Perturbaciones de la palabra $(1,2)^q$ en los ciclos de Collatz: reducción general y obstrucciones aritméticas al cierre

Miguel Cerdá Bennassar
ORCID 0000-0001-8360-1933

Octubre de 2026

Resumen

Se estudian las palabras de exponentes obtenidas al aumentar posiciones distintas de $(1,2)^q$ por enteros positivos. Se demuestra una identidad telescópica de cierre, se normalizan cíclicamente los parámetros sin perder asignaciones ni palabras periódicas y se obtiene una reducción efectiva para cualquier número fijo de posiciones modificadas. La coordinación de orientaciones elimina la pérdida de decaimiento que presenta el argumento basado únicamente en el mayor hueco. Una prueba asistida por ordenador, con una cola común y dos comprobaciones exactas de la región finita, excluye de uno a diecinueve incrementos, salvo las representaciones del ciclo trivial. Se determina también la forma normal de Smith del sistema entero comprimido: las condiciones locales en los primos 2 y 3 son siempre compatibles y la obstrucción de integralidad es global. Para incrementos unitarios separados por huecos 5 y 6 se obtiene una exclusión por fase mínima, una banda crítica explícita y un teorema que delimita los filtros de profundidad fija. Finalmente se excluye una clase de dos bloques homogéneos mediante divisibilidad y una cota de Ellison. No se demuestra la exclusión de todas las perturbaciones ni se formula una afirmación de prioridad bibliográfica.

Índice

1. Introducción y resultados **2**

2. Palabras y criterio exacto de realización **3**

3. Normalización cíclica e identidad telescópica **4**

3.1. Mayor hueco y estabilizadores 4

3.2. La identidad para cualquier número de incrementos 5

3.3. Máximos exactos y envolventes 5

4. Coordinación de orientaciones y reducción efectiva **6**

4.1. Agrupación en pares activos 6

4.2. La dependencia trascendente y su aplicación 7

4.3. Una cola común para $1 \le m \le 19$ 8

5. Cierre finito y exclusión hasta diecinueve incrementos **9**

6. El sistema entero y la obstrucción global **10**

7. Dos condiciones uniformes dentro de la familia **11**

8. Huecos cinco y seis: fase mínima y banda crítica **12**

8.1. Cobertura de ramas y estrechamiento certificado 13

9. Límites de las ventanas y estructura binaria **14**

9.1. Centros, retículas y pertenencia exacta 15

10. Exclusión de dos bloques homogéneos **16**

11. Conclusiones y cuestiones abiertas **17**

A. Certificación y reproducción **18**

A.1. Encierros racionales y fracciones continuas 18

A.2. Algoritmo finito completo 18

A.3. Suplemento de esta versión 19

1. Introducción y resultados

En la aplicación acelerada de Collatz sobre los impares, una trayectoria se describe por las divisiones exactas por potencias de dos que siguen a cada operación $n \mapsto 3n+1$. La palabra $(1,2)$ corresponde al ciclo negativo $-5 \mapsto -7 \mapsto -5$. Este artículo considera sus perturbaciones positivas: se incrementan exactamente m posiciones distintas de $(1,2)^q$, con incrementos enteros positivos. No se restringe su magnitud ni se exige que la palabra tenga período mínimo.

El objetivo no es excluir todas las palabras de Collatz. La restricción a una base alternada permite obtener identidades especiales y estudiar qué parte de la información de cierre conservan las cotas reales, las congruencias y los denominadores. La distinción entre una órbita racional positiva y una órbita de enteros positivos será esencial.

Los resultados principales son los siguientes.

1. Una identidad telescópica válida para todo m y una normalización por huecos que conserva todas las realizaciones (sección 3).
2. Una reducción efectiva para cada m fijo, sin barrera en $m = 19$, y la exclusión completa de $1 \le m \le 19$, salvo el ciclo trivial (secciones 4 y 5).
3. Un sistema entero equivalente al cierre, con determinante D y forma de Smith $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, D)$ (sección 6).

4. Exclusiones para clases de huecos con m arbitrario, junto con una delimitación de los filtros locales y binarios (secciones 8–9).

5. La exclusión de dos bloques de transiciones homogéneas (sección 10).

La herramienta trascendente principal es Matveev, en la formulación de Bugeaud, Mignotte y Siksek [1, Teorema 9.4]. Se especifican las hipótesis y las constantes, y se separa ese teorema externo de las comprobaciones racionales e enteras del suplemento. El resultado de Ellison se emplea únicamente en la sección de dos bloques.

Comentario 1 (El número de incrementos no es el número de circuitos). Nuestro parámetro m cuenta posiciones modificadas. No es el número de mínimos locales de los llamados m-ciclos. Hercher [4, Definiciones 1, 5 y 6 de la versión v3] cuenta los mínimos de la sucesión completa de la aplicación $C(n) = n/2$ para n par y $C(n) = (3n+1)/2$ para n impar, incluidos los términos pares.[1] En una palabra de exponentes, cada exponente al menos dos cierra un circuito; un exponente uno prolonga la sucesión de pasos sobre impares. En nuestra familia ese número es q más el número de posiciones de base uno que se modifican. Puede crecer sin cota con q, aunque m permanezca fijo. Por ello no se deben identificar los dos tipos de resultado.

2. Palabras y criterio exacto de realización

Definición 2. Una palabra $\mathbf{k} = (k_0, \dots, k_{L-1})$, con $k_j \geq 1$, se *realiza* si existen enteros impares positivos n_j, con índices módulo L, tales que

$$2^{k_j} n_{j+1} = 3n_j + 1. \tag{2.1}$$

Se permiten repeticiones de un período menor. Una realización es trivial si todos sus impares son uno.

Pongamos

$$K_0 = 0, \qquad K_j = \sum_{h<j} k_h, \qquad R(\mathbf{k}) = \sum_{j=0}^{L-1} 3^{L-1-j} 2^{K_j}, \qquad D(\mathbf{k}) = 2^{K_L} - 3^L.$$

La composición de (2.1) da $Dn_0 = R$.

Proposición 3 (Criterio de cierre)**.** *La palabra se realiza si y solo si $D > 0$ y $D \mid R$. En ese caso su realización, con el punto inicial fijado, es única.*

Demostración. La necesidad y la unicidad se siguen de $Dn_0 = R > 0$. Para la suficiencia, cada rotación tiene numerador positivo R_j y la misma cantidad D, y la composición afín tiene una única órbita racional cerrada $n_j = R_j/D$. Si $\mathbf{k}'$ es la rotación de una posición a la izquierda, separar el primer sumando del numerador proporciona

$$2^{k_0} R(\mathbf{k}') = 3R(\mathbf{k}) + D. \tag{2.2}$$

Como $\gcd(D, 6) = 1$, la divisibilidad $D \mid R$ se propaga a todas las rotaciones. Así todos los n_j son enteros positivos. Ninguno es par: si lo fuera, $3n_j + 1$ sería impar, en contradicción con (2.1). Los cocientes son impares, de manera que los k_j son las valoraciones exactas prescritas. □

[1] Versión cuya numeración se utiliza: https://arxiv.org/pdf/2201.00406v3.

