La familia de 3-ciclos con salto $A - C = 6$: una aplicación de tipo Collatz con rama de reflexión

Miguel Cerdá Bennassar

Junio de 2026, revisado en octubre de 2026

Resumen

Para cada entero $C \geq 0$ se construye una aplicación afín por paridad que recorre el ciclo $(C+6,\, C+3,\, C)$. La rama que actúa sobre los dos extremos del ciclo tiene pendiente forzada $-\frac{1}{2}$: es una reflexión, no una división. Se demuestra que todos los miembros de la familia son conjugados por traslación de una única aplicación, $g(m) = -m/2$ para m par y $g(m) = 3m - 1$ para m impar, que no es conjugada afín de la aplicación de Collatz. Para g se determinan el ciclo $(2, -1, -4)$, que corresponde al ciclo de cada miembro, y el único punto fijo, 0, que no tiene más preimagen que él mismo. Se caracterizan además, para cada miembro, los valores iniciales cuya órbita no abandona los enteros no negativos: forman un conjunto finito, contenido en $[0, 3C + 12]$, que se determina en un número finito de pasos. Que todas esas órbitas, salvo la del punto fijo, terminen en el ciclo equivale a que g no tenga otros ciclos contenidos en la ventana correspondiente; se comprueba para $C \leq 199\,996$ y, para el caso general, queda como conjetura.

1. Introducción

Un sistema afín por paridad es una aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ de la forma

$$f(n) = \begin{cases} a\,n + b, & n \text{ par}, \\ c\,n + d, & n \text{ impar}, \end{cases}$$

con coeficientes racionales tales que f toma valores enