Exclusión de dos familias de palabras de exponentes en los ciclos de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

Se consideran las palabras de exponentes que resultan de la alternancia $(1,2)^q$ al aumentar uno solo de sus exponentes en un entero positivo. Se demuestra que ninguna de ellas, ni ninguna de sus rotaciones, es la sucesión de valuaciones de un ciclo de impares positivos de la dinámica de Collatz, con la única excepción de la palabra $(2,2)$, que corresponde al ciclo trivial. La demostración consta de dos partes. La primera es un argumento algebraico elemental que, a partir de dos identidades de cierre, reduce la existencia de un ciclo a una desigualdad exponencial entre potencias de 2 y de 9. La segunda excluye esa desigualdad mediante la cota de Matveev para formas lineales en logaritmos, el criterio de Legendre y una verificación finita realizada con aritmética de intervalos.

Índice

1. Introducción **2**

2. Definiciones y resultado principal **2**

3. Cierre y lema de enlace **3**
3.1. Condición necesaria de cierre 3
3.2. Identidades de cierre 4
3.3. La desigualdad necesaria 4

4. Los casos $u = 1$ y $u = 2$ **5**

5. El resultado diofántico **6**
5.1. Cota efectiva 6
5.2. Reducción a convergentes 7
5.3. Fracción continua y convergentes 7
5.4. Exclusión de los convergentes y de sus múltiplos 8

6. Demostración del teorema principal **9**

7. Verificación computacional **9**

8. Conclusiones y cuestiones abiertas **10**

1. Introducción

Uno de los problemas abiertos de la dinámica de Collatz es la existencia de ciclos de enteros positivos distintos del ciclo trivial. Todo ciclo queda descrito por la sucesión de las valuaciones $\nu_2(3n+1)$ a lo largo de sus términos impares, que llamaremos su palabra de exponentes, y una palabra solo puede realizarse en un ciclo si satisface una ecuación de cierre que relaciona potencias de 2 y de 3. Excluir familias completas de palabras es una manera de restringir la forma que podría tener un ciclo no trivial.

En este trabajo se consideran las palabras que resultan de la alternancia $(1,2)^q$ al aumentar uno solo de sus exponentes en un entero positivo. La alternancia $(1,2)$ es la palabra del ciclo negativo $-5 \mapsto -7 \mapsto -5$, de modo que estas palabras son perturbaciones de ese ciclo por un único incremento. Se demuestra que ninguna de ellas se realiza en un ciclo de impares positivos, cualesquiera que sean la longitud y el incremento, salvo la palabra $(2,2)$, que describe el ciclo trivial (teorema 2.1).

Los antecedentes más próximos son los resultados sobre ciclos con un número acotado de circuitos. Steiner [7] excluyó los ciclos no triviales formados por un solo circuito, Simons y de Weger [6] extendieron el método a los m-ciclos, y Hercher [4] demostró que no existen m-ciclos con $m \leq 91$. Esos resultados alcanzan a las familias aquí estudiadas solo para valores acotados de q; la relación precisa se expone en el comentario 2.3.

La demostración consta de dos partes de naturaleza distinta. La primera es algebraica y elemental: dos identidades de cierre, una para cada familia, y un argumento de congruencias módulo 8 reducen la existencia de un ciclo a una desigualdad exponencial muy estricta entre una potencia de 2 y 9^q. La segunda es diofántica: esa desigualdad se excluye mediante la cota de Matveev para formas lineales en logaritmos [5], en la forma de Bugeaud, Mignotte y Siksek [1], el criterio de Legendre y una verificación finita con aritmética de intervalos. La parte diofántica se deduce también de un resultado de Ellison [2], como se indica en el comentario 5.2.

El trabajo se organiza como sigue. En la sección 2 se fijan las definiciones y se enuncia el resultado principal. La sección 3 contiene las identidades de cierre y el lema de enlace para incrementos $u \geq 3$, y la sección 4, los casos $u = 1$ y $u = 2$. En la sección 5 se demuestra el resultado diofántico; la sección 6 reúne ambas partes, la sección 7 describe la verificación computacional y la sección 8 recoge las conclusiones y algunas cuestiones abiertas.

2. Definiciones y resultado principal

Para un entero impar positivo n, la aplicación acelerada de Collatz es

$$T(n) = \frac{3n+1}{2^{\nu_2(3n+1)}}.$$

Diremos que una palabra de exponentes positivos $\mathbf{k} = (k_0, \ldots, k_{\ell-1})$ se realiza en un ciclo si existen enteros impares positivos $n_0, \ldots, n_{\ell-1}$, con $n_\ell = n_0$, tales que

$$2^{k_j} n_{j+1} = 3n_j + 1 \qquad (0 \leq j < \ell).$$

No se exige que ℓ sea el período mínimo. Como cada n_{j+1} es impar, el exponente k_j es exactamente $\nu_2(3n_j+1)$.

Para $q, u \geq 1$ definimos, por concatenación,

$$\mathbf{A}_{q,u} = (u+1,2)(1,2)^{q-1}, \qquad \mathbf{B}_{q,u} = (1,u+2)(1,2)^{q-1}. \tag{1}$$

Ambas palabras tienen longitud $2q$ y, salvo rotación cíclica, son las dos maneras de aumentar en u un único exponente de la palabra $(1,2)^q$.

Teorema 2.1. *Sean $q, u \geq 1$. Ninguna de las palabras $\mathbf{A}_{q,u}$, $\mathbf{B}_{q,u}$, ni ninguna rotación cíclica de ellas, se realiza en un ciclo de impares positivos de Collatz, salvo $\mathbf{A}_{1,1} = (2,2)$, que se realiza únicamente con $n_0 = n_1 = 1$, es decir, recorriendo dos veces el ciclo trivial.*

Comentario 2.2. Para $u = 0$ las dos palabras se reducen a $(1,2)^q$, que es la palabra del ciclo negativo $-5 \mapsto -7 \mapsto -5$, pues $3(-5)+1 = 2\cdot(-7)$ y $3(-7)+1 = 4\cdot(-5)$. Las familias $\mathbf{A}_{q,u}$ y $\mathbf{B}_{q,u}$ son, por tanto, perturbaciones de ese ciclo por un único incremento. Las identidades del lema 3.1 siguen siendo válidas para $u = 0$; su segundo miembro es entonces nulo y expresan que $R_0 = -5D$, es decir, que la ecuación de cierre (2) tiene la solución $n_0 = -5$.

Comentario 2.3. La estrategia empleada, consistente en acotar una forma lineal en $\log 2$ y $\log 3$ y cerrar el argumento con una cota inferior efectiva y fracciones continuas, es la de Steiner [7] para los ciclos con una sola fase creciente, desarrollada después por Simons y de Weger [6] para los m-ciclos. En el sentido de Hercher [4, definiciones 1, 5 y 6], un m-ciclo es un ciclo de la aplicación $n \mapsto n/2$ (n par), $n \mapsto (3n+1)/2$ (n impar) formado por m circuitos, es decir, por m bloques de pasos $(3n+1)/2$ seguidos cada uno de un bloque de pasos $n/2$; equivalentemente, un ciclo con m mínimos locales en la sucesión completa de esa aplicación, que incluye los términos pares. En una palabra de exponentes, un exponente $k \geq 2$ corresponde a un paso $(3n+1)/2$ seguido de $k-1$ pasos $n/2$ y cierra un circuito, mientras que un exponente igual a 1 lo prolonga; el número de circuitos es, por tanto, el número de exponentes mayores o iguales que 2. Este número no coincide en general con el de mínimos locales de la sucesión de impares n_j, que puede ser menor. Hercher [4] demostró que no existen m-ciclos no triviales con $m \leq 91$. Las palabras $\mathbf{A}_{q,u}$ tienen $q+1$ exponentes mayores o iguales que 2 y las palabras $\mathbf{B}_{q,u}$ tienen q, de modo que sus ciclos serían $(q+1)$-ciclos y q-ciclos, respectivamente. El resultado de Hercher excluye, por tanto, los ciclos no triviales con $q \leq 90$ en la familia A y con $q \leq 91$ en la familia B; el teorema 2.1 trata todos los valores de q. Los resultados sobre m-ciclos acotan el número de mínimos locales sin restringir la forma de la palabra; aquí, en cambio, se fija la forma de la palabra y el número de mínimos locales queda libre.

3. Cierre y lema de enlace

3.1. Condición necesaria de cierre

Para una palabra $\mathbf{k}$ de longitud ℓ ponemos

$$K_0 = 0, \qquad K_j = \sum_{i=0}^{j-1} k_i, \qquad R(\mathbf{k}) = \sum_{j=0}^{\ell-1} 3^{\ell-1-j} 2^{K_j}.$$

Iterando las relaciones afines se obtiene $2^{K_\ell} n_\ell = 3^\ell n_0 + R(\mathbf{k})$, de modo que, si la palabra se realiza en un ciclo,

$$(2^{K_\ell} - 3^\ell)\, n_0 = R(\mathbf{k}). \tag{2}$$

Como $R(\mathbf{k}) > 0$ y $n_0 > 0$, un ciclo positivo obliga a que $2^{K_\ell} - 3^\ell$ sea positivo y divida a $R(\mathbf{k})$. Solo se usa esta condición necesaria; no se presupone que la divisibilidad sea suficiente.

En las dos familias (1) ponemos

$$N = K_{2q} = u + 3q, \qquad h = 2^u, \qquad D = h\,8^q - 9^q = 2^N - 3^{2q}. \tag{3}$$

El número D es impar y $D \equiv 2^u 8^q \equiv (-1)^{u+q} \pmod 3$; en particular, $\gcd(D,6) = 1$.

3.2. Identidades de cierre

Lema 3.1. *Para todos los enteros $q \geq 1$ y $u \geq 0$, los numeradores $R_A = R(\mathbf{A}_{q,u})$ y $R_B = R(\mathbf{B}_{q,u})$ satisfacen*

$$R_A + 5D = 42(h-1)\,9^{q-1}, \tag{4}$$
$$R_B + 5D = 40(h-1)\,9^{q-1}. \tag{5}$$

Demostración. En la palabra $(1,2)^q$, los prefijos asociados a la pareja de índice j son $3j$ y $3j+1$, y sus dos sumandos se agrupan como

$$3^{2q-1-2j}2^{3j} + 3^{2q-2-2j}2^{3j+1} = 5 \cdot 9^{q-1-j}8^j.$$

Por tanto, el numerador de $(1,2)^q$ es

$$R_0 = 5\sum_{j=0}^{q-1} 9^{q-1-j}8^j = 5(9^q - 8^q).$$

En $\mathbf{A}_{q,u}$ el incremento afecta al primer exponente, de modo que todos los sumandos salvo el primero quedan multiplicados por h. En $\mathbf{B}_{q,u}$ afecta al segundo, y quedan multiplicados por h todos los sumandos salvo los dos primeros, cuya suma es $3^{2q-1} + 2 \cdot 3^{2q-2} = 5 \cdot 9^{q-1}$. En consecuencia,

$$R_A = hR_0 - (h-1)\,3^{2q-1}, \qquad R_B = hR_0 - 5(h-1)\,9^{q-1}.$$

Sumando $5D = 5h\,8^q - 5 \cdot 9^q$ se obtiene

$$R_A + 5D = (h-1)(45-3)\,9^{q-1}, \qquad R_B + 5D = 5(h-1)(9-1)\,9^{q-1},$$

que son las identidades del enunciado. □

Para $q = 1$ la comprobación directa da $R_A = 3 + 2h$, $R_B = 5$ y $D = 8h - 9$, de acuerdo con el lema.

Lema 3.2. *Sea $c = 7$ para la familia A y $c = 5$ para la familia B. Entonces*

$$D \mid R(\mathbf{k}) \quad \Longleftrightarrow \quad D \mid c\,(h-1).$$

Demostración. Por (4), en la familia A la divisibilidad $D \mid R_A$ equivale a $D \mid 42(h-1)9^{q-1}$. Como $6 \cdot 9^{q-1}$ es primo con D, equivale a $D \mid 7(h-1)$. En la familia B se razona igual con (5), cancelando el factor $8 \cdot 9^{q-1}$. No se supone que D sea primo con 7 o con 5. □

3.3. La desigualdad necesaria

Proposición 3.3. *Si una palabra de las familias (1), con $q \geq 1$ y $u \geq 3$, se realiza en un ciclo de impares positivos, entonces*

$$0 < X := 2^{u+3q}\,9^{-q} - 1 < \frac{8}{7}\,8^{-q}. \tag{6}$$

Demostración. Por (2) y el lema 3.2, se tiene $D > 0$ y

$$s = \frac{c\,(h-1)}{D} \in \mathbb{Z}_{>0}, \qquad c \in \{5, 7\}.$$

Si $u \geq 3$, entonces $h \equiv 0 \pmod 8$, y por ello $D \equiv h-1 \equiv 7 \pmod 8$. La igualdad $sD = c(h-1)$ da $7s \equiv 7c \pmod 8$, es decir, $s \equiv c \pmod 8$. Como s es un entero positivo y $c \leq 7$, resulta $s \geq c$, y por consiguiente

$$0 < D = \frac{c\,(h-1)}{s} \leq h - 1.$$

Sustituyendo $D = h\,8^q - 9^q$ se obtiene $h(8^q - 1) \leq 9^q - 1$. Como $X = D/9^q$ crece con h,

$$0 < X \leq \frac{9^q - 8^q}{(8^q - 1)\,9^q} = \frac{1 - (8/9)^q}{8^q - 1} < \frac{1}{8^q - 1} = \frac{8^{-q}}{1 - 8^{-q}} \leq \frac{8}{7}\,8^{-q},$$

donde la última desigualdad usa $8^{-q} \leq 1/8$. Por último, $h\,8^q = 2^{u+3q}$. □

El argumento no requiere ninguna condición sobre la paridad de u o de q ni sobre el período mínimo del ciclo. El paso $s \geq c$ utiliza $u \geq 3$; los casos $u = 1$ y $u = 2$ se tratan aparte.

4. Los casos $u = 1$ y $u = 2$

Proposición 4.1. *Para ningún $q \geq 1$ se realiza $\mathbf{A}_{q,2}$ o $\mathbf{B}_{q,2}$ en un ciclo de impares positivos. Para $u = 1$, la única palabra de las familias que se realiza en un ciclo de impares positivos es $\mathbf{A}_{1,1} = (2, 2)$, y lo hace únicamente con $n_0 = n_1 = 1$.*

Demostración. Si $u = 2$, entonces $h = 4$, y el cierre exigiría $D = 4 \cdot 8^q - 9^q > 0$ y, por el lema 3.2, $D \mid 3c$. Como $\gcd(D, 3) = 1$, sería $D \mid c$, con $c \in \{5, 7\}$. De

$$9^{11} < 4 \cdot 8^{11}, \qquad 9^{12} > 4 \cdot 8^{12}$$

y del crecimiento de $(9/8)^q$ se sigue que $D > 0$ exactamente para $1 \leq q \leq 11$. En ese intervalo los valores de D son los de la tabla 1; todos son mayores que 7 y no pueden dividir a c.

Si $u = 1$, entonces $h = 2$, y el cierre exigiría $D = 2 \cdot 8^q - 9^q > 0$ y $D \mid c$. De $9^5 < 2 \cdot 8^5$ y $9^6 > 2 \cdot 8^6$ se sigue que $D > 0$ exactamente para $1 \leq q \leq 5$, con los valores

$$D = 7,\ 47,\ 295,\ 1\,631,\ 6\,487.$$

El único que divide a 5 o a 7 es $D = 7$, para $q = 1$, y solo divide a $c = 7$, es decir, en la familia A. En ese caso $R_A = 42 - 5 \cdot 7 = 7$ por el lema 3.1, y la ecuación (2) da $n_0 = 1$. Recíprocamente, $3 \cdot 1 + 1 = 2^2 \cdot 1$, de modo que la palabra $(2, 2)$ se realiza con $n_0 = n_1 = 1$. □

Cuadro 1: Valores positivos de $D = 4 \cdot 8^q - 9^q$ (caso $u = 2$).

q	D	q	D
1	23	7	3 605 639
2	175	8	24 062 143
3	1 319	9	149 450 423
4	9 823	10	808 182 895
5	72 023	11	2 978 678 759
6	517 135		

5. El resultado diofántico

Teorema 5.1. *No existen enteros N y $q \geq 1$ tales que*

$$0 < X = 2^N 9^{-q} - 1 \leq \frac{8}{7} 8^{-q}. \tag{7}$$

En particular, no existen enteros u y $q \geq 1$ que satisfagan la desigualdad (6). La demostración tiene tres etapas: una cota efectiva para q, la reducción a convergentes por el criterio de Legendre y la exclusión de los convergentes por debajo de esa cota.

5.1. Cota efectiva

Ponemos

$$L = N \log 2 - 2q \log 3 = \log(1 + X).$$

Bajo (7) se tiene $X \neq 0$, ya que $2^N \neq 9^q$ por la factorización en primos, y

$$0 < L < \varepsilon(q) := \frac{8}{7} 8^{-q} \leq \frac{1}{7}.$$

Para $q = 1$ la condición exigiría $9 < 2^N \leq 72/7 < 11$, lo cual es imposible. Suponemos en adelante $q \geq 2$.

Utilizamos el teorema de Matveev [5, Corolario 2.3] en la forma de Bugeaud, Mignotte y Siksek [1, Teorema 9.4] para cuerpos reales. Si $\eta_1, \ldots, \eta_n$ son números algebraicos reales positivos de un cuerpo real de grado d, $b_1, \ldots, b_n$ son enteros y $\Lambda = \eta_1^{b_1} \cdots \eta_n^{b_n} - 1 \neq 0$, entonces

$$\log |\Lambda| > -1.4 \cdot 30^{n+3}\, n^{4.5}\, d^2 (1 + \log d)(1 + \log B)\, A_1 \cdots A_n, \tag{8}$$

donde $B \geq \max_i |b_i|$ y $A_i \geq \max\{d\, \mathrm{h}(\eta_i), |\log \eta_i|, 0.16\}$, siendo h la altura logarítmica absoluta (que no debe confundirse con el parámetro $h = 2^u$).

Tomamos el cuerpo $\mathbb{Q}$, $d = 1$, $n = 2$, $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 3$, $b_1 = N$ y $b_2 = -2q$, de modo que $\Lambda = X$. Las alturas de 2 y 3 son $\log 2$ y $\log 3$, mayores que 0.16, y podemos tomar $A_1 = \log 2$ y $A_2 = \log 3$. La elección $B = 4q$ es admisible: de $2 \log 3 / \log 2 < 3.17$, $1/\log 2 < 1.45$ y $0 < L < 1$ se sigue

$$0 < N = \frac{2q \log 3 + L}{\log 2} < 3.17\, q + 1.45 < 4q \qquad (q \geq 2),$$

donde la última desigualdad equivale a $1.45 < 0.83\, q$, que se cumple para $q \geq 2$. La desigualdad (8) da entonces

$$\log X > -K_0 (1 + \log(4q)), \qquad K_0 = 1.4 \cdot 30^5 \cdot 2^{4.5} \log 2 \log 3,$$

con $586\,191\,077 < K_0 < 586\,191\,078$. Como, por otra parte, $\log X \leq \log(8/7) - q \log 8$, toda solución de (7) satisface

$$q \log 8 - \log(8/7) < K_0 (1 + \log(4q)). \tag{9}$$

Sea

$$f(Q) = Q \log 8 - K_0 (1 + \log(4Q)) - \log(8/7), \qquad Q_* = 7\,250\,000\,000.$$

La aritmética de intervalos da $f(Q_*) > 368\,087\,700$ y $f'(Q_*) = \log 8 - K_0/Q_* > 1.9985$. Como K_0/Q decrece, $f'(Q) > 0$ para $Q \geq Q_*$. La condición (9) equivale a $f(q) < 0$, y por tanto

$$q < Q_* = 7\,250\,000\,000. \tag{10}$$

5.2. Reducción a convergentes

Sea

$$\beta = \frac{\log(9/8)}{\log 2} > 0.$$

El número β es irracional, pues una igualdad $\beta = p/b$ con p, b enteros positivos daría $2^p 8^b = 9^b$. Poniendo $s = N - 3q$, se tiene

$$L = s\log 2 - q\log(9/8) = q\log 2\left(\frac{s}{q} - \beta\right),$$

y de (7) se sigue

$$0 < \frac{s}{q} - \beta < \frac{\varepsilon(q)}{q\log 2} < \frac{1}{2q^2}.$$

La última desigualdad equivale a $g(q) < 1$, con $g(q) = 16q\,8^{-q}/(7\log 2)$; se cumple para $q = 1$, pues $g(1) < 0.42$, y como $g(q+1)/g(q) = (q+1)/(8q) \le 1/4$, se cumple para todo $q \ge 1$.

Por el criterio de Legendre [3, Teorema 184], si una fracción reducida p/b satisface $|\beta - p/b| < 1/(2b^2)$, es un convergente de β. Si $s/q = p/b$ en términos reducidos, entonces $s = rp$ y $q = rb$ con $r \ge 1$, y como $b \le q$ la desigualdad anterior se cumple con denominador b. Basta, pues, examinar los convergentes de β con denominador menor que Q_* y sus múltiplos.

5.3. Fracción continua y convergentes

Un encierro de β obtenido con aritmética de intervalos y redondeado hacia fuera es

$$\begin{aligned} \beta_- &= \frac{16992500144231236290747788789563301751 96}{10^{40}}, \\ \beta_+ &= \frac{16992500144231236290747788789563301751 97}{10^{40}}, \\ \beta_- &< \beta < \beta_+. \end{aligned} \tag{11}$$

Las fracciones continuas exactas de β_- y β_+ coinciden en sus veintiún primeros cocientes parciales,

$$[0; 5, 1, 7, 1, 2, 4, 11, 1, 2, 2, 3, 27, 1, 9, 1, 1, 3, 7, 1, 19].$$

El conjunto de los números reales cuya fracción continua empieza por un prefijo dado es un intervalo; como contiene a β_- y a β_+, contiene también a β, y el prefijo es el de β.

Con las recurrencias habituales

$$p_{-2} = 0,\ p_{-1} = 1, \quad q_{-2} = 1,\ q_{-1} = 0, \quad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2},$$

se obtienen los veinte convergentes con $q_k < Q_*$ de la tabla 2. El siguiente es

$$\frac{p_{20}}{q_{20}} = \frac{11\,125\,094\,063}{65\,470\,613\,321}, \qquad q_{20} > Q_*,$$

y los denominadores posteriores son mayores.

Cuadro 2: Convergentes de β con denominador menor que Q_*.

k	p_k	q_k	q_{k+1}	signo de L_k
0	0	1	5	$-$
1	1	5	6	$+$
2	1	6	47	$-$
3	8	47	53	$+$
4	9	53	153	$-$
5	26	153	665	$+$
6	113	665	7 468	$-$
7	1 269	7 468	8 133	$+$
8	1 382	8 133	23 734	$-$
9	4 033	23 734	55 601	$+$
10	9 448	55 601	190 537	$-$
11	32 377	190 537	5 200 100	$+$
12	883 627	5 200 100	5 390 637	$-$
13	916 004	5 390 637	53 715 833	$+$
14	9 127 663	53 715 833	59 106 470	$-$
15	10 043 667	59 106 470	112 822 303	$+$
16	19 171 330	112 822 303	397 573 379	$-$
17	67 557 657	397 573 379	2 895 835 956	$+$
18	492 074 929	2 895 835 956	3 293 409 335	$-$
19	559 632 586	3 293 409 335	65 470 613 321	$+$

5.4. Exclusión de los convergentes y de sus múltiplos

Ponemos

$$L_k = p_k \log 2 - q_k \log(9/8) = \log 2\,(p_k - q_k\beta).$$

Si β_{k+1} es el cociente completo de orden $k+1$, se tiene $\beta = (p_k\beta_{k+1} + p_{k-1})/(q_k\beta_{k+1} + q_{k-1})$, y de $p_kq_{k-1} - p_{k-1}q_k = (-1)^{k-1}$ resulta

$$q_k\beta - p_k = \frac{(-1)^k}{q_k\beta_{k+1} + q_{k-1}}.$$

Por tanto, $L_k < 0$ cuando k es par, lo que es incompatible con $L > 0$. Cuando k es impar, como $\beta_{k+1} < a_{k+1} + 1$,

