 2^s) < 3^n$. Para $j \ge s$, sean o_j y d_j el número de exponentes iguales a 1 y mayores o iguales que 2, respectivamente, entre las posiciones $j, \dots, n-1$. Como $\sigma - D_j \ge o_j + 2d_j$ y $n-1-j = o_j + d_j - 1$,

$$3^{n-1-j} 2^{D_j} \le \frac{2^\sigma}{3} \Big(\frac{3}{2}\Big)^{o_j} \Big(\frac{3}{4}\Big)^{d_j}.$$

El perfil termina con un exponente mayor o igual que 2, porque el bloque inicial es máximo; así, $d_j \geq 1$ para todo $j \geq s$, y además $o_j \leq O$. Hay $n-s-O$ posiciones con exponente mayor o igual que 2, y para cada $1 \leq d \leq n-s-O$ hay exactamente una de ellas con $d_j = d$, que contribuye a lo sumo $\frac{2^\sigma}{3}(\frac{3}{2})^O(\frac{3}{4})^d$; las posiciones con exponente 1 y $d_j = d$ forman un tramo en el que o_j toma valores consecutivos menores o iguales que O, y contribuyen menos de $\frac{2^\sigma}{3}(\frac{3}{4})^d(\frac{3}{2})^O \sum_{k\geq 0}(\frac{2}{3})^k = 2^\sigma(\frac{3}{4})^d(\frac{3}{2})^O$. Sumando sobre $1 \leq d \leq n-s-O$ y extendiendo la suma a todos los $d \geq 1$,

$$\sum_{j\geq s} 3^{n-1-j}2^{D_j} < \frac{4}{3}\Big(\frac{3}{2}\Big)^O 2^\sigma \sum_{d\geq 1}\Big(\frac{3}{4}\Big)^d = 4\Big(\frac{3}{2}\Big)^O 2^\sigma. \qquad \square$$

4. Una cota de la suma de los inversos

Numeramos los bloques cíclicamente, $i = 1, \ldots, r$, y llamamos v_i al primer término del bloque i. Entre el bloque i y el bloque $i+1$ (con $v_{r+1} = v_1$) hay una *bajada* no vacía de términos con exponente mayor o igual que 2. Cada término del ciclo pertenece a exactamente un bloque o a exactamente una bajada.

Lema 4.1. *La suma de los inversos de los términos del bloque i es menor que $3/v_i$.*

Demostración. Los términos son $w_0 = v_i$ y $w_{k+1} = (3w_k + 1)/2 > \frac{3}{2}w_k$, de modo que $\sum_k 1/w_k < \frac{1}{v_i}\sum_{k\geq 0}(\frac{2}{3})^k = \frac{3}{v_i}$. Es la Observación 7 de [7]. $\square$

Lema 4.2. *La suma de los inversos de los términos de la bajada que precede a v_{i+1} es menor que $3/(v_{i+1}-1)$.*

Demostración. Sean $x_1, \ldots, x_\tau$ esos términos y $x_{\tau+1} = v_{i+1}$. Como $\ell(x_k) \geq 2$, $x_{k+1} \leq (3x_k + 1)/4$, es decir, $x_k - 1 \geq \frac{4}{3}(x_{k+1} - 1)$. Por inducción, $x_{\tau+1-j} - 1 \geq (\frac{4}{3})^j(v_{i+1} - 1)$ para $1 \leq j \leq \tau$, y como $x_k > x_k - 1 > 0$, la suma es menor que $\frac{1}{v_{i+1}-1}\sum_{j\geq 1}(\frac{3}{4})^j = \frac{3}{v_{i+1}-1}$. $\square$

Proposición 4.3. *Con $A = \sum_{i=1}^r 2^{-s_i}$, se tiene $\sum_j 1/u_j < 5A$, y por tanto $\Lambda < \frac{5}{3}A$.*

Demostración. Por los Lemas 4.1 y 4.2, reindexando cíclicamente las bajadas, $\sum_j 1/u_j < \sum_i (3/v_i + 3/(v_i - 1))$. Por el Lema 2.4, $3/v_i \leq 2 \cdot 2^{-s_i}$ y $3/(v_i - 1) \leq 3 \cdot 2^{-s_i}$. La segunda afirmación es el Lema 2.3. $\square$

5. Una cota diofántica

Teorema 5.1 (Eliahou [5])**.** *Todo ciclo no trivial de la aplicación H cuyo menor elemento sea mayor que 2^{40} tiene al menos 17 087 915 elementos.*

Barina [1] verificó por ordenador que toda órbita que empieza por debajo de 2^{71} alcanza el 1, de modo que todo ciclo no trivial tiene su menor elemento por encima de $2^{71} > 2^{40}$ y cumple la hipótesis. En un ciclo de H, cada término impar u_j del ciclo de F va seguido de $\ell_j - 1$ términos pares, de modo que el ciclo de H tiene exactamente σ elementos. Por tanto, $\sigma \geq 17\,087\,915$ para todo ciclo no trivial de F.

Teorema 5.2 (Matveev [10]). *Sean α_1, α_2 números racionales positivos y b_1, b_2 enteros con $\alpha_1^{b_1}\alpha_2^{b_2} \neq 1$. Sean $\log A_i \geq \max\{h(\alpha_i), |\log \alpha_i|, 0{,}16\}$, donde h es la altura logarítmica, y $B \geq \max\{|b_1|, |b_2|\}$. Entonces*

$$\log|\alpha_1^{b_1}\alpha_2^{b_2} - 1| > -1{,}4 \cdot 30^5 \cdot 2^{4,5} \log A_1 \log A_2 (1 + \log B).$$

Para $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = 2$ se puede tomar $\log A_1 = \ln 3$ y $\log A_2 = \ln 2$, y la constante es $K = 1{,}4 \cdot 30^5 \cdot 2^{4,5} \ln 2 \ln 3 = 586\,191\,077{,}07\ldots$

Teorema 5.3. *Para todo ciclo no trivial de F se tiene $\Lambda \geq e^{-\sigma/1000}$.*

Demostración. Por el Teorema 5.1, $\sigma \geq 17\,087\,915$, de modo que $e^{-\sigma/1000} < e^{-17\,000}$. Sea $\theta = \log 2/\log 3$; entonces $\Lambda = \ln 3 \cdot |\sigma\theta - n| \geq \ln 3 \cdot \|\sigma\theta\|$, donde $\|\cdot\|$ es la distancia al entero más próximo. Sea $\sigma_0 = 1{,}85 \cdot 10^{13}$.

Caso $\sigma \leq \sigma_0$. Entre las reducidas p_k/q_k de θ están las de denominadores

$$q_K = 18\,340\,740\,190\,704 \leq \sigma_0 < q_{K+1} = 83\,130\,157\,078\,217$$

(Observación 5.4). Para todo entero $0 < q < q_{K+1}$ se tiene $\|q\theta\| \geq \|q_K\theta\| > 1/(q_K + q_{K+1})$ [8]. Por tanto, $\Lambda \geq \ln 3/(q_K + q_{K+1}) > 1{,}08 \cdot 10^{-14} > e^{-33} > e^{-\sigma/1000}$.

Caso $\sigma > \sigma_0$. El número $\Lambda' = 3^n 2^{-\sigma} - 1$ está en $(-1, 0)$ y $|\Lambda'| = 1 - e^{-\Lambda} < \Lambda$. El Teorema 5.2, con $b_1 = n$, $b_2 = -\sigma$ y $B = \sigma \geq \max\{n, \sigma\}$, da $\Lambda > \exp(-K(1 + \ln \sigma))$. La función $\sigma/(1 + \ln \sigma)$ es creciente para $\sigma > 1$, y $K(1 + \ln \sigma_0) < 1{,}8494 \cdot 10^{10} < \sigma_0/1000$ (Observación 5.4); luego $K(1 + \ln \sigma) \leq \sigma/1000$ para todo $\sigma \geq \sigma_0$. □