En adelante $L = 2q$. Partimos de $k^0_{2r} = 1$, $k^0_{2r+1} = 2$; elegimos posiciones $p_1 < \cdots < p_m$ e incrementos $u_t \geq 1$. Definimos

$$s = \sum_t u_t, \quad H = 2^s, \quad N = 3q + s, \quad D = H8^q - 9^q, \quad X = \frac{D}{9^q}, \quad Y = \frac{D}{H8^q} = \frac{X}{1+X}. \tag{2.3}$$

Lema 4 (Producto y frontera trivial)**.** *Toda realización satisface $m \leq s \leq q$. Si $s = q$, necesariamente $q = m$, se modifican todas las posiciones pares con incremento uno, y la palabra es $(2)^{2m}$, realizada únicamente con $n_j = 1$.*

Demostración. Multiplicar (2.1) y cancelar los n_j da

$$2^{3q+s} = \prod_{j=0}^{2q-1} \left(3 + \frac{1}{n_j}\right) \leq 4^{2q}.$$

De aquí $s \leq q$, mientras que $s \geq m$ es inmediato. La igualdad exige $n_j = 1$ en todos los factores y, por (2.1), $k_j = 2$. Esto obliga exactamente a la modificación descrita, que también es suficiente. □

Lema 5 (Una cota elemental para el caso no trivial)**.** *Una realización no trivial satisface $q > 5m/2$.*

Demostración. Un ciclo no trivial no contiene uno; tampoco contiene tres, pues su trayectoria acelerada es $3 \mapsto 5 \mapsto 1$. Todos sus impares son, por tanto, al menos cinco. La identidad del producto da $2^s \leq (32/25)^q$, luego $2^m \leq (32/25)^q$. Como $32^5 < 4 \cdot 25^5$, resulta $(32/25)^{5/2} < 2$, lo que excluye $q \leq 5m/2$. □

3. Normalización cíclica e identidad telescópica

3.1. Mayor hueco y estabilizadores

Las posiciones modificadas determinan m huecos dirigidos positivos que suman $2q$. Sea G uno de los mayores. Entonces $G \geq \lceil 2q/m \rceil \geq 2$, pues $q \geq m$. Elegimos como primer incremento el que sigue a ese hueco y rotamos un número par de posiciones. En el representante obtenido,

$$p_1 = \sigma \in \{0, 1\}, \qquad p_m = \sigma + 2q - G \leq 2q - 1. \tag{3.1}$$

La rotación transporta los incrementos junto con sus posiciones, sin invertir el orden dirigido. El numerador se recalcula mediante su definición o (2.2); no es invariante por rotación.

Lema 6 (Cobertura y estabilizadores)**.** *La normalización (3.1) cubre toda palabra admisible. Los empates entre huecos máximos y los estabilizadores por rotaciones pares no invalidan la cobertura. Si una palabra es repetición t veces de un bloque de longitud par, su cociente de cierre coincide con el del bloque; por ello ninguna prueba requiere primitividad.*

Demostración. Cada hueco máximo permite la construcción anterior, que conserva la divisibilidad por (2.2). Los empates pueden generar varios representantes, pero nunca eliminan todos. Las rotaciones pares forman un grupo cíclico de orden q; un estabilizador solo reduce el tamaño de la órbita de representantes. No se divide un recuento por q ni se presupone acción libre.

Para la última afirmación, sean $A = 2^K$ y $B = 3^L$ los productos de un bloque, con numerador R_0. La repetición t veces tiene

$$D_t = A^t - B^t, \qquad R_t = R_0 \sum_{j=0}^{t-1} A^j B^{t-1-j}.$$

Como $A \neq B$, $R_t/D_t = R_0/(A-B)$. Si el bloque tiene longitud par, también q, m, s se multiplican por t. No se introduce ninguna condición de coprimalidad. □

3.2. La identidad para cualquier número de incrementos

Sea $W_j = 3^{2q-1-j}2^{K_j^0}$ el peso de la base y $S_p = \sum_{j=0}^{p} W_j$, con suma inclusiva. Las progresiones geométricas dan

$$R_0 = 5(9^q - 8^q), \quad W_{2r} = 3\,8^r 9^{q-r-1}, \quad W_{2r+1} = 2\,8^r 9^{q-r-1},$$
$$5 \cdot 9^q - S_{2r} = 42\,8^r 9^{q-r-1}, \qquad 5 \cdot 9^q - S_{2r+1} = 40\,8^r 9^{q-r-1}. \tag{3.2}$$

Escribimos $p_t = 2r_t + \epsilon_t$, $a_t = 2^{u_t}$, $A_0 = 1$, $A_t = a_1 \cdots a_t$, y $c_0 = 42, c_1 = 40$.

Teorema 7 (Identidad telescópica)**.** *Para cualquier elección de posiciones e incrementos,*

$$R + 5D = \sum_{t=1}^{m} A_{t-1}(a_t - 1) c_{\epsilon_t} 8^{r_t} 9^{q-1-r_t}. \tag{3.3}$$

Demostración. El peso de índice j se multiplica por el producto de los a_t con $p_t < j$. Ese producto es $H - \sum_{p_t \geq j} A_{t-1}(a_t - 1)$. Por tanto $R = HR_0 - \sum_t A_{t-1}(a_t - 1)S_{p_t}$. Usando $\sum_t A_{t-1}(a_t - 1) = H - 1$, añadiendo $5D$ y sustituyendo (3.2), se obtiene la identidad. □

En el representante normalizado sea $r_* = r_m \leq q - 1$. Entonces

$$R + 5D = 9^{q-1-r_*} F, \qquad F = \sum_t A_{t-1}(a_t - 1) c_{\epsilon_t} 8^{r_t} 9^{r_* - r_t} > 0. \tag{3.4}$$

La condición de realización implica $D \mid F$, y por tanto $D \leq F$. Además,

$$F < 42H9^{r_*}, \qquad r_* \leq q(1 - 1/m) + \tfrac{1}{2}.$$

En consecuencia,

$$Y < 126 \left(\frac{9^{1-1/m}}{8} \right)^q. \tag{3.5}$$

La base del decaimiento es favorable exactamente para $m \leq 18$: esto se comprueba con $8^{18} > 9^{17}$ y $8^{19} < 9^{18}$. Es un límite de esta estimación, no una frontera de existencia.

3.3. Máximos exactos y envolventes

Para un patrón fijo definimos $V_t = c_{\epsilon_t} 8^{r_t} 9^{r_* - r_t}$. Estos pesos disminuyen estrictamente con p_t; entre posiciones consecutivas sus razones son 20/21 y 14/15. La suma (3.4) puede escribirse

$$F = HV_m - V_1 + \sum_{t=1}^{m-1} A_t (V_t - V_{t+1}).$$

Fijados s, m, todos los A_t se maximizan poniendo el excedente en el primer incremento. Resulta el máximo exacto

$$F_{\max} = (2^{s-m+1} - 1)V_1 + \sum_{t=2}^{m} 2^{s-m+t-1} V_t. \tag{3.6}$$

Fijados q, m, G, σ, escribamos $T = 2q - G$. Todo patrón normalizado está entre los extremos componente a componente

$$p_t^- = \sigma + \max\{t-1, T-(m-t)G\}, \tag{3.7}$$
$$p_t^+ = \sigma + \min\{(t-1)G, T-(m-t)\}. \tag{3.8}$$

Ambos son admisibles: empiezan en σ, terminan en $\sigma + T$ y sus diferencias están entre uno y G. Las desigualdades proceden de contar los huecos restantes, cada uno entre uno y G. Como los pesos decrecen, la envolvente superior exacta es

$$\mathcal{U}(q, m, G, \sigma, s) = F_{\max}(p_1^-, \ldots, p_m^-; s). \tag{3.9}$$

Si $D > \mathcal{U}$, se descarta todo el grupo sin enumerar patrones.

Poniendo $C(P) = V_1 + \sum_{t=2}^{m} 2^{t-2} V_t$, se tiene

$$2^{m-1}(D - F_{\max}) = 2^s\big(2^{m-1}8^q - C(P)\big) + 2^{m-1}(V_1 - 9^q). \tag{3.10}$$

Su signo es afín en 2^s. El conjunto de sumas que sobrevive a esta comparación es un intervalo entero, calculable exactamente. Esta observación evita sustituir un máximo por una estimación numérica no certificada.