$$|q_k\beta - p_k| > \frac{1}{q_k + q_{k+1}}.$$

Además, $\log 2 > 693/1000$, pues

$$\log 2 = 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)\,3^{2j+1}} > \frac{149\,337\,754\,816}{215\,448\,838\,605} > \frac{693}{1000},$$

donde la fracción central es la suma de los términos con $j \le 7$. En consecuencia, para k impar,

$$L_k > \frac{693}{1000\,(q_k + q_{k+1})},$$

y se comprueba con aritmética entera que

$$7 \cdot 693 \cdot 8^{q_k} > 8000\,(q_k + q_{k+1}) \tag{12}$$

para los diez índices impares de la tabla 2. Esta comprobación no requiere calcular potencias muy grandes: si $M = 8000(q_k + q_{k+1})$ y $3q_k$ supera la longitud binaria de M, entonces $8^{q_k} = 2^{3q_k} > M$. De (12) se sigue $L_k > \varepsilon(q_k)$, incompatible con $L < \varepsilon(q)$. Los signos y las desigualdades se han confirmado además por aritmética de intervalos, comparando $\log L_k$ con $\log(8/7) - q_k \log 8$.

Finalmente, si $s = rp_k$ y $q = rq_k$ con $r \geq 1$, entonces $L = rL_k$. Si $L_k < 0$, el múltiplo conserva el signo; si $L_k > \varepsilon(q_k)$, entonces

$$L = rL_k > r\,\varepsilon(q_k) \geq \varepsilon(rq_k) = \varepsilon(q).$$

Ningún múltiplo satisface, por tanto, (7). Esto completa la demostración del teorema 5.1.

Comentario 5.2. El teorema 5.1 se deduce también de un resultado de Ellison [2, Teorema 2][1]: para todo par de enteros positivos (x, y) con x fuera del conjunto $\{1, \ldots, 11, 13, 14, 16, 19, 27\}$ se tiene $|2^x - 3^y| > 2^x e^{-x/10}$. En efecto, bajo (7) se tiene $2^N > 9^q$ y $L \leq \log(8/7)$, luego $N < 3.17\,q + 0.2$. Si $N \geq 28$, la cota de Ellison daría

$$2^N - 9^q > 9^q\, e^{-N/10} > (8e^{-0.317})^q e^{-0.02} \Big(\frac{9}{8}\Big)^q > 5\Big(\frac{9}{8}\Big)^q > \frac{8}{7}\Big(\frac{9}{8}\Big)^q,$$

en contradicción con (7). Si $N \leq 27$, entonces $q \leq 8$, y en esos ocho casos el menor valor positivo de $2^N - 9^q$ entre todos los exponentes enteros N, que va de 7 para $q = 1$ a 24 062 143 para $q = 8$, supera ya $\frac{8}{7}(\frac{9}{8})^q < 3$.

6. Demostración del teorema principal

Demostración del teorema 2.1. Si $u \geq 3$, la existencia de un ciclo positivo implicaría (6) por la proposición 3.3, y esa desigualdad queda excluida por el teorema 5.1. Si $u = 1$ o $u = 2$, se aplica la proposición 4.1. Si una rotación de una de las palabras se realizase en un ciclo, tomando como punto de partida el impar correspondiente al comienzo del representante (1) se realizaría la palabra original, y se llegaría a la misma conclusión. □

7. Verificación computacional

Los cálculos de la sección 5 se han realizado con dos programas independientes, que se encuentran, junto con sus salidas de referencia y las instrucciones de ejecución, en el depósito de Zenodo doi:10.5281/zenodo.23358349. El primero, `cota_matveev_beta.py`, utiliza la biblioteca FLINT/arb (python-flint 0.9.0); extrae los cocientes parciales con aritmética de intervalos, repite la extracción completa con mayor precisión si algún cociente no queda determinado, la contrasta a precisión doble y certifica las exclusiones por intervalos y por la comprobación entera (12). El segundo, `verificacion_independiente_beta.py`, utiliza mpmath 1.3.0 y

[1] Se sigue la numeración que Ellison emplea en la introducción y al final de la demostración; en la copia digitalizada el encabezado de este resultado figura como «Theorem 3», y el apartado III contiene otro teorema con el mismo encabezado, distinto del utilizado aquí. La cabecera del original indica además «exposé n.º 12», mientras que Numdam lo cataloga como n.º 10; por ello se da en la bibliografía el título completo y la dirección permanente de Numdam.

obtiene la fracción continua a partir de los extremos racionales exactos de un intervalo, como en (11), y las exclusiones mediante las comprobaciones enteras. Las identidades del lema 3.1, la tabla 1 y los valores del caso $u = 1$ se han contrastado además con aritmética entera exacta, y una búsqueda directa para $1 \le u, q \le 40$ no encuentra más realización que la de $(2, 2)$; la validez general de estos resultados procede, en todo caso, de las demostraciones escritas.

