Una demostración del Lema Clave mediante la cota de Ellison

Miguel Cerdá Bennassar
ORCID: 0000-0001-8360-1933

Octubre de 2026

Resumen

Para enteros $d \geq 2$, $n_a \geq 0$ y $n_b \geq 1$ se ponen $\sigma = n_a + (d+1)n_b$, $k = n_a + n_b$, $\delta = 2^\sigma - 3^k$ y $T_{n_b} = (p^{n_b} - 3^{n_b})/(p-3)$ con $p = 2^{d+1}$. Se demuestra que $\delta > (2^d - 1)\, T_{n_b}$ siempre que $\delta > 0$, desigualdad formulada como conjetura en un trabajo anterior del autor (doi:10.5281/zenodo.19473789) con el nombre de Lema Clave. La prueba consta de una reducción elemental al caso $\sigma = \lceil k \log_2 3 \rceil$, de la cota explícita de Ellison para $|2^x - 3^y|$, válida para $x \geq 28$, y de la comprobación directa de treinta y un casos con $\sigma \leq 27$.

1. Introducción

En un trabajo anterior [1] se formuló como conjetura la desigualdad denominada Lema Clave, demostrada allí para $n_a = 0$. La primera versión de un trabajo posterior [2] propuso una vía de demostración cuyo paso de uniformidad en d no quedó justificado. Su versión 2 retiró aquella afirmación y restableció el carácter abierto del problema general: la desigualdad quedaba demostrada para $n_a = 0$ y para $d \leq 7$ con $n_b \geq 2$, y abierta para $d \geq 8$ con $n_b \geq 2$, con una verificación computacional extensa sin excepciones [2].

En el presente escrito se demuestra la conjetura para todos los parámetros admisibles. El argumento descansa en una observación elemental: la desigualdad solo puede estar en duda cuando 2^σ es la menor potencia de 2 que supera a 3^k, y en ese caso el número n_a es necesariamente grande en relación con σ, con una cota inferior que no depende de d. Basta entonces una cota inferior explícita para $|2^x - 3^y|$ que pierda frente a 2^x un factor exponencial pequeño, y esa cota es la que obtuvo Ellison en 1971 [4]. Los valores pequeños de σ que la cota de Ellison no cubre dan lugar a treinta y un casos, que se comprueban uno a uno.

El enunciado y su demostración son independientes de los escritos anteriores; el único resultado externo que se utiliza es la cota explícita de Ellison.

2. Notación y enunciado

Sea $L = \log_2 3 = 1{,}58496\ldots$ Para enteros $d \geq 2$, $n_a \geq 0$ y $n_b \geq 1$ se definen

$$p = 2^{d+1}, \qquad \sigma = n_a + (d+1)\, n_b, \qquad k = n_a + n_b, \qquad \delta = 2^\sigma - 3^k,$$

y

$$T_{n_b} = \frac{p^{n_b} - 3^{n_b}}{p-3} = \sum_{j=0}^{n_b-1} p^j \, 3^{\,n_b-1-j}.$$

Se observa que T_{n_b} es un entero positivo y que $\delta \neq 0$, pues 2^σ es par y 3^k es impar.

Teorema 1 (Lema Clave)**.** *Si $d \geq 2$, $n_a \geq 0$, $n_b \geq 1$ y $\delta > 0$, entonces*

$$\delta > (2^d - 1)\, T_{n_b}.$$

El enunciado coincide con el de la Conjetura 4.1 de [1], con las mismas definiciones. La demostración ocupa las secciones 3 a 5. Se empieza por dos hechos elementales.