Observación 5.4 (certificado del cálculo). Los datos numéricos de la demostración anterior se han obtenido con aritmética racional exacta. Para $\ln 2$ y $\ln 3$ se usan los intervalos racionales que da la serie

$$\ln \frac{1+z}{1-z} = 2\sum_{j\geq 0} \frac{z^{2j+1}}{2j+1}, \qquad 0 < \ln \frac{1+z}{1-z} - 2\sum_{j=0}^{N-1} \frac{z^{2j+1}}{2j+1} < \frac{2z^{2N+1}}{(2N+1)(1-z^2)},$$

con $z = 1/3$ para $\ln 2$, $z = 1/2$ para $\ln 3$ y $N = 128$. De ellos se obtiene un intervalo racional que contiene a θ. Los desarrollos en fracción continua de sus dos extremos coinciden en los 59 primeros cocientes parciales,

$$\theta = [0; 1, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, 1, 55, 1, 4, 3, 1, 1, 15, 1, 9, 2, 5, 7, 1, 1, 4, 8, \ldots],$$

y como el conjunto de los números reales con un desarrollo que empieza de una forma dada es un intervalo, esos cocientes son los de θ; entre las reducidas correspondientes están las de denominadores q_K y q_{K+1}. Con cotas racionales inferiores y superiores de los logaritmos, y una cota superior racional de $\sqrt{2}$, se comprueban las desigualdades $\ln 3/(q_K + q_{K+1}) > 1{,}08 \cdot 10^{-14}$ y $K(1 + \ln \sigma_0) < 1{,}8494 \cdot 10^{10} < \sigma_0/1000$. El código figura en el Apéndice A.

6. Demostraciones de los teoremas principales

Demostración del Teorema 1.2. Empezamos el ciclo en el primer término v_i del bloque i. Por la Proposición 2.1 y el Lema 3.1, con $y = (3/2)^{N_1 - s_i} \geq 1$ y $3^n < 2^\sigma$,

$$v_i = \frac{c}{\delta} < \frac{(1+4y)\,2^\sigma}{\delta} \leq \frac{5y}{1 - e^{-\Lambda}}.$$

Por el Teorema 5.3, $\Lambda \geq x$ con $x = e^{-\sigma/1000} < 1$, y como $1 - e^{-t}$ es creciente y $1 - e^{-x} \geq x/(1+x) > x/2$, se obtiene $v_i < 10\, y\, e^{\sigma/1000}$. Por el Lema 2.4, $v_i \geq \frac{3}{2}\, 2^{s_i}$. Comparando,

$$s_i \ln 2 + s_i \ln \tfrac{3}{2} < N_1 \ln \tfrac{3}{2} + \frac{\sigma}{1000} + \ln \tfrac{20}{3},$$

que es la desigualdad del enunciado, pues $\ln 2 + \ln \frac{3}{2} = \ln 3$. La forma numérica se sigue de $\ln \frac{3}{2} / \ln 3 = 0{,}36907\ldots$, $1/(1000 \ln 3) = 0{,}000910\ldots$ y $\ln \frac{20}{3} / \ln 3 = 1{,}7268\ldots$ □

Demostración del Teorema 1.3. Por el Teorema 5.3 y la Proposición 4.3, $e^{-\sigma/1000} \leq \Lambda < \frac{5}{3} A \leq \frac{5r}{3}\, 2^{-\min_i s_i}$. □

Demostración del Teorema 1.1. Por la Proposición 4.3, $\Lambda < \frac{5}{3} A \leq \frac{5r}{6}$, de modo que $\sigma < nL + C_r$ con $C_r = 5r/(6 \ln 2)$, y por el Lema 2.2, $N_1 > (2 - L)n - C_r$.

Uno o dos bloques. Si $r \leq 2$, el bloque más largo cumple $s_{\max} \geq N_1/2$, y el Teorema 1.2 da $N_1(\frac{1}{2} \ln 3 - \ln \frac{3}{2}) < \sigma/1000 + \ln \frac{20}{3}$, con $\frac{1}{2} \ln 3 - \ln \frac{3}{2} = 0{,}14384\ldots$ Sustituyendo las cotas de N_1 y σ con $C_2 = 5/(3 \ln 2) = 2{,}4045\ldots$,

$$\Big(0{,}14384\,(2 - L) - \tfrac{L}{1000}\Big) n < 0{,}14385\, C_2 + \tfrac{C_2}{1000} + \ln \tfrac{20}{3},$$

es decir, $0{,}05811\, n < 2{,}2455$, que exige $n < 39$. Pero por el Teorema 5.1, $n > (\sigma - C_2)/L > 10^7$, una contradicción.

