Aplicaciones de Collatz generalizadas: deriva logarítmica, ciclos largos y órbitas que escapan

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

Estudiamos seis aplicaciones enteras definidas por clases de residuos, de la forma $T(n) = (m_i n + r_i)/d$ si $n \equiv i \pmod{d}$, con $d \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. El comportamiento de sus órbitas queda gobernado por el signo de la *deriva logarítmica* $\delta = \frac{1}{d} \ln(m_0 m_1 \cdots m_{d-1}/d^d)$. Cuando cada m_i es coprimo con d, demostramos que la sucesión de residuos a lo largo de las órbitas está exactamente equidistribuida módulo d^j, lo que convierte a δ en la tasa media exacta de crecimiento sobre sistemas completos de residuos. Con deriva negativa (f_2, f_4, f_5, f_6), todas las órbitas examinadas hasta 10^6 terminan en ciclos, de longitudes hasta 25, y damos el censo completo. Con deriva positiva (las aplicaciones ternarias F y G) conviven ciclos de longitudes 130, 68 y 65 con una proporción creciente de órbitas que escapan al infinito. Demostramos además que, sin división, es decir, para aplicaciones afines enteras que permutan las clases de residuos, la dinámica se clasifica por completo y no admite comportamiento de tipo Collatz.

1. Introducción

La aplicación de Collatz es el ejemplo más conocido de una familia amplia: aplicaciones enteras que actúan de forma afín sobre cada clase de residuos módulo un entero fijo d, dividiendo después por d. Este escrito examina seis miembros concretos de esa familia y organiza su comportamiento en torno a una sola magnitud, la deriva logarítmica, que mide el crecimiento medio por paso del logaritmo de la órbita.

El texto separa con cuidado tres niveles. Los resultados de las secciones 2, 3 y la proposición 4.2 están demostrados. La interpretación de la deriva como predictor del destino de una órbita concreta es heurística y se presenta como tal. Los censos de la sección 5 son computacionales, con cotas y criterios explícitos, y dan lugar a las conjeturas de la sección 6.

2. Definiciones y propiedades elementales

Definición 2.1. Sea $d \geq 2$. Una *aplicación de Collatz generalizada módulo d* es una aplicación $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, de la forma

$$T(n) = \frac{m_i\, n + r_i}{d} \qquad \text{si } n \equiv i \pmod{d},$$

con enteros $m_i \geq 1$ y r_i tales que $m_i\, i + r_i \equiv 0 \pmod{d}$ para $i = 0, \ldots, d-1$. Llamamos *producto* de T a $P = m_0 m_1 \cdots m_{d-1}$.

La condición $m_i\, i + r_i \equiv 0 \pmod{d}$ garantiza que $T(n)$ es entero. Las seis aplicaciones estudiadas son las siguientes.

Deriva negativa.

$$f_2(n) = \begin{cases} 3n/2 & n \equiv 0 \pmod 2, \\ (n-1)/2 & n \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

$$f_4(n) = \begin{cases} n/4 & n \equiv 0 \pmod 4, \\ (3n+1)/2 & n \equiv 1 \pmod 4, \\ 3n/2 & n \equiv 2 \pmod 4, \\ (3n-1)/2 & n \equiv 3 \pmod 4, \end{cases}$$

$$f_5(n) = \begin{cases} n/5 & n \equiv 0 \pmod 5, \\ (7n+r_i)/5 & n \equiv i \pmod 5,\ i \neq 0, \end{cases} \qquad (r_1, r_2, r_3, r_4) = (3, 1, 4, 2),$$

$$f_6(n) = \begin{cases} n/6 & n \equiv 0 \pmod 6, \\ (7n+6-i)/6 & n \equiv i \pmod 6,\ i \neq 0. \end{cases}$$

Deriva positiva.

$$F(n) = \begin{cases} 2n/3 & n \equiv 0 \pmod 3, \\ (2n+1)/3 & n \equiv 1 \pmod 3, \\ (7n+1)/3 & n \equiv 2 \pmod 3, \end{cases}$$

$$G(n) = \begin{cases} n/3 & n \equiv 0 \pmod 3, \\ (5n+1)/3 & n \equiv 1 \pmod 3, \\ 2n & n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Escritas en la forma de la definición, f_4 tiene $d = 4$ y $(m_i) = (1, 6, 6, 6)$, pues $(3n \pm 1)/2 = (6n \pm 2)/4$ y $3n/2 = 6n/4$; y G tiene $d = 3$ y $(m_i) = (1, 5, 6)$, pues $2n = 6n/3$. La tabla 1 recoge los parámetros.