Lema 2. *Para todo $d \geq 2$ y todo $n_b \geq 1$ se tiene $(2^d - 1)\, T_{n_b} < 2^{(d+1)n_b}$.*

Demostración. Como $2^{d+1} - 3 - (2^d - 1) = 2^d - 2 > 0$, se tiene $2^d - 1 < p - 3$. Por tanto

$$(2^d - 1)\, T_{n_b} < (p-3)\, T_{n_b} = p^{n_b} - 3^{n_b} < p^{n_b} = 2^{(d+1)n_b}. \qquad \square$$

Como $2^{(d+1)n_b} = 2^{\sigma - n_a}$, el lema 2 muestra que, para demostrar el teorema 1, basta establecer la condición suficiente

$$\delta \geq 2^{\sigma - n_a}. \tag{1}$$

Esta condición es más fuerte que la conclusión buscada y no se cumple en todos los casos; el caso $n_a = 0$ y algunos casos pequeños se tratarán directamente.

Lema 3. *Si $\delta > 0$, entonces $\sigma \geq \lceil kL \rceil$, y la igualdad $\sigma = \lceil kL \rceil$ equivale a $2^{\sigma-1} < 3^k < 2^\sigma$.*

Demostración. De $2^\sigma > 3^k$ se sigue $\sigma > kL$; como kL es irracional para $k \geq 1$, el entero σ es al menos $\lceil kL \rceil$. El entero $\lceil kL \rceil$ es el único s que cumple $s - 1 < kL < s$, es decir, $2^{s-1} < 3^k < 2^s$. $\square$

3. Los casos elementales

Proposición 4. *Si $n_a = 0$, el teorema 1 se cumple.*

Demostración. Con $n_a = 0$ se tiene $\sigma = (d+1)n_b$ y $k = n_b$, de modo que $\delta = p^{n_b} - 3^{n_b} = (p-3)\, T_{n_b}$, que es positivo. Entonces

$$\frac{\delta}{(2^d - 1)\, T_{n_b}} = \frac{2^{d+1} - 3}{2^d - 1} = 1 + \frac{2^d - 2}{2^d - 1} > 1. \qquad \square$$

Este caso es la Proposición 3.1 de [1]; se reproduce aquí para que la demostración quede completa.

Proposición 5. *Si $n_a \geq 1$ y $\sigma \geq \lceil kL \rceil + 1$, el teorema 1 se cumple.*

Demostración. Por el lema 3, la hipótesis equivale a $3^k < 2^{\sigma-1}$. Entonces $\delta > 2^\sigma - 2^{\sigma-1} = 2^{\sigma-1} \geq 2^{\sigma - n_a}$, que es (1), y basta aplicar el lema 2. $\square$

Queda, por tanto, el caso en que $n_a \geq 1$ y $\sigma = \lceil kL \rceil$.

4. El caso $\sigma = \lceil kL \rceil$

El resultado que se emplea es el siguiente.

Teorema 6 (Ellison [4], §II)**.** *Para todo entero $x \geq 28$ y todo entero $y \geq 1$ se tiene*

$$|2^x - 3^y| > 2^x\, e^{-x/10}.$$

Ellison enuncia la desigualdad para todo x fuera del conjunto excepcional

$$\{1, 2, \ldots, 11, 13, 14, 16, 19, 27\},$$

y el teorema 6 es consecuencia inmediata de su enunciado. La obtiene combinando una cota efectiva para formas lineales en logaritmos con un cálculo de fracciones continuas de $\log 3/\log 2$. El enunciado con el conjunto excepcional figura en la sección II del artículo, página 12-05 de su paginación original.[1]

Lema 7. *Si $n_a \geq 1$, $\sigma = \lceil kL \rceil$ y $k \geq 2$, entonces*

$$n_a > \frac{\sigma}{10 \ln 2}.$$

Demostración. De $\sigma = n_a + (d+1)n_b$ y $k = n_a + n_b$ se obtiene $\sigma - k = d\, n_b$, luego $n_b = (\sigma - k)/d \leq (\sigma - k)/2$ por ser $d \geq 2$. Así,

$$n_a = k - n_b \geq k - \frac{\sigma - k}{2} = \frac{3k - \sigma}{2}.$$

Como $\sigma = \lceil kL \rceil < kL + 1$ y $L < 8/5$, resulta

$$n_a > \frac{(3 - L)\, k - 1}{2} > \frac{7k}{10} - \frac{1}{2}.$$

Por otra parte, de $\sigma < kL + 1$, $L < 8/5$ y $\ln 2 > 2/3$ se sigue

$$\frac{\sigma}{10 \ln 2} < \frac{3\,(Lk + 1)}{20} < \frac{6k}{25} + \frac{3}{20}.$$