4. Coordinación de orientaciones y reducción efectiva

4.1. Agrupación en pares activos

Agrupamos la base en pares. Un par modificado se escribe $(1+u, 2+v)$, con $u, v \geq 0$, $u+v > 0$. Sean $a = 2^u$, $b = 2^v$, $h = ab$ y $\rho = 9/8$. En la coordenada desplazada $z = n + 5$, su aplicación es

$$z_{\text{salida}} = \frac{\rho}{h} z_{\text{entrada}} + C, \qquad C = \frac{40h + 2a - 42}{8h}. \tag{4.1}$$

Se verifica directamente componiendo los dos pasos. El par base tiene $h = 1, C = 0$; en un par activo

$$5(1 - h^{-1}) \leq C \leq \frac{21}{4}(1 - h^{-1}). \tag{4.2}$$

Las diferencias de los dos miembros con C son $(a-1)/(4h)$ y $(b-1)/(4b)$, respectivamente.

Sean M los pares activos, $\lceil m/2 \rceil \leq M \leq m$, y $g_i \geq 1$ sus distancias cíclicas, en unidades de pares, con $\sum_i g_i = q$. Para la salida activa $w_i = n_i + 5$,

$$w_{i+1} = \frac{\rho^{g_i}}{h_{i+1}} w_i + C_{i+1}. \tag{4.3}$$

En una realización $w_i \geq 6$.

La orientación que empieza en el siguiente par activo verifica

$$\frac{F_i}{D} = \frac{w_i}{8^{g_i - 1}}. \tag{4.4}$$

En efecto, recorrer los $g_i - 1$ pares base multiplica w_i por $9^{g_i-1}/8^{g_i-1}$; sustituirlo en (3.4) da la fórmula. Por tanto

$$w_i \geq 8^{g_i-1} \quad \text{para todo } i. \tag{4.5}$$

Dentro de un mismo hueco el cociente es $w_i/8^{t-1}$ y decrece con t. Así basta coordinar las M orientaciones activas, no las q orientaciones pares. Se conserva una misma asignación: no se intercambian indebidamente máximo y mínimo entre orientaciones.

Teorema 8 (Reducción para cada m fijo)**.** *Definamos*

$$\alpha = \frac{\log 9}{\log 8}, \qquad S_m = 1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-1}, \qquad K_m = \left\lceil \frac{17^m - 16^m}{16^{m-1}} \right\rceil .$$

Toda realización positiva satisface

$$Y \leq 42m\, 8^{-q/S_m} \leq 42m\, 8^{-q/K_m}. \tag{4.6}$$

Para cada m fijo, estas desigualdades y una cota de Matveev proporcionan una cota superior efectiva para q.

Demostración. Sea $C_* = 21/4$. Multiplicando (4.3),

$$1 - Y = \prod_i \left(1 - \frac{C_i}{w_i}\right), \qquad Y \leq \sum_i \frac{C_i}{w_i} \leq \frac{MC_*}{w_{\min}}.$$

Así $w_{\min} \leq 21M/(4Y)$. Por (4.2), $h_{i+1} \geq 2$ y $w_i \geq 6$,

$$w_{i+1} \leq \rho^{g_i} w_i,$$

pues $\rho^{g_i} w_i > C_*$. Poniendo $t_i = \log_8(8w_i)$, (4.5) da $g_i \leq t_i$, y la propagación da $t_{i+1} \leq \alpha t_i$. Elegimos como origen $w_{\min}$ y sumamos:

$$q \leq S_M \log_8(42M/Y).$$

Esto implica la primera cota, usando $M \leq m$. La comparación entera $9^{16} < 8^{17}$ da $\alpha < 17/16$; la suma geométrica correspondiente es $(17^m - 16^m)/16^{m-1}$, que está acotada por K_m. La efectividad se demuestra en el apartado siguiente. □

4.2. La dependencia trascendente y su aplicación

La versión real del teorema de Matveev [2], en la forma de [1, Teorema 9.4], afirma lo siguiente.[2] Si $\eta_1, \ldots, \eta_n$ son algebraicos positivos de un cuerpo real de grado d, $b_i \in \mathbb{Z}$, $\Lambda = \eta_1^{b_1} \cdots \eta_n^{b_n} - 1 \neq 0$, $B \geq \max |b_i|$ y $A_i \geq \max\{d\, h(\eta_i), |\log \eta_i|, 0{,}16\}$, entonces

$$\log |\Lambda| > -1{,}4\, 30^{n+3} n^{4{,}5} d^2 (1 + \log d)(1 + \log B) A_1 \cdots A_n.$$

Aquí h es la altura logarítmica absoluta.

En nuestro problema se toman $\eta_1 = 2, \eta_2 = 3$, $d = 1$, $n = 2$, $b_1 = N$, $b_2 = -2q$, $B = 4q$ y $A_1 = \log 2, A_2 = \log 3$. La cota $B = 4q$ sigue del lema 4; $\Lambda = X$ no es cero porque 2^N es par y 9^q impar. La constante especializada es

$$C_0 = \frac{7}{5}\, 30^5\, 2^{9/2} \log 2 \log 3. \tag{4.7}$$

[2] Texto del enunciado utilizado: https://arxiv.org/pdf/math/0403046. Referencia publicada: https://doi.org/10.4007/annals.2006.163.969.

Si $A = 84m$, $K = K_m$ y $A8^{-q/K} < 1$, de (4.6) se deduce $0 < X < A8^{-q/K}$. Por tanto

$$q\frac{\log 8}{K} - C_0(1 + \log(4q)) - \log A < 0.$$

El miembro izquierdo tiende a infinito y su derivada es positiva desde un punto efectivo. Esto proporciona una cota finita para q. No demuestra por sí solo inexistencia para todo m.

4.3. Una cola común para $1 \le m \le 19$

Como $K_{19} = 35$ y $K_m \le 35$ para $m \le 19$, basta la cota común

$$0 < X < \varepsilon(q) := 1596\, 8^{-q/35} \tag{4.8}$$

en la región donde $\varepsilon(q) < 1$. La aritmética racional del suplemento verifica la positividad de la función anterior y su derivada en $Q_* = 2^{39}$, y por tanto

$$q < Q_* = 549755813888. \tag{4.9}$$

Para $q \ge 234$ se verifican las comparaciones enteras

$$(2000 \cdot 1596 \cdot 234)^{35} < 693^{35}8^{234}, \qquad 8 \cdot 234^{35} > 235^{35},$$

y $\log 2 > 693/1000$. La segunda comparación mantiene decreciente $q\varepsilon(q)$ a partir de ese punto. Así $2q\varepsilon(q)/\log 2 < 1$ para todo $q \ge 234$.

Sea $\beta = \log(9/8)/\log 2$. De $0 < L = \log(1 + X) = s\log 2 - q\log(9/8) < \varepsilon(q)$ resulta

$$0 < \frac{s}{q} - \beta < \frac{\varepsilon(q)}{q\log 2} < \frac{1}{2q^2}.$$

El criterio de Legendre obliga a que la fracción reducida de s/q sea un convergente p_k/b_k de β. Escribimos explícitamente $s = rp_k, q = rb_k$, con $r = \gcd(s, q)$. La desigualdad de Legendre sigue siendo válida con denominador $b_k \le q$; no se exige $r = 1$.

Los convergentes se calculan a partir de encierros racionales de los logaritmos. El primer denominador que excede Q_* es 753110839881. Los índices pares, numerados desde $k = 0$, dan $L < 0$ y quedan excluidos. Para los impares se usa

$$L(p_k, b_k) > \frac{\log 2}{b_k + b_{k+1}} > \frac{693}{1000(b_k + b_{k+1})}. \tag{4.10}$$

Con $r_{\min} = \max\{1, \lceil 234/b_k \rceil\}$ y $r_{\max} = \lfloor (Q_* - 1)/b_k \rfloor$, basta comprobar

$$\left(\frac{693 r_{\min}}{1000(b_k + b_{k+1})}\right)^{35} 8^{r_{\min} b_k} > 1596^{35}. \tag{4.11}$$

La cota inferior crece con r y $\varepsilon(rb_k)$ decrece, por lo que se cubren todos los múltiplos.

Las once comparaciones son estrictas. Pueden hacerse directamente o mediante una cota binaria. Por ejemplo, sea

$$M_k = \left\lfloor \frac{(1000 \cdot 1596(b_k + b_{k+1}))^{35}}{(693 r_{\min})^{35}} \right\rfloor$$

y sea ℓ_k el número de dígitos binarios de M_k. Si $3r_{\min} b_k \ge \ell_k$, entonces $8^{r_{\min} b_k} \ge 2^{\ell_k} > M_k$, que certifica (4.11). No es necesario desarrollar la potencia de exponente gigantesco. Los enteros y encierros se reproducen por dos rutas. Se excluye así toda la cola $q \ge 234$ para todos los $1 \le m \le 19$.

k	p_k	b_k	$r_{\text{mín}}$
1	1	5	47
3	8	47	5
5	26	153	2
7	1269	7468	1
9	4033	23734	1
11	32377	190537	1
13	916004	5390637	1
15	10043667	59106470	1
17	67557657	397573379	1
19	559632586	3293409335	1
21	11684726649	68764022656	1

Cuadro 1: Convergentes superiores que deben comprobarse en la cola común. Los siguientes denominadores y todas las comparaciones enteras se reconstruyen en el suplemento, no se presuponen.

5. Cierre finito y exclusión hasta diecinueve incrementos

Lema 9 (Paridad de los huecos máximos)**.** *Si un máximo G es impar y $2q > m(G-1)$, algún hueco máximo termina en una posición par.*

Demostración. Supongamos lo contrario. Los huecos impares que van de una posición impar a una par son como máximo $G-2$; los de sentido opuesto son como máximo G. Hay igual número de ambos tipos en el círculo. Los huecos pares son como máximo $G-1$. Agrupar los cambios opuestos da $2q \le m(G-1)$, contradicción. □

Para verificar $q < 234$ se aplican, en este orden, los siguientes argumentos exhaustivos. Primero se eliminan $q < m$, $s > q$, la frontera $s = q$ y $q \le 5m/2$. Para cada fila restante basta

$$m+1 \le q \le 233, \quad m \le s \le q-1, \quad \lceil 2q/m \rceil \le G \le 2q-m+1, \quad \sigma \in \{0,1\}.$$

Los casos $D \le 0$ no se realizan. En los demás se aplica la envolvente (3.9). La afinidad (3.10) permite resolver simultáneamente todos los valores de s. La tabla 2 recoge los grupos que llegan al examen de la envolvente en la segunda implementación.

m	Grupos	m	Grupos	m	Grupos
1	0	8	10	15	482
2	0	9	16	16	813
3	0	10	26	17	1153
4	0	11	47	18	1468
5	0	12	89	19	1730
6	0	13	165		
7	1	14	288		

Cuadro 2: Comprobación común de la región $q < 234$. Un grupo fija (q, m, G, σ) y puede contener muchas sumas y patrones. No son recuentos de palabras ni de divisibilidades.

La única fila y suma que requiere coordinar orientaciones es $(q, s) = (153, 26)$ para $m = 18, 19$, con $G = 17, \sigma = 1$. El lema 9 permite una orientación de fase cero para la misma asignación. Su envolvente es estrictamente menor que D. Esta comprobación se hace con enteros exactos.

Hay también un cierre independiente mediante capacidad. Desde $B_0 = 21m/(4Y)$ definimos $G(B)$ por $8^{G(B)-1} \le B < 8^{G(B)}$ y

$$B_{j+1} = \text{máx}\left\{B_j, \frac{\rho^{G(B_j)}B_j + 21/4}{2}\right\}.$$

Las cotas (4.2) y (4.5) implican $q \le \sum_{j=0}^{m-1} G(B_j)$. Se añaden entradas ficticias si $M < m$, sin reducir el mayorante. En las dos filas excepcionales esa capacidad es $6m < 153$. No se necesitan nuevas divisibilidades individuales en esta región.

Teorema 10 (Exclusión con número acotado de incrementos)**.** *Para $1 \le m \le 19$, una palabra obtenida aumentando exactamente m posiciones distintas de $(1,2)^q$ por enteros positivos no se realiza, excepto si $q = m$ y la palabra es $(2)^{2m}$. La excepción tiene únicamente la realización $n_j = 1$. El resultado incluye todas las rotaciones y repeticiones.*

Demostración. La frontera y los dominios imposibles se resuelven por los lemas 4 y 5. La sección anterior excluye $q \ge 234$. Las envolventes, el lema de paridad y el filtro de capacidad, con los bucles finitos descritos arriba, excluyen $q < 234$. Los dos programas del suplemento efectúan por separado la cola y el cierre finito. La cobertura de rotaciones y estabilizadores se justifica en el lema 6. □

Corolario 11 (Un incremento y las dos familias iniciales)**.** *Las palabras $(u+1,2)(1,2)^{q-1}$ y $(1,u+2)(1,2)^{q-1}$, con $u, q \ge 1$, no se realizan salvo $(u,q) = (1,1)$ en la primera. En particular, las familias con $u = 2t$, $t \ge 1$, quedan completamente excluidas.*

Demostración. Son las dos fases posibles de $m = 1$. La excepción del teorema es $(2,2)$. □

6. El sistema entero y la obstrucción global

Para el par activo i usamos a_i, b_i, h_i de (4.1). La integralidad en los $g_i - 1$ pares base exige

$$w_i = 2\,8^{g_i-1}t_i, \qquad t_i \in \mathbb{Z}.$$

Sustituir en (4.3) da

$$A_i t_i - B_{i-1}t_{i-1} = c_i, \qquad A_i = h_i 8^{g_i}, \quad B_i = 9^{g_i}, \quad c_i = 20h_i + a_i - 21. \tag{6.1}$$

Todos los índices son cíclicos. La condición de positividad explícita es $2\,8^{g_i-1}t_i \ge 6$.

Proposición 12 (Equivalencia exacta)**.** *El sistema (6.1) con t_i enteros y la cota de positividad anterior equivale a una realización de la palabra. Bajo $D > 0$, la solución racional es única y su integralidad implica esa positividad.*

Demostración. La necesidad ya se ha demostrado. Recíprocamente, $n_i = 2\,8^{g_i-1}t_i - 5$ es impar positivo. Tras j pares base, su valor es $2\,9^j 8^{g_i-1-j}t_i - 5$, para $0 \le j \le g_i - 1$. Mientras queda un par base, el impar intermedio es $3\,9^j 8^{g_i-1-j}t_i - 7$; ambos son positivos y verifican los exponentes $1, 2$.

Para el par activo i, el impar intermedio debe ser $y_i = (4b_i n_i - 1)/3$. Reducir su ecuación de llegada módulo tres proporciona $(-1)^{g_i}t_i \equiv 2 + b_i \pmod 3$. Esta congruencia asegura $3 \mid 4b_i n_i - 1$. Así y_i es entero impar y $y_i \ge n_i \ge 1$. La propia ecuación (6.1) equivale a los dos

pasos $3x_{i-1}+1 = 2a_i y_i$ y $3y_i+1 = 4b_i n_i$, donde x_{i-1} es la entrada al par activo. Los cocientes impares prueban la exactitud de las valoraciones.

Finalmente, bajo $D > 0$, el cierre original tiene todas sus coordenadas racionales positivas R_j/D. Por unicidad, coinciden con las reconstruidas a partir del sistema. Si estas son enteras, son positivas y al menos uno, lo que recupera la cota indicada. □

Teorema 13 (Determinante, Smith y compatibilidad local)**.** *La matriz L de (6.1) satisface*

$$\det L = D, \qquad \mathrm{Smith}(L) = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, D) \quad (D > 0).$$

Para cualesquiera $r, t \geq 0$ el sistema tiene una única solución módulo $2^r 3^t$, compatible con todos sus levantamientos.

Demostración. En el determinante solo contribuyen el producto diagonal y el ciclo completo, de donde $\det L = \prod_i A_i - \prod_i B_i = D$. Para $M = 1$ esta es la única entrada. Para $M \geq 2$, un menor de orden $M-1$ es una potencia de dos: se obtiene borrando la fila y columna cero. Otro, al borrar la fila $M-1$ y la columna $M-2$, tiene valor absoluto $B_{M-1}\prod_{i=0}^{M-3} B_i$, una potencia de tres. Son coprimos. El máximo común divisor de todos esos menores es uno; todos los factores invariantes salvo el último son uno, y el último es D. Como $\gcd(D, 6) = 1$, la adjunta hace invertible L en cada uno de los módulos indicados. La unicidad garantiza la compatibilidad al reducir de un módulo a otro. □

Proposición 14 (Denominador común)**.** *Todas las coordenadas t_i y todos los impares racionales del cierre tienen el mismo denominador reducido*

$$d = \frac{D}{\gcd(D, R)}, \qquad \gcd(d, 6) = 1.$$

Demostración. Por Cramer $t_i = T_i/D$ con T_i entero. Para cada $p^e \mid D$, los coeficientes A_i, B_i son unidades módulo p^e. De $A_i T_i - B_{i-1} T_{i-1} = c_i D$ se deduce $\min(e, v_p(T_i)) = \min(e, v_p(T_{i-1}))$. Así $\gcd(D, T_i)$ es independiente de i. Restar cinco y multiplicar por potencias de dos conserva estos denominadores, al igual que los pasos que solo multiplican por unidades respecto de los primos de D. Una coordenada original es R/D, lo que identifica d. □

En particular, la integralidad 2-ádica y 3-ádica no equivale a integralidad ordinaria:

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_2 \cap \mathbb{Z}_3 = \{a/b \in \mathbb{Q} : \gcd(a, b) = 1,\ \gcd(b, 6) = 1\}.$$

No hay M obstrucciones independientes de denominador. La condición global pendiente sigue siendo impedir $\gcd(D, R) = D$. Las cotas reales de varias fases pueden aportar información adicional; la mera existencia de soluciones locales no lo hace.

7. Dos condiciones uniformes dentro de la familia

Proposición 15. *En cualquier realización no trivial de esta familia, todos los impares son al menos* 32763*. Además, si $\delta_0 = \log(131072/131051)$, entonces*

$$\frac{q}{m} \geq c_* := \frac{\log 2 - \delta_0}{\log(9/8)}.$$

Demostración. Sea $w = \min_i w_i$ y elijamos ese origen. Definamos G por $8^{G-1} \le w < 8^G$. De (4.5) se sigue $g_i \le G$ en esa salida, y de (4.2), $w \le w_{i+1} \le (\rho^G w + 21/4)/2$. Para $6 < w < 8$ esto es imposible. Si $w = 6$, la igualdad fuerza $g_i = 1$, $h_{i+1} = 2$ y $C_{i+1} = 21/8$; recorrer el círculo da precisamente la realización trivial. Para $G = 2, 3, 4, 5$ se tiene

$$2 \cdot 8^G - 9^G \in \{47, 295, 1631, 6487\} > 42,$$

lo que también contradice la desigualdad. Luego $w \ge 8^5$. Los pares base aumentan $n + 5$ y el impar intermedio es $(4b\, n_{\text{salida}} - 1)/3 \ge n_{\text{salida}}$, así que todos los impares son al menos $8^5 - 5$.

Ahora $C_i/w_i \le 21/131072$. La identidad del producto da $0 < \log(1 + X) \le M\delta_0 \le m\delta_0$. Como $\log(1 + X) = s \log 2 - q \log \rho$ y $s \ge m$, se obtiene la segunda afirmación. □

Estas condiciones no acotan m. Tampoco la cantidad Y es invariante al repetir una palabra: si se repite t veces, $1 - Y_t = (1 - Y_1)^t$. Por ello el hecho de que Y pueda aproximarse a uno no basta para diagnosticar un ciclo nuevo.

8. Huecos cinco y seis: fase mínima y banda crítica

En esta sección hay exactamente un incremento unitario por par activo: se elige libremente $(2, 2)$ o $(1, 3)$. Por tanto $M = m = s$, $g_i \in \{5, 6\}$, $q = \sum_i g_i$, y (4.3) se convierte en

$$w_{i+1} = \frac{\rho^{g_i}}{2} w_i + \frac{\kappa_{i+1}}{8}, \qquad \kappa_{i+1} \in \{20, 21\}. \tag{8.1}$$

Ponemos $\mu = q/m$, $\gamma = \log 2/\log \rho$ y $\lambda = \rho^\mu/2$. Un cierre positivo exige $\mu < \gamma < 6$.

Lema 16 (Fase mínima)**.** *Existe una fase i tal que, para todo $L \ge 0$,*

$$\sum_{r=1}^{L} g_{i-r} \le \mu L, \qquad \sum_{r=0}^{L-1} g_{i+r} \ge \mu L.$$

En esa fase,

$$w_i \le \frac{21}{8(1 - \lambda)}, \qquad w_i \le \frac{21}{8} \sum_{L \ge 0} \frac{\rho^{\lfloor \mu L \rfloor}}{2^L}. \tag{8.2}$$

Demostración. Sea $S_j = \sum_{r<j} g_r$, extendido por $S_{j+m} = S_j + q$, y $H_j = mS_j - qj$. Elegimos un mínimo de esta función periódica. Las dos desigualdades se siguen de $H_i \le H_{i-L}$ y $H_i \le H_{i+L}$. Al desarrollar (8.1) desde el pasado, los productos de longitud L son como máximo $\rho^{\lfloor \mu L \rfloor}/2^L \le \lambda^L$. El término inicial desaparece al dar infinitas vueltas, pues $\lambda < 1$. Sumar las constantes acotadas por $21/8$ prueba ambas cotas. □

Si $\mu \le a/b < \gamma$, la segunda serie se acota por la cantidad racional

$$\mathcal{H}_{a/b} = \frac{21}{8} \frac{\sum_{r=0}^{b-1} \rho^{\lfloor ar/b \rfloor} 2^{-r}}{1 - \rho^a 2^{-b}}. \tag{8.3}$$

La normalización entera es $w_i = 2\, 8^{g_i - 1} t_i$. Por (8.1),

$$2\, 8^{g_{i+1}} t_{i+1} = 9^{g_i} t_i + \kappa_{i+1}. \tag{8.4}$$

Para cada una de las cuatro transiciones y las dos constantes se calcula la clase $t_i \equiv -\kappa_{i+1}(9^{g_i})^{-1}$ (mód $2\,8^{g_{i+1}}$). Al minimizar sobre las dos constantes, los cuatro mínimos positivos, traducidos a w_i, son

$$307126272, \quad 906067968, \quad 1704656896, \quad 5999624192.$$

La evaluación racional de (8.3) da $\mathcal{H}_{6803/1156} < 19192902$. Se obtiene la siguiente exclusión sin discrepancia.

Teorema 17. *Ninguna palabra de esta clase con $\mu \le 6803/1156$ se realiza, cualquiera que sea m o el orden de los huecos.*

Demostración. En la misma fase mínima, (8.2) da una cota menor que el mínimo exigido por cualquiera de las cuatro transiciones enteras. □

8.1. Cobertura de ramas y estrechamiento certificado

En un hipotético ciclo restante,

$$\frac{6803}{1156} < \mu < \gamma < \frac{8133}{1382}.$$

Las dos comparaciones con γ se deciden por $2^{21565} > 9^{6803}$ y $2^{25781} < 9^{8133}$. Los prefijos futuros y pasados de la fase mínima satisfacen

$$1156 S_L^{+} > 6803 L, \qquad 1382 S_L^{-} < 8133 L.$$

A profundidad futura diecisiete, las ramas posibles son

$$6^{17}, \qquad 6^{p}5\,6^{16-p} \quad (8 \le p \le 16).$$

En efecto, si z_L cuenta los cincos, entonces $1156 z_L < 133 L$ para todos los prefijos. A profundidad pasada tres, las ramas cronológicas son $(5,5,5), (5,6,5), (6,5,5), (6,6,5)$. Son cuarenta contextos en total.

Componer los dieciséis enlaces futuros en (8.4) determina una clase de t_0 módulo 2^{304} o 2^{301}. Componer los tres enlaces pasados determina una clase módulo 3^{30}, 3^{32} o 3^{34}. Más explícitamente, la composición futura tiene la forma

$$t_{16} = \frac{A t_0 + B}{2^{E}}, \quad A = 9^{\sum_{j=0}^{15} g_j}, \quad E = \sum_{j=1}^{16} (1 + 3 g_j).$$

El término B se obtiene componiendo las aplicaciones afines de (8.4). Como A es impar, la clase es $t_0 \equiv -BA^{-1} \pmod{2^{E}}$. La composición inversa pasada tiene la forma $(U t_0 + V)/3^{J}$, con U potencia de dos y $J = 2\sum_{j=-3}^{-1} g_j$; determina $t_0 \equiv -VU^{-1} \pmod{3^{J}}$. La integralidad de los extremos y el dato inicial entero implican la de cada paso intermedio: sus denominadores reducidos dividen a la vez una potencia de dos, por la composición directa, y una potencia de tres, por la inversa. Sus módulos son coprimos. Para cada contexto y elección de sus diecinueve constantes, CRT da un menor representante positivo en $\{1, \dots, 2^{E}3^{J}\}$. Se examinan exactamente $40 \cdot 2^{19} = 20971520$ asignaciones; independizar constantes repetidas si la ventana envuelve un período corto solo sobrecubre el dominio.

El mínimo obtenido es T, cuya expansión exacta se escribe en tres bloques para facilitar su lectura:

$$\begin{aligned} T = {} & 1522560533896581446861359114169 34 \cdot 10^{66} \\ & + 889220308710020776133234443237529 \cdot 10^{33} \\ & + 648251467209518274016269199137452. \end{aligned}$$

Se alcanza en el pasado $(5,5,5)$, futuro $6^{14}5\,6^{2}$, con máscaras futura 14236 y pasada 3, cuyos bits codifican las constantes $20+$ bit en orden cronológico. El suplemento calcula los cuarenta mínimos por dos métodos distintos.

Teorema 18 (Banda crítica necesaria)**.** *Todo ciclo hipotético de esta clase satisface, con* $W = 65536T$*,*

$$0 < \gamma - \frac{q}{m} < \eta := \frac{189}{8W - 21} < 2 \cdot 10^{-101}. \tag{8.5}$$

Además,

$$m \geq 851878702479568823093778099251225545874805104520014.$$

Demostración. En la fase mínima $W \leq w_0 \leq 21/[8(1-\lambda)]$. Si $z = 21/(8W)$, entonces $1-\lambda \leq z$. Usando $-\log(1-z) < z/(1-z)$ y $\log\rho > 1/9$ se obtiene $\gamma - \mu < 9z/(1-z) = \eta$. La comparación decimal se verifica multiplicando enteros.

Para la segunda afirmación se encierran los logaritmos mediante la serie con resto del apéndice A. Se obtiene $L_\gamma < \gamma < U_\gamma$ y vecinos unimodulares $A/B < C/E$ que cubren $(L_\gamma - \eta, U_\gamma)$:

$$\frac{A}{B} = \frac{3494955979037423075910583485187556361126444102939052}{59388039977875233255718933187548943843940016508444 7},$$

$$\frac{C}{E} = \frac{151830690310986419593035428472971575104937947781575 5}{25799830270081649053658876737573610743540493943556 7}.$$

Se verifica $BC - AE = 1$ y que el intervalo está estrictamente entre estos vecinos. Si un racional reducido p/r está entre ellos, los enteros $Cr - Ep$ y $Bp - Ar$ son positivos y $r = (Cr - Ep)B + (Bp - Ar)E \geq B + E$. El valor indicado es $B + E$. El denominador reducido de q/m es como máximo m, de modo que también se cubren todos los múltiplos. □

9. Límites de las ventanas y estructura binaria

Proposición 19 (Supervivencia a profundidad fija)**.** *Fijadas profundidades finitas futura y pasada, existen patrones periódicos de huecos* $5, 6$*, de media racional* $\mu < \gamma$ *arbitrariamente próxima a* γ*, y soluciones enteras positivas de sus ecuaciones locales en esa ventana, compatibles con*

$$\frac{20}{9(1-\lambda)} \leq w_0 \leq \frac{21}{8(1-\lambda)}.$$

No se exige el cierre global de esas soluciones locales.

Demostración. La irracionalidad de γ se deduce de la imposibilidad de $2^{b+3a} = 3^{2a}$. En los huecos mecánicos críticos $g_j^* = \lceil (j+1)\gamma \rceil - \lceil j\gamma \rceil$, los techos de un número finito de índices no nulos son constantes en un intervalo a la izquierda de γ. Fijemos todas las constantes locales a veinte. Las composiciones futura y pasada dan dos clases con módulos coprimos, potencias de dos y tres. CRT proporciona una progresión no acotada de soluciones positivas t_0; para representantes suficientemente grandes también todos los predecesores son positivos.

Sea $w_0 = 65536t_0$. Elegimos racionales μ con $20{,}4 < (\gamma - \mu)w_0 < 20{,}6$, conservando los techos de la ventana. Es posible por densidad. Los huecos $g_j = \lceil (j+1)\mu \rceil - \lceil j\mu \rceil$ son periódicos, y el origen es fase mínima porque $m\lceil j\mu \rceil - qj \geq 0$. Si $x = (\gamma - \mu)\log\rho$, entonces $\lambda = e^{-x}$, $x/(1+x) \leq 1 - e^{-x} \leq x$ y $1/9 < \log\rho < 1/8$. Las dos cotas reales resultan, para w_0 grande, de $20{,}6/8 < 21/8$ y $20{,}4/9 > 20/9$. No se ha impuesto $t_m = t_0$ ni igualdad con el punto fijo periódico global. □

Por tanto, profundizar una ventana fija y comprobar solo estas cotas geométricas no da una contradicción uniforme. Tampoco la pertenencia al intervalo convexo de cierres posibles equivale a pertenencia al conjunto discreto de cierres.