Tres bloques. Sean $s_{\min} \leq s_{\text{med}} \leq s_{\max}$ las longitudes. Aplicando el Teorema 1.2 a los dos bloques mayores y escribiendo $\gamma = 1 - 2 \ln \frac{3}{2} / \ln 3 = \ln \frac{4}{3} / \ln 3 = 0{,}26185\ldots$,

$$s_{\min} = N_1 - s_{\text{med}} - s_{\max} > \gamma N_1 - \frac{2}{\ln 3} \Big(\frac{\sigma}{1000} + \ln \tfrac{20}{3} \Big).$$

Por el Teorema 1.3 con $r = 3$, $s_{\min} < \log_2 5 + \sigma/(1000 \ln 2)$. Con $C_3 = 5/(2 \ln 2) = 3{,}6067\ldots$ y las cotas de N_1 y σ,

$$(\gamma(2 - L) - \kappa L) n < \gamma C_3 + \log_2 5 + \frac{2}{\ln 3} \ln \tfrac{20}{3} + \kappa C_3, \qquad \kappa = \frac{1}{1000 \ln 2} + \frac{2}{1000 \ln 3}.$$

El coeficiente de la izquierda es mayor que 0,1035 y el lado derecho es menor que 6,732, lo que exige $n < 66$, en contradicción con $n > (\sigma - C_3)/L > 10^7$. □

7. Comentarios

Comentario 7.1 (cuatro o más bloques). Con cuatro o más bloques, la suma de las cotas individuales del Teorema 1.2 supera el total N_1, y las estimaciones anteriores no producen ninguna contradicción.

Comentario 7.2 (el bloque más largo). Aplicado al bloque más largo, el Teorema 1.2 da que los demás bloques suman $N_1 - s_{\max} > \frac{\ln 2}{\ln 3} N_1 - \frac{1}{\ln 3}(\frac{\sigma}{1000} + \ln \frac{20}{3})$, con $\ln 2 / \ln 3 = 0{,}6309\ldots$: el bloque más largo no puede concentrar la mayor parte de los exponentes iguales a 1.

Comentario 7.3 (sobre la dependencia del Teorema 5.1). El Teorema 5.1 se usa solo en dos puntos: en el Teorema 5.3, donde basta con $\sigma > 33\,000$ para que $e^{-33} > e^{-\sigma/1000}$, y en la demostración del Teorema 1.1, para descartar los tamaños $n < 66$. Cualquier cota inferior de la longitud de los ciclos de ese orden serviría igual. Sin ella, la cota de Ellison [6], $|2^x - 3^y| > 2^x e^{-x/10}$ para x fuera de un conjunto finito explícito, junto con el teorema de

Hercher sobre los ciclos con a lo sumo 91 mínimos locales para descartar los ciclos cortos, permite demostrar con los mismos métodos los casos de uno y dos bloques, y una versión del Teorema 1.3 con $\sigma/1000$ sustituido por $\sigma/20$. Esos argumentos se exponen en la serie publicada en collatz.es [4], donde el caso de un bloque se demuestra además con una comprobación finita propia, sin usar ningún resultado de Hercher.