La diferencia entre las dos cotas es

$$\Big(\frac{7k}{10} - \frac{1}{2}\Big) - \Big(\frac{6k}{25} + \frac{3}{20}\Big) = \frac{23k}{50} - \frac{13}{20},$$

que es positiva para $k \geq 2$. □

La cota inferior de n_a obtenida en la demostración no depende de d: el parámetro d interviene solo a través de $d \geq 2$.

Proposición 8. *Si $n_a \geq 1$, $\sigma = \lceil kL \rceil$ y $\sigma \geq 28$, el teorema 1 se cumple.*

Demostración. La condición $\sigma \geq 28$ obliga a $k \geq 18$, pues $\lceil 17L \rceil = 27$. Por el teorema 6 y el lema 7,

$$\delta = |2^\sigma - 3^k| > 2^\sigma e^{-\sigma/10} = 2^{\sigma - \sigma/(10 \ln 2)} > 2^{\sigma - n_a},$$

que es (1). Basta aplicar el lema 2. □

[1] En el texto posterior del artículo, Ellison se refiere a este resultado como teorema 2.

5. Los casos con $\sigma \leq 27$

Quedan los casos con $n_a \geq 1$, $\sigma = \lceil kL \rceil$ y $\sigma \leq 27$. Como $\lceil 17L \rceil = 27$ y $\lceil 18L \rceil = 29$, son los de $1 \leq k \leq 17$. Para cada uno de estos k, el entero σ está determinado por $2^{\sigma-1} < 3^k < 2^\sigma$ y, por la relación $\sigma - k = d\, n_b$, el entero d ha de ser un divisor de $\sigma - k$ con $d \geq 2$; fijado d, se tiene $n_b = (\sigma - k)/d$ y $n_a = k - n_b$, y se exige $n_a \geq 1$ y $n_b \geq 1$. Para $k = 1$ se tiene $\sigma - k = 1$ y no hay ningún caso. La enumeración da los treinta y un casos de la tabla 1, y en todos ellos se cumple $\delta > (2^d - 1)\, T_{n_b}$.

Cuadro 1: Casos con $n_a \geq 1$, $\sigma = \lceil kL \rceil$ y $\sigma \leq 27$.

k	σ	d	n_a	n_b	δ	$(2^d - 1)\, T_{n_b}$
2	4	2	1	1	7	3
3	5	2	2	1	5	3
4	7	3	3	1	47	7
5	8	3	4	1	13	7
6	10	2	4	2	295	33
6	10	4	5	1	295	15
7	12	5	6	1	1909	31
8	13	5	7	1	1631	31
9	15	2	6	3	13085	291
9	15	3	7	2	13085	133
9	15	6	8	1	13085	63
10	16	2	7	3	6487	291
10	16	3	8	2	6487	133
10	16	6	9	1	6487	63
11	18	7	10	1	84997	127
12	20	2	8	4	517135	2409
12	20	4	10	2	517135	525
12	20	8	11	1	517135	255
13	21	2	9	4	502829	2409
13	21	4	11	2	502829	525
13	21	8	12	1	502829	255
14	23	3	11	3	3605639	2191
14	23	9	13	1	3605639	511
15	24	3	12	3	2428309	2191
15	24	9	14	1	2428309	511
16	26	2	11	5	24062143	19515
16	26	5	14	2	24062143	2077
16	26	10	15	1	24062143	1023
17	27	2	12	5	5077565	19515
17	27	5	15	2	5077565	2077
17	27	10	16	1	5077565	1023