Para describir ese conjunto fijamos todo el patrón. Sea $S_L = \sum_{r=1}^{L} g_{-r}$, $N = 3q + m$ y

$$C_L = 9^{S_L} 2^{N-3S_L-L}, \quad C = \sum_{L=0}^{m-1} C_L, \qquad D = 2^N - 9^q.$$

Los exponentes de dos son no negativos. Con $\kappa_j = 20 + \varepsilon_j$, la ecuación exacta es

$$8Dw_0 - 20C = \sum_{L=0}^{m-1} \varepsilon_{-L} C_L, \qquad \varepsilon_j \in \{0, 1\}. \tag{9.1}$$

Lema 20 (Inyectividad del código)**.** *Para un patrón y un objetivo de cierre fijados, existe a lo sumo una elección binaria en* (9.1)*.*

Demostración. Las valoraciones son $v_2(C_L) = N - 3S_L - L$ y $v_3(C_L) = 2S_L$. La primera decrece estrictamente y la segunda crece estrictamente con L. Si dos elecciones difieren, el término de menor valoración entre los distintos tiene coeficiente 1 o -1; no puede cancelarse. □

Ordenando los pesos por valoración creciente, un objetivo residual r y un peso $p^s u$ exigen $p^s \mid r$ y el dígito $\varepsilon \equiv (r/p^s)u^{-1} \pmod{p}$. Se rechaza si no es cero ni uno, se resta la contribución y al final se exige residuo exactamente cero. Esto decide la pertenencia sin ramificación cuando los pesos están disponibles. No se deduce un coste dependiente solo de la descripción comprimida del período.

Lema 21 (Saturación de módulos auxiliares)**.** *Si h es coprimo con seis y quedan al menos $h - 1$ pesos libres de la forma $2^a 3^b$, sus sumas binarias cubren todas las clases módulo h.*

Demostración. Cada peso es una unidad. Al añadir un peso c, el conjunto de residuos cambia de S a $S \cup (S + c)$. Si S es propio y no vacío, $S + c = S$ es imposible, pues la traslación por la unidad c genera el grupo aditivo completo. Cada paso no saturado aumenta la cardinalidad al menos en uno. Se empieza con $\{0\}$. □

El mismo argumento se aplica al producto de un número finito de módulos auxiliares coprimos con seis. No prueba que todos los objetivos enteros estén representados; muestra por qué esos residuos fijos pueden perder capacidad de descarte.

9.1. Centros, retículas y pertenencia exacta

Es útil separar tres niveles de información. Primero, las condiciones de divisibilidad de un objetivo afín pueden restringir el centro a una clase $w = c + M_0 z$, con $z \in \mathbb{Z}$. Segundo, las cotas reales restringen w a un intervalo $[L, U]$. La intersección es no vacía si y solo si

$$\left\lceil \frac{L - c}{M_0} \right\rceil \le \left\lfloor \frac{U - c}{M_0} \right\rfloor.$$

Esta comparación puede excluir centros, pero no es un criterio suficiente de cierre.

El tercer nivel es la pertenencia de $8Dw - 20C$ al conjunto discreto $\{\sum_L \varepsilon_L C_L : \varepsilon_L \in \{0, 1\}\}$. Sustituir $w = c + M_0 z$ solo transforma el objetivo en una expresión afín en z; no conserva

automáticamente los huecos del conjunto si se reemplaza este por su intervalo convexo. Incluso si la retícula y el intervalo dejan un único centro, queda por decidir esa pertenencia exacta. Por ello una valoración simbólica compatible o la retirada de dígitos extremos, sin rechazo posterior del residuo, no demuestra una nueva exclusión.

10. Exclusión de dos bloques homogéneos

Esta sección mantiene los incrementos unitarios, pero restringe las *transiciones* de (8.1). Denotamos por (g, κ) la aplicación

$$F_{g,\kappa}(w) = \frac{9^g}{2^{3g+1}} w + \frac{\kappa}{8}.$$

La constante corresponde a la llegada: en (8.1) la etiqueta de la transición $i \to i+1$ es (g_i, κ_{i+1}). Se consideran las composiciones $(5, \kappa_5)^a (6, \kappa_6)^b$, con $a, b \geq 1$, y constantes fijas en cada bloque.

Utilizaremos la siguiente consecuencia del resultado de Ellison [3]: para enteros positivos x, y y $x > 27$,

$$|2^x - 3^y| > 2^x e^{-x/10}. \tag{10.1}$$

El enunciado original excluye el conjunto $\{1, \ldots, 11, 13, 14, 16, 19, 27\}$.[3]

Teorema 22 (Dos bloques)**.** *Ninguna composición cíclica $(5, \kappa_5)^a (6, \kappa_6)^b$, con $a, b \geq 1$ y $\kappa_5, \kappa_6 \in \{20, 21\}$ constantes dentro de cada bloque, admite un cierre con todas sus fases enteras positivas. En particular no se realiza ninguna palabra de Collatz que induzca esas transiciones.*

Demostración. Pongamos

$$P = 59049^a, \quad Q = 65536^a, \quad R_b = 531441^b, \quad S = 524288^b, \quad D = QS - PR_b.$$

Aquí R_b no es el numerador de la palabra. Se tiene $q = 5a + 6b$, $N = 16a + 19b$, y $D = 2^N - 9^q$. Un cierre positivo exige $D > 0$. Los puntos fijos de los pasos homogéneos son

$$x = \frac{8192\kappa_5}{6487}, \qquad y = -\frac{65536\kappa_6}{7153}, \qquad \Delta = x - y.$$

Si w entra al primer bloque y t al segundo, resolver sus dos ecuaciones da

$$w = x + \Delta \frac{Q(R_b - S)}{D}, \qquad t = y + \Delta \frac{S(Q - P)}{D}. \tag{10.2}$$

Para $A = 9^g$, $B = 2^{3g+1}$ y $Z_g(v) = (B - A)v - \kappa B/8$ se cumple $Z_g(F_{g,\kappa}(v)) = (A/B) Z_g(v)$. La integralidad de los extremos de un bloque de longitud r implica $B^r \mid Z_g(v)$. Aplicándolo en las dos fases correctas de (10.2),

$$\frac{Z_5(w)}{Q} = \frac{6487\Delta(R_b - S)}{D} > 0, \qquad \frac{Z_6(t)}{S} = -\frac{7153\Delta(Q - P)}{D} < 0$$

son enteros no nulos. Resultan $D \leq 6487\Delta(R_b - S)$ y $D \leq 7153\Delta(Q - P)$.

[3] W. J. Ellison, *On a Theorem of S. Sivasankaranarayana Pillai*, https://www.numdam.org/item/STNB_1970-1971____A10_0.pdf. Se sigue la numeración "Teorema 2" de la introducción y del final de la demostración; el encabezado de la página 12-05 dice "Theorem 3". En el apartado III hay otro teorema 3. La cabecera del exposé lleva el número 12 y Numdam lo cataloga como exposé 10.

Escribimos $H_b = 7153\kappa_5 + 51896\kappa_6$. Entonces $\Delta = 8192H_b/(6487 \cdot 7153)$, $H_b \le 1240029$, y $6487\Delta, 7153\Delta < 2^{21}$. Dividiendo por QS y usando $PR_b < QS$,

$$0 < Y < 2^{21}\,\mathrm{mín}(3^{-10a}, 2^{-19b}) \le 2^{21}3^{-5a}2^{-19b/2} < 2^{21}(3/8)^q.$$

La última comparación se sigue de $3 > 8/3$ y $3^{12} > 2^{17}$. Por (10.1), $N \ge 35$ y $N < (16/5)q$, $Y > e^{-N/10} > e^{-8q/25}$. Las cotas $\log(8/3) > 49/50$ y $\log 2 < 7/10$ dan contradicción para $q \ge 23$.