Aplicación	d	$(m_0, \ldots, m_{d-1})$	P	d^d	$\mathrm{mcd}(m_i, d) = 1\ \forall i$
f_2	2	$(3, 1)$	3	4	sí
f_4	4	$(1, 6, 6, 6)$	216	256	no
f_5	5	$(1, 7, 7, 7, 7)$	2401	3125	sí
f_6	6	$(1, 7, 7, 7, 7, 7)$	16807	46656	sí
F	3	$(2, 2, 7)$	28	27	sí
G	3	$(1, 5, 6)$	30	27	no

Cuadro 1: Parámetros de las seis aplicaciones.

Proposición 2.2. *Las seis aplicaciones envían* $\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{N}$*, y todas fijan el* 0.

Demostración. Basta comprobar $m_i\, i + r_i \equiv 0 \pmod{d}$ rama a rama. Para f_2: $3 \cdot 0 \equiv 0$ y $1 - 1 = 0$. Para f_4, en la forma $(6n \pm 2)/4$: $6 + 2 = 8$ y $18 - 2 = 16$ son múltiplos de 4, y $12 \equiv 0$. Para f_5: $7 + 3 = 10$, $14 + 1 = 15$, $21 + 4 = 25$, $28 + 2 = 30$. Para f_6: $7i + 6 - i = 6(i + 1)$. Para F: $2 + 1 = 3$ y $14 + 1 = 15$. Para G: $5 + 1 = 6$ y $6 \cdot 2 = 12$. Además, si $n \geq 1$ está en la clase $i \geq 1$, se tiene $m_i n + r_i \geq m_i + r_i \geq 0$ en todas las ramas (el caso extremo es $f_2(1) = 0$), luego $T(n) \geq 0$; y $T(0) = 0$ porque $r_0 = 0$. □

Proposición 2.3. *Para todo $n \in \mathbb{N}$:*

1. $f_5(n) = \lceil 7n/5 \rceil$ *si* $5 \nmid n$, *y* $f_6(n) = \lceil 7n/6 \rceil$ *si* $6 \nmid n$;
2. $f_4(n) = \lceil 3n/2 \rceil$ *si* $n \equiv 1 \pmod 4$, *y* $f_4(n) = \lfloor 3n/2 \rfloor$ *si* $n \equiv 3 \pmod 4$;
3. $f_2(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ *si n es impar.*

Demostración. Si $5 \nmid n$, entonces $7n \not\equiv 0 \pmod 5$, y $f_5(n) = (7n+r)/5$ con $0 < r < 5$ y $5 \mid 7n + r$. El menor entero mayor o igual que $7n/5$ es precisamente ese. El caso de f_6 es idéntico, con $0 < 6 - i < 6$. Los apartados 2 y 3 son inmediatos, porque $3n$ es impar si n es impar. □

Proposición 2.4. *Si la órbita de n bajo una aplicación $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ está acotada, entonces es eventualmente periódica.*

Demostración. Una órbita acotada toma un número finito de valores, así que existen $a < b$ con $T^a(n) = T^b(n)$. Como T es una función, $T^{a+s}(n) = T^{b+s}(n)$ para todo $s \geq 0$, y la órbita es periódica a partir del paso a. □

En consecuencia, cada órbita cae exactamente en una de dos categorías: termina en un ciclo o no está acotada. Todo el problema está en saber cuál de las dos ocurre.

3. El caso sin división

Antes de estudiar las seis aplicaciones conviene ver qué ocurre si se suprime la división por d. El resultado explica por qué la división es imprescindible para que aparezca complejidad.

Definición 3.1. Sean $k \geq 2$, π una permutación de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ y enteros a_i, b_i $(0 \leq i < k)$ con $b_i \equiv \pi(i) - a_i\, i \pmod k$. Definimos $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ por $f(n) = a_i\, n + b_i$ si $n \equiv i \pmod k$.

Lema 3.2. *Si $n \equiv i \pmod k$, entonces $f(n) \equiv \pi(i) \pmod k$.*

Demostración. $a_i\, n + b_i \equiv a_i\, i + \pi(i) - a_i\, i = \pi(i) \pmod k$. □

Sea $(i_0, i_1, \ldots, i_{L-1})$ un ciclo de π, con $\pi(i_j) = i_{j+1}$ e índices módulo L. Por el lema 3.2, para $n \equiv i_0$ cada paso aplica la rama afín correcta, y la composición da

$$f^L(n) = A\, n + B \qquad (n \equiv i_0 \pmod k), \qquad A = \prod_{j=0}^{L-1} a_{i_j},$$

con $B \in \mathbb{Z}$ independiente de n.

Teorema 3.3. *Con la notación anterior, sobre las clases $i_0, \dots, i_{L-1}$:*

1. *Si $A = 1$ y $B = 0$, todo entero es periódico con periodo exacto L.*
2. *Si $A = 1$ y $B \neq 0$, ningún entero es periódico y $|f^j(n)| \to \infty$ para todo n.*
3. *Si $A = -1$, todo entero es periódico, con periodo L o $2L$.*
4. *Si $A = 0$, toda órbita entra en una única órbita periódica.*
5. *Si $|A| \geq 2$, hay a lo sumo una órbita periódica, y $|f^j(n)| \to \infty$ para todos los demás n.*

Demostración. Sea $g = f^L$ restringida a la clase i_0, es decir, $g(x) = Ax + B$. Toda órbita que pasa por estas clases visita la clase i_0 cada L pasos, así que basta estudiar g y los tramos intermedios f^s, $0 < s < L$, que son afines.

(1) $g = \mathrm{id}$, luego $f^L(n) = n$. Como $f^j(n) \equiv i_j \not\equiv i_0$ para $0 < j < L$, el periodo es exactamente L.

(2) $g^q(n) = n + qB$, cuyo valor absoluto tiende a infinito con q. Los tramos intermedios son afines con coeficiente ± 1 (pues $A = 1$ obliga a $a_{i_j} = \pm 1$), así que también $|f^j(n)| \to \infty$. En particular ningún punto es periódico.

(3) $g^2(x) = A^2x + AB + B = x$, luego $f^{2L}(n) = n$.

(4) Algún a_{i_j} es nulo, y g es constante. Tras a lo sumo L pasos, todas las órbitas coinciden y siguen la órbita del valor constante de g, que es periódica.

(5) El único punto fijo real de g es $x^* = B/(1-A)$, y $g^q(x) - x^* = A^q(x - x^*)$. Si $x \neq x^*$, entonces $|g^q(x) - x^*| = |A|^q|x - x^*| \to \infty$, así que x no es periódico. Todo punto periódico de f en estas clases produce un punto periódico de g en la clase i_0, luego a lo sumo hay una órbita periódica: la de x^*, si es un entero de la clase i_0. Los tramos intermedios tienen coeficiente no nulo, de modo que $|f^j(n)| \to \infty$ para $n \neq x^*$. □

Ejemplo 3.4. Con $k = 3$ y $\pi(i) = i + 1$, la elección $a_i = 1$, $b = (1, 1, -2)$ da $A = 1$, $B = 0$: los enteros se agrupan en los 3-ciclos $\{3t, 3t + 1, 3t + 2\}$. La elección $a_i = 1$, $b = (1, 1, 1)$, es decir $f(n) = n + 1$, cumple las mismas condiciones y da $A = 1$, $B = 3$: todas las órbitas escapan. La permutación de residuos, por sí sola, no garantiza ciclos.

Observación 3.5. Ninguna de las seis aplicaciones de la sección 2 es de este tipo. Al dividir por d, la clase de $T(n)$ módulo d ya no está determinada por la clase de n módulo d, sino por la de n módulo d^2. Por ejemplo, para n par, la paridad de $f_2(n) = 3n/2$ depende de n mód 4. Es esta dependencia de los dígitos superiores la que abre la puerta al comportamiento de tipo Collatz, y la que el teorema 3.3 muestra que es imprescindible.

4. La deriva logarítmica

4.1. Definición y heurística

Si $n \equiv i \pmod{d}$ y n es grande,

$$\ln T(n) - \ln n = \ln \frac{m_i}{d} + \ln\Big(1 + \frac{r_i}{m_i n}\Big) = \ln \frac{m_i}{d} + O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Cada paso multiplica, en esencia, por m_i/d. Si las clases de residuos se visitan con la misma frecuencia a lo largo de la órbita, el logaritmo crece en promedio

$$\delta = \frac{1}{d}\sum_{i=0}^{d-1} \ln \frac{m_i}{d} = \frac{1}{d}\ln \frac{P}{d^d}$$

por paso. Llamamos a δ la *deriva logarítmica* de T.

Observación 4.1 (Heurística). Si $\delta < 0$, cabe esperar que todas las órbitas estén acotadas y, por la proposición 2.4, terminen en ciclos. Si $\delta > 0$, cabe esperar que casi todas las órbitas escapen al infinito, aunque puedan existir ciclos. Esto es una heurística, no un teorema: la equidistribución de residuos a lo largo de una órbita concreta no está demostrada.

Este criterio coincide con el propuesto por Matthews y Watts [2]: para aplicaciones de esta forma con $\mathrm{mcd}(m_i, d) = 1$, conjeturaron que si $P < d^d$ todas las trayectorias son eventualmente periódicas, y que si $P > d^d$ casi todas divergen. Véase también la revisión de Lagarias [1].

4.2. Equidistribución exacta de los residuos

La heurística tiene un núcleo demostrable, análogo al teorema de Terras [4] para la aplicación de Collatz.

Proposición 4.2. *Sea T una aplicación de Collatz generalizada módulo d con $\mathrm{mcd}(m_i, d) = 1$ para todo i. Para cada $j \geq 1$, la aplicación*

$$n \bmod d^j \;\longmapsto\; \big(n \bmod d,\; T(n) \bmod d,\; \ldots,\; T^{j-1}(n) \bmod d\big)$$

está bien definida y es una biyección de $\mathbb{Z}/d^j\mathbb{Z}$ en $\{0, \ldots, d-1\}^j$.

Demostración. Si $n \equiv i \pmod d$ y $t \geq 1$, entonces $T(n + d^t u) = T(n) + m_i\, d^{t-1} u$. Por inducción, $T^s(n + d^{s+1}u) = T^s(n) + M d\, u$ para cierto entero M (producto de los m_i recorridos), luego $T^s(n) \bmod d$ depende solo de $n \bmod d^{s+1}$. Esto prueba que la aplicación está bien definida.

Por cardinalidad basta probar la inyectividad, y lo hacemos por inducción en j. Para $j = 1$ es trivial. Supongamos que n y n' producen la misma sucesión de longitud j. Tienen el mismo residuo i, así que $n = i + dt$ y $n' = i + dt'$, y entonces $T(n) = c + m_i t$ y $T(n') = c + m_i t'$, con $c = (m_i\, i + r_i)/d$. Como $T(n)$ y $T(n')$ comparten la sucesión de longitud $j-1$, por inducción $T(n) \equiv T(n') \pmod{d^{j-1}}$, es decir, $m_i(t - t') \equiv 0 \pmod{d^{j-1}}$. Como $\mathrm{mcd}(m_i, d) = 1$, se sigue $t \equiv t' \pmod{d^{j-1}}$ y $n \equiv n' \pmod{d^j}$. □

Corolario 4.3. *En las condiciones de la proposición 4.2, cuando n recorre un sistema completo de residuos módulo d^j, cada sucesión de j residuos aparece exactamente una vez. En consecuencia, la media de $\sum_{s<j} \ln(m_{i_s}/d)$ sobre ese sistema es exactamente $j\,\delta$.*

Así, δ es la tasa media exacta de crecimiento sobre sistemas completos de residuos. Lo que queda sin demostrar es el paso de este promedio a órbitas individuales.

4.3. Deriva efectiva cuando falla la coprimalidad

Para f_4 y G la hipótesis de la proposición 4.2 falla: $\mathrm{mcd}(6,4) = 2$ y $\mathrm{mcd}(6,3) = 3$. Los residuos dejan de estar equidistribuidos, y la biyección se rompe. En efecto, f_4 envía las clases 1 y 3 módulo 4 a números pares y la clase 2 a impares, y G envía siempre la clase 2 a la clase 1, pues $2(3t+2) = 6t+4$. El cálculo lo confirma: entre los 256 residuos módulo 4^4, f_4 produce solo 66 sucesiones de residuos distintas de longitud 4; entre los 729 residuos módulo 3^6, G produce solo 239 de longitud 6. Las otras cuatro aplicaciones producen todas las sucesiones posibles, como predice la proposición.

En estos casos la deriva relevante es la *efectiva*, con las frecuencias reales de residuos. El tratamiento mediante cadenas de Markov de Matthews y Watts [3] cubre esta situación. Aquí nos limitamos a medirla: tomamos 200 valores iniciales aleatorios en $[10^{400}, 10^{401})$, iteramos 3000 pasos y promediamos $\big(\ln T^{3000}(n) - \ln n\big)/3000$. El término $O(1/n)$ es despreciable a esa escala.

Aplicación	δ (equidistribución)	δ efectiva (medida)	Régimen
f_2	$-0{,}1438$	$-0{,}1436$	negativo
f_4	$-0{,}0425$	$-0{,}1071$	negativo
f_5	$-0{,}0527$	$-0{,}0534$	negativo
f_6	$-0{,}1702$	$-0{,}1706$	negativo
F	$+0{,}0121$	$+0{,}0129$	positivo
G	$+0{,}0351$	$+0{,}1541$	positivo

Cuadro 2: Deriva logarítmica por paso.

Cuando $\mathrm{mcd}(m_i, d) = 1$, ambas columnas coinciden dentro del error de muestreo, como predice el corolario 4.3. Para f_4 y G difieren notablemente, pero el signo se conserva en los seis casos. Para F la deriva es muy pequeña, porque $P = 28$ supera a $d^d = 27$ por muy poco; esto explica el lento escape de sus órbitas.

5. Censo computacional

5.1. Método

Para cada valor inicial $n_0 \le N$ se itera la aplicación con aritmética entera exacta hasta que ocurre una de tres cosas: la órbita repite un valor, y se registra el ciclo; alcanza un valor ya clasificado, y hereda su destino; o supera 10^{60} sin haber hecho ninguna de las dos cosas, y se clasifica como *escape*. Se usa $N = 10^6$ para f_2, f_4, f_5, f_6 y $N = 10^5$ para F y G. La lista completa de ciclos está en el apéndice A.

El criterio de escape es computacional, no una prueba de divergencia. Para comprobar su robustez, se repitió el censo de F con umbral 10^{100} y el número de escapes no cambió.

5.2. Deriva negativa

Ningún valor inicial escapa. Las excursiones, sin embargo, pueden ser enormes: la órbita de 781 368 bajo f_5 sube hasta unos $2{,}6 \cdot 10^{34}$ antes de caer en el ciclo de longitud 11. Es coherente con una deriva negativa pero pequeña, de $-0{,}053$.

Aplicación	Ciclos (mín., long.)	Cuenca en $[1, 10^6]$	Máximo alcanzado
f_2	$(0, 1)$	327 679	
	$(4, 3)$	323 351	$3{,}93 \cdot 10^{10}$
	$(16, 11)$	348 970	(desde 839 428)
f_4	$(1, 4)$	717 104	$9{,}37 \cdot 10^{18}$
	$(7, 9)$	282 896	(desde 69 529)
f_5	$(1, 4)$	28 107	$2{,}59 \cdot 10^{34}$
	$(6, 11)$	971 893	(desde 781 368)
f_6	$(1, 6)$	246 977	
	$(23, 12)$	336 978	$7{,}88 \cdot 10^{10}$
	$(88, 25)$	416 045	(desde 491 345)

Cuadro 3: Censo con deriva negativa. Todas las órbitas examinadas terminan en un ciclo. El punto fijo 0 existe en las cuatro aplicaciones, pero solo f_2 lo alcanza desde valores positivos.

5.3. Deriva positiva

Aplicación	Ciclos (mín., long.)	Cuenca en $[1, 10^5]$	Máximo convergente
F	$(1, 1)$	1	
	$(2, 10)$	16 713	
	$(26, 130)$	49 302	$2{,}92 \cdot 10^{56}$
	$(101, 68)$	5 665	(desde 67 574)
	escapes	28 319	
G	$(4, 3)$	3 739	$9{,}51 \cdot 10^{11}$
	$(73, 65)$	3 207	(desde 95 041)
	escapes	93 054	

Cuadro 4: Censo con deriva positiva. El 0 es fijo en ambas; para G, el 1 no es fijo, pues $G(1) = 2$ y $2 \to 4$ cae en el ciclo $(4, 7, 12)$.

Los primeros valores que escapan son 254, 371, 381, 443, … para F, y 5, 10, 11, 13, … para G. La proporción de escapes crece con la escala:

	$[1, 10^3)$	$[10^3, 10^4)$	$[10^4, 10^5]$
F	3,6 %	18,4 %	29,6 %
G	65,8 %	85,8 %	94,1 %

Las órbitas que escapan crecen al ritmo que predice la deriva. Por ejemplo, la de 254 bajo F alcanza unos 10^{1070} tras 200 000 pasos, lo que corresponde a unos 0,012 por paso en logaritmo natural, en línea con la tabla 2.

Con deriva positiva, los ciclos siguen existiendo y pueden ser largos, pero dejan de ser el destino típico. Su cuenca es una fracción decreciente de los enteros.

6. Conjeturas

Conjetura 6.1. Para f_2, f_4, f_5 y f_6, toda órbita en $\mathbb{N}$ es eventualmente periódica, y los ciclos de la tabla 3, junto con el punto fijo 0, son todos los ciclos.

Conjetura 6.2. Para F y G, el conjunto de $n \in \mathbb{N}$ cuya órbita no está acotada tiene densidad natural 1. En particular, las órbitas de 254 bajo F y de 5 bajo G no están acotadas.

Problema 6.3. Determinar si F y G tienen ciclos además de los de la tabla 4. Ninguno aparece en el censo.

La conjetura 6.1 para f_2, f_5 y f_6, y la conjetura 6.2 para F, son casos particulares de la conjetura de Matthews y Watts. Para f_4 y G, que no cumplen la hipótesis de coprimalidad, se apoyan en la deriva efectiva de la tabla 2.

7. Conclusiones

Las aplicaciones enteras definidas por clases de residuos se reparten en tres regímenes.

1. *Sin división.* Si las ramas son afines enteras y permutan las clases, la dinámica queda clasificada por completo por el teorema 3.3: sobre cada ciclo de la permutación, o todo es periódico, o hay a lo sumo una órbita periódica y el resto escapa.

2. *Con división y deriva negativa.* Las órbitas examinadas terminan siempre en ciclos, que pueden ser numerosos y largos (hasta 25 en f_6), tras excursiones que pueden ser muy grandes.

3. *Con división y deriva positiva.* Coexisten ciclos largos (de longitudes 130, 68 y 65) con órbitas que escapan, y estas son mayoría creciente.

El signo de la deriva logarítmica separa los dos últimos regímenes. Cuando todos los m_i son coprimos con d, la deriva es una media exacta sobre sistemas completos de residuos (proposición 4.2). El paso de esa media a cada órbita individual es, como en el problema de Collatz, lo que permanece abierto.

A. Lista de ciclos no triviales

Cada ciclo se escribe a partir de su menor elemento. Todos se han obtenido y comprobado con aritmética entera exacta.

f_2, longitud 3 (mínimo 4). $4 \to 6 \to 9 \to 4$

f_2, longitud 11 (mínimo 16). $16 \to 24 \to 36 \to 54 \to 81 \to 40 \to 60 \to 90 \to 135 \to 67 \to 33 \to 16$

f_4, longitud 4 (mínimo 1). $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$

f_4, longitud 9 (mínimo 7). $7 \to 10 \to 15 \to 22 \to 33 \to 50 \to 75 \to 112 \to 28 \to 7$

f_5, longitud 4 (mínimo 1). $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 1$

f_5, longitud 11 (mínimo 6). $6 \to 9 \to 13 \to 19 \to 27 \to 38 \to 54 \to 76 \to 107 \to 150 \to 30 \to 6$

f_6, longitud 6 (mínimo 1). $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1$

f_6, longitud 12 (mínimo 23). $23 \to 27 \to 32 \to 38 \to 45 \to 53 \to 62 \to 73 \to 86 \to 101 \to 118 \to 138 \to 23$

f_6, longitud 25 (mínimo 88). $88 \to 103 \to 121 \to 142 \to 166 \to 194 \to 227 \to 265 \to 310 \to 362 \to 423 \to 494 \to 577 \to 674 \to 787 \to 919 \to 1073 \to 1252 \to 1461 \to 1705 \to 1990 \to 2322 \to 387 \to 452 \to 528 \to 88$

F, longitud 10 (mínimo 2). $2 \to 5 \to 12 \to 8 \to 19 \to 13 \to 9 \to 6 \to 4 \to 3 \to 2$

F, longitud 130 (mínimo 26). $26 \to 61 \to 41 \to 96 \to 64 \to 43 \to 29 \to 68 \to 159 \to 106 \to 71 \to 166 \to 111 \to 74 \to 173 \to 404 \to 943 \to 629 \to 1468 \to 979 \to 653 \to 1524 \to 1016 \to 2371 \to 1581 \to 1054 \to 703 \to 469 \to 313 \to 209 \to 488 \to 1139 \to 2658 \to 1772 \to 4135 \to 2757 \to 1838 \to 4289 \to 10008 \to 6672 \to 4448 \to 10379 \to 24218 \to 56509 \to 37673 \to 87904 \to 58603 \to 39069 \to 26046 \to 17364 \to 11576 \to 27011 \to 63026 \to 147061 \to 98041 \to 65361 \to 43574 \to 101673 \to 67782 \to 45188 \to 105439 \to 70293 \to 46862 \to 109345 \to 72897 \to 48598 \to 32399 \to 75598 \to 50399 \to 117598 \to 78399 \to 52266 \to 34844 \to 81303 \to 54202 \to 36135 \to 24090 \to 16060 \to 10707 \to 7138 \to 4759 \to 3173 \to 7404 \to 4936 \to 3291 \to 2194 \to 1463 \to 3414 \to 2276 \to 5311 \to 3541 \to 2361 \to 1574 \to 3673 \to 2449 \to 1633 \to 1089 \to 726 \to 484 \to 323 \to 754 \to 503 \to 1174 \to 783 \to 522 \to 348 \to 232 \to 155 \to 362 \to 845 \to 1972 \to 1315 \to 877 \to 585 \to 390 \to 260 \to 607 \to 405 \to 270 \to 180 \to 120 \to 80 \to 187 \to 125 \to 292 \to 195 \to 130 \to 87 \to 58 \to 39 \to 26$

F, longitud 68 (mínimo 101). $101 \to 236 \to 551 \to 1286 \to 3001 \to 2001 \to 1334 \to 3113 \to 7264 \to 4843 \to 3229 \to 2153 \to 5024 \to 11723 \to 27354 \to 18236 \to 42551 \to 99286 \to 66191 \to 154446 \to 102964 \to 68643 \to 45762 \to 30508 \to 20339 \to 47458 \to 31639 \to 21093 \to 14062 \to 9375 \to 6250 \to 4167 \to 2778 \to 1852 \to 1235 \to 2882 \to 6725 \to 15692 \to 36615 \to 24410 \to 56957 \to 132900 \to 88600 \to 59067 \to 39378 \to 26252 \to 61255 \to 40837 \to 27225 \to 18150 \to 12100 \to 8067 \to 5378 \to 12549 \to 8366 \to 19521 \to 13014 \to 8676 \to 5784 \to 3856 \to 2571 \to 1714 \to 1143 \to 762 \to 508 \to 339 \to 226 \to 151 \to 101$

G, longitud 3 (mínimo 4). $4 \to 7 \to 12 \to 4$

G, longitud 65 (mínimo 73). $73 \to 122 \to 244 \to 407 \to 814 \to 1357 \to 2262 \to 754 \to 1257 \to 419 \to 838 \to 1397 \to 2794 \to 4657 \to 7762 \to 12937 \to 21562 \to 35937 \to 11979 \to 3993 \to 1331 \to 2662 \to 4437 \to 1479 \to 493 \to 822 \to 274 \to 457 \to 762 \to 254 \to 508 \to 847 \to 1412 \to 2824 \to 4707 \to 1569 \to 523 \to 872 \to 1744 \to 2907 \to 969 \to 323 \to 646 \to 1077 \to 359 \to 718 \to 1197 \to 399 \to 133 \to 222 \to 74 \to 148 \to 247 \to 412 \to 687 \to 229 \to 382 \to 637 \to 1062 \to 354 \to 118 \to 197 \to 394 \to 657 \to 219 \to 73$

Referencias

[1] J. C. Lagarias, The $3x+1$ problem and its generalizations, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 3–23.

[2] K. R. Matthews y A. M. Watts, A generalization of Hasse's generalization of the Syracuse algorithm, *Acta Arith.* **43** (1984), 167–175. doi:10.4064/aa-43-2-167-175.

[3] K. R. Matthews y A. M. Watts, A Markov approach to the generalized Syracuse algorithm, *Acta Arith.* **45** (1985), 29–42.

[4] R. Terras, A stopping time problem on the positive integers, *Acta Arith.* **30** (1976), 241–252.