Demostración del teorema 1. Sea $\delta > 0$. Si $n_a = 0$, se aplica la proposición 4. Si $n_a \geq 1$, el lema 3 da $\sigma \geq \lceil kL \rceil$. Cuando $\sigma > \lceil kL \rceil$ se aplica la proposición 5; cuando $\sigma = \lceil kL \rceil \geq 28$, la proposición 8; y cuando $\sigma = \lceil kL \rceil \leq 27$, la tabla 1. □

Queda así demostrada la Conjetura 4.1 de [1].

Comentario 9. En los casos cubiertos por las proposiciones 5 y 8 se ha probado algo más fuerte que el teorema: $\delta > 2^{(d+1)n_b}$. Esa forma reforzada no vale en general; en el primer caso de la tabla 1 se tiene $\delta = 7$ y $2^{(d+1)n_b} = 8$.

6. Comentarios finales

En [1] se establece que la existencia de un ciclo con perfil de exponentes $(1^{n_a}, (d+1)^{n_b})$ exigiría que δ dividiese el número $c_n = 2^{n_a+1}(2^d - 1)\, T_{n_b}$. Como δ es impar, esa divisibilidad equivale a que δ divida el entero positivo $(2^d - 1)\, T_{n_b}$, lo que el teorema 1 impide. La obstrucción que aquel trabajo presentaba de forma condicional queda, pues, establecida para todo el perfil. Se trata de una exclusión limitada a ese perfil y a la reducción a ciclos establecida en aquel trabajo. Cuando $n_a \geq 1$, la palabra cíclica $(1^{n_a}, (d+1)^{n_b})$ tiene un único bloque de exponentes unitarios, de modo que la exclusión correspondiente queda comprendida también en el resultado sobre ciclos con un único bloque de exponentes unitarios [3]. El caso $n_a = 0$ queda resuelto directamente por la proposición 4. El interés del presente escrito es, por tanto, el de dejar demostrada la desigualdad aritmética en sí, sin condiciones y con un residuo finito pequeño.

La demostración no evita la teoría de las formas lineales en logaritmos, pues la cota de Ellison depende de ella; lo que hace es reducir su uso a un único resultado explícito y publicado. Queda abierta la cuestión de si existe una demostración del teorema 1 que no recurra a resultados de aproximación diofántica sobre $\log_2 3$. Por la proposición 5, una demostración así debería acotar inferiormente $2^\sigma - 3^k$ cuando 2^σ es la menor potencia de 2 mayor que 3^k. El autor no conoce una demostración elemental que proporcione la cota necesaria para estos parámetros.

Otra cuestión natural es la extensión de la desigualdad a perfiles con dos exponentes no unitarios distintos, $(1^{n_a}, (d+1)^{n_b}, (e+1)^{n_c})$, donde el papel de T_{n_b} lo desempeñaría la suma correspondiente a los dos bloques.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Estructura de la no existencia de ciclos y la Conjetura del Lema Clave*, Zenodo, 2026. https://doi.org/10.5281/zenodo.19473789

[2] M. Cerdá Bennassar, *Estado de la Conjetura del Lema Clave: corrección, estructura parcial y verificación*, versión 2, Zenodo, junio de 2026. https://doi.org/10.5281/zenodo.20686102

[3] M. Cerdá Bennassar, *Ciclos de Collatz con un único bloque de exponentes unitarios*, collatz.es, 2026. https://www.collatz.es/articulos/seccion52_2/II_Ciclos_de_Collatz_con_un_unico_bloque.pdf

[4] W. J. Ellison, *On a theorem of S. Sivasankaranarayana Pillai*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1970–1971), exposé n.º 10, 1–10. https://www.numdam.org/item/STNB_1970-1971____A10_0/