Quedan los cinco pares de la tabla 3. De las dos divisibilidades de Z y de que D es impar se deduce, sin cancelar 6487 ni 7153,

$$D \mid H_b(R_b - S), \qquad D \mid H_b(Q - P).$$

Para $(a, b) = (1, 1)$, $\gcd(R_b - S, Q - P) = \gcd(7153, 6487) = 1$; se exigiría $D \mid H_b$ con $D > H_b$. En las otras cuatro filas, una de las dos cantidades positivas de la derecha es estrictamente menor que D. Los enteros exactos se muestran en la tabla. Ambas implementaciones del suplemento reconstruyen además los dos centros racionales de cada caso. □

a	b	D	Contradicción
1	1	2978678759	$D > H_b$, con $D \mid H_b$
2	1	398779624833407	$D > H_b(R_b - S)$
3	1	38154963458164053719	$D > H_b(R_b - S)$
1	2	1337216809815415	$D > H_b(Q - P)$
2	2	195820718533800070543	$D > H_b(R_b - S)$

Cuadro 3: Cinco pares finitos, cada uno con cuatro elecciones de constantes.

Comentario 23. El teorema no excluye todos los patrones cuyos huecos sean 5^a6^b si las constantes cambian arbitrariamente dentro de los bloques. Tampoco la divisibilidad aislada produce la contradicción para longitudes grandes: esa parte utiliza explícitamente (10.1).

11. Conclusiones y cuestiones abiertas

La identidad telescópica y la coordinación de orientaciones dan un procedimiento único de reducción para cada m fijo. El cierre común hasta diecinueve incrementos no necesita concatenar enumeraciones históricas: una cola diofántica y un dominio finito común bastan. Las clases de huecos estudiadas muestran que también pueden obtenerse exclusiones con m arbitrariamente grande mediante una hipótesis estructural, sin cerrar el caso general.

El sistema de Smith identifica con precisión una limitación: las compatibilidades locales en dos y tres no son nuevas obstrucciones independientes. El denominador reducido conserva una única condición global. La inyectividad binaria tampoco es un teorema de existencia ni una exclusión: garantiza unicidad de una eventual completación.

Problema 24. Encontrar una propiedad estructural que impida la cancelación completa de D en R para todas las perturbaciones no triviales. Reformular esa cancelación como un sistema equivalente no resuelve el problema.

Problema 25. Extender el teorema de dos bloques a constantes variables dentro de cada bloque, o a un número de bloques no acotado, conservando una ganancia aritmética que no dependa de enumerar períodos.

Problema 26. Determinar si el decodificador exacto de (9.1) admite una representación comprimida cuyos estados dependan de la descripción del patrón y no de su período desarrollado. La compresión de productos matriciales, por sí sola, no prueba esa propiedad.

No se demuestra aquí la inexistencia para todos los m, ni que la banda crítica esté vacía. Una ventana entera compatible con cotas reales no es un ciclo entero. El siguiente avance deberá aprovechar información global que no haya desaparecido al convexificar o al pasar a un número fijo de residuos.

A. Certificación y reproducción

A.1. Encierros racionales y fracciones continuas

Todas las comparaciones trascendentes auxiliares se reducen a encierros racionales exteriores. Para $0 < z < 1$ se utiliza

$$\log \frac{1+z}{1-z} = 2\sum_{j=0}^{n-1} \frac{z^{2j+1}}{2j+1} + E_n, \qquad 0 < E_n < \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)(1-z^2)}.$$

Se calcula $\log 2$ con $z = 1/3$ y $\log 3$ sumando $\log 2$ y $\log(3/2)$, con $z = 1/5$. La segunda ruta utiliza sus propias sumas y restos. La raíz cuadrada de dos de (4.7) se encierra por una raíz cuadrada entera a escala diádica.

Para extraer la fracción continua se exige que ambos extremos del intervalo tengan la misma parte entera. Tras restarla se invierte el intervalo intercambiando extremos. Si un cociente no queda determinado, se reinicia *toda* la extracción con mayor precisión; no se conserva una lista parcial tras volver al valor inicial. Los valores esperados se usan, en su caso, como regresiones separadas y no como premisas de la certificación.

A.2. Algoritmo finito completo

El siguiente esquema especifica el dominio de la prueba asistida por ordenador del teorema 10.

1. Para cada $m = 1, \dots, 19$, recorrer $m + 1 \le q \le 233$ y descartar $2q \le 5m$.
2. Determinar por comparaciones enteras el primer $s \ge m$ con $2^s 8^q > 9^q$; conservar $s \le q-1$.
3. Recorrer $\lceil 2q/m \rceil \le G \le 2q - m + 1$ y las dos fases σ que producen un patrón admisible. Construir p^- y $\mathcal{U}$ mediante sus fórmulas.
4. Usar (3.10) para hallar todas las sumas con $D \le \mathcal{U}$.
5. En los grupos que sobreviven, aplicar la capacidad coordinada, o bien el lema 9 y la envolvente en fase cero.
6. Exigir que no quede ningún grupo pendiente; una discrepancia o una región pendiente provoca error, no éxito.

Las comparaciones previas más gruesas usadas para acelerar el código son consecuencias de $F < 42H9^{r_*}$; no restringen el dominio sin justificación. No se infiere cobertura dividiendo recuentos por tamaños de órbita.

A.3. Suplemento de esta versión

El archivo fuente `perturbaciones_collatz.tex` compila sin archivos bibliográficos externos. El suplemento conserva los programas completos, sus datos de entrada, salidas JSON y manifiestos. El comando principal es

```
python certificar_sintesis.py
```

Recalcula la cola común con las dos rutas, verifica la región finita para todos los $m \leq 19$ y contrasta los cinco pares del teorema de dos bloques. Para la banda y su denominador mínimo:

```
cd suplemento/prolongacion_y_limite_uniforme
python reproducir.py
```

Estas reproducciones pueden tener duraciones distintas: la banda incluye más de veinte millones de asignaciones locales. Las bibliotecas no estándar del núcleo de dos bloques se limitan a SymPy en una ruta; la otra usa solo enteros de Python.

Se distingue entre demostración simbólica, cómputo exhaustivo del dominio finito y controles de regresión o de alteración. Dos implementaciones algorítmicamente distintas no son dos pruebas del teorema externo de Matveev o de Ellison, ni una formalización en un asistente de pruebas. Los hashes certifican integridad de los archivos, no corrección matemática. No se da un DOI de depósito hasta que exista un depósito público real.

Referencias

[1] Y. Bugeaud, M. Mignotte y S. Siksek, *Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations I. Fibonacci and Lucas perfect powers*, Annals of Mathematics **163** (2006), 969–1018. https://doi.org/10.4007/annals.2006.163.969. Versión accesible: https://arxiv.org/pdf/math/0403046.

[2] E. M. Matveev, *An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers. II*, Izvestiya: Mathematics **64** (2000), 1217–1269. https://doi.org/10.1070/IM2000v064n06ABEH000314. La formulación aplicada es la de [1, Teorema 9.4].

[3] W. J. Ellison, *On a Theorem of S. Sivasankaranarayana Pillai*, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1970–1971), exposé 10 según el catálogo, 1–10. https://www.numdam.org/item/STNB_1970-1971____A10_0/.

[4] C. Hercher, *There are no Collatz m-Cycles with* $m \leq 91$, Journal of Integer Sequences **26** (2023), artículo 23.3.5; arXiv:2201.00406v3, 4 de abril de 2023. https://arxiv.org/abs/2201.00406v3. Las definiciones citadas corresponden a esta versión.