A. Código del certificado

El programa siguiente, en Python 3 y solo con aritmética racional exacta (`fractions`), certifica los datos de la sección 5.

```
from fractions import Fraction as F

def ln_interval(x, N=128):
    """Intervalo racional [lo, hi] que contiene ln(x), x racional > 1,
    mediante ln((1+z)/(1-z)) = 2*sum z^(2j+1)/(2j+1),
    con z = (x-1)/(x+1)."""
    z = (F(x) - 1) / (F(x) + 1)
    s = sum(z**(2*j+1) / (2*j+1) for j in range(N)) * 2
    resto = 2 * z**(2*N+1) / ((2*N+1) * (1 - z**2))
    return s, s + resto

def cf(x, kmax):
    a = []
    for _ in range(kmax):
        q = x.numerator // x.denominator
        a.append(q)
        x = x - q
        if x == 0: break
        x = 1 / x
    return a

def convergents(a):
    p0, q0, p1, q1 = 0, 1, 1, 0
    out = []
    for ai in a:
        p0, q0, p1, q1 = p1, q1, ai*p1 + p0, ai*q1 + q0
        out.append((p1, q1))
    return out

l2 = ln_interval(2)          # z = 1/3
l3 = ln_interval(3)          # z = 1/2
th_lo, th_hi = l2[0] / l3[1], l2[1] / l3[0]
a_lo, a_hi = cf(th_lo, 60), cf(th_hi, 60)
k = 0
while k < min(len(a_lo), len(a_hi)) and a_lo[k] == a_hi[k]:
    k += 1
comunes = a_lo[:k - 1]   # cocientes comunes a todo el intervalo
conv = convergents(comunes)
```

```
sigma0 = 185 * 10**11
qK = max(q for p, q in conv if q <= sigma0)
qN = min(q for p, q in conv if q > sigma0)
print("cocientes parciales certificados:", len(comunes))
print(comunes[:31])
print("q_K =", qK, " q_K+1 =", qN)
assert (qK, qN) == (18340740190704, 83130157078217)
assert l3[0] / (qK + qN) > F(108, 10**16)
print("ln3/(q_K+q_K+1) > 1,08e-14: True")

# umbral de Matveev: K(1 + ln sigma0) < sigma0/1000
sqrt2_hi = F(141421356238, 10**11)   # cota superior de raiz de 2
assert sqrt2_hi**2 > 2
K_hi = F(14, 10) * 30**5 * 16 * sqrt2_hi * l2[1] * l3[1]
# ln10 = ln2 + ln(5/4) + 2 ln2
l10 = (l2[0] + ln_interval(F(5, 4))[0] + 2*l2[0],
       l2[1] + ln_interval(F(5, 4))[1] + 2*l2[1])
lnsig0_hi = 13 * l10[1] + ln_interval(F(185, 100))[1]
print("K < 586 191 078:", K_hi < 586191078)
print("1 + ln sigma0 < 31,549:", 1 + lnsig0_hi < F(31549, 1000))
assert K_hi * (1 + lnsig0_hi) < 18494 * 10**6 < F(sigma0, 1000)
print("K(1+ln sigma0) < 1,8494e10 < sigma0/1000: True")
```

Referencias

[1] D. Barina, *Improved verification limit for the convergence of the Collatz conjecture*, J. Supercomput. **81** (2025), art. 810.

[2] C. Böhm y G. Sontacchi, *On the existence of cycles of given length in integer sequences like $x_{n+1} = x_n/2$ if x_n even, and $x_{n+1} = 3x_n + 1$ otherwise*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **64** (1978), 260–264.

[3] T. Brox, *Collatz cycles with few descents*, Acta Arith. **92** (2000), 181–188.

[4] M. Cerdá Bennassar, Capítulo 52 de collatz.es, *Bloques de exponentes unitarios y cierre de ciclos* (seis escritos, secciones 52.1–52.6), 2026. https://www.collatz.es/section52_1.php

[5] S. Eliahou, *The $3x + 1$ problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths*, Discrete Math. **118** (1993), 45–56.

[6] W. J. Ellison, *On a theorem of S. Sivasankaranarayana Pillai*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1970–1971), exp. n.º 10, 1–10. https://www.numdam.org/item/STNB_1970-1971____A10_0/

[7] C. Hercher, *There are no Collatz m-cycles with $m \leq 91$*, J. Integer Seq. **26** (2023), art. 23.3.5.

[8] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, University of Chicago Press, 1964.

[9] F. Luca, *On the nontrivial cycles in Collatz's problem*, SUT J. Math. **41** (2005), n.º 1, 31–41.

[10] E. M. Matveev, *An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers. II*, Izv. Math. **64** (2000), n.º 6, 1217–1269.

[11] T. Mimuro, *On certain simple cycles of the Collatz conjecture*, SUT J. Math. **37** (2001), n.º 2, 79–89.

[12] O. Rozier, *Problème de Syracuse: « Majorations » élémentaires des cycles*, Singularité **2** (1991), n.º 5, 8–11.

[13] J. L. Simons, *On the nonexistence of* 2*-cycles for the* $3x + 1$ *problem*, Math. Comp. **74** (2005), n.º 251, 1565–1572.

[14] J. L. Simons y B. de Weger, *Theoretical and computational bounds for* m*-cycles of the* $3n + 1$ *problem*, Acta Arith. **117** (2005), 51–70.

[15] R. P. Steiner, *A theorem on the Syracuse problem*, en Proceedings of the Seventh Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing (Winnipeg, 1977), Congressus Numerantium **20**, Utilitas Mathematica, Winnipeg, 1978, 553–559.