8. Conclusiones y cuestiones abiertas

Se ha demostrado que ninguna palabra obtenida de la alternancia $(1, 2)^q$ aumentando un único exponente en un entero positivo se realiza en un ciclo de impares positivos de Collatz, salvo la palabra $(2, 2)$, que recorre dos veces el ciclo trivial. La demostración separa una parte algebraica elemental, que reduce el cierre del ciclo a la desigualdad (6), de una parte diofántica que descansa en el teorema de Matveev y en una verificación finita, y que puede obtenerse también del resultado de Ellison. El teorema no excluye las palabras con dos o más exponentes aumentados ni, en general, las palabras de paridades alternadas, y no supone avance alguno sobre la existencia de órbitas no acotadas.

El planteamiento sugiere algunas cuestiones que quedan abiertas.

Perturbaciones de los ciclos negativos. La palabra del ciclo $-1 \mapsto -1$ es (1), y las palabras que se obtienen de $(1)^k$ aumentando un único exponente son exactamente las de los ciclos formados por un solo circuito; el teorema de Steiner [7] puede leerse, por tanto, como la exclusión de las perturbaciones de ese ciclo por un único incremento, entre las que solo el ciclo trivial, de palabra (2), se realiza. El teorema 2.1 trata las perturbaciones del ciclo $-5 \mapsto -7 \mapsto -5$ por un único incremento, y de nuevo la única realización positiva es el ciclo trivial. Es natural preguntarse por las perturbaciones análogas del tercer ciclo negativo conocido, el de -17, cuya palabra es $(1, 1, 1, 2, 1, 1, 4)$, y, más en general, si las identidades de cierre del lema 3.1 tienen análogos para las palabras de los ciclos negativos que permitan repetir el argumento.

Varios incrementos. Las identidades de cierre se generalizan sin dificultad a las palabras con dos o más exponentes aumentados, pero su segundo miembro deja de ser de la forma $c\,(h-1)\,9^{q-1}$ con c pequeño y contiene, en general, factores primos grandes que dependen de las posiciones de los incrementos. El argumento del lema de enlace no proporciona entonces por sí solo una cota de D comparable a $D \le h - 1$, y la exclusión de estas familias requeriría una idea adicional.

Referencias

[1] Y. Bugeaud, M. Mignotte y S. Siksek, Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations I. Fibonacci and Lucas perfect powers, *Annals of Mathematics* **163**, n.º 3 (2006), 969–1018. doi:10.4007/annals.2006.163.969.

[2] W. J. Ellison, On a theorem of S. Sivasankaranarayana Pillai, *Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux* (1970–1971), exposé n.º 12, 10 pp. https://www.numdam.org/item/STNB_1970-1971____A10_0/.

[3] G. H. Hardy y E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6.ª ed., revisada por D. R. Heath-Brown y J. H. Silverman, Oxford University Press, Oxford, 2008.

[4] C. Hercher, There are no Collatz m-cycles with $m \leq 91$, *Journal of Integer Sequences* **26** (2023), artículo 23.3.5. La numeración de las definiciones citadas es la de la versión arXiv:2201.00406v3.

[5] E. M. Matveev, An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers. II, *Izvestiya: Mathematics* **64**, n.º 6 (2000), 1217–1269. doi:10.1070/IM2000v064n06ABEH000314.

[6] J. Simons y B. de Weger, Theoretical and computational bounds for m-cycles of the $3n+1$-problem, *Acta Arithmetica* **117** (2005), 51–70.

[7] R. P. Steiner, A theorem on the Syracuse problem, en *Proceedings of the 7th Manitoba Conference on Numerical Mathematics* (1977), Winnipeg, 1978, 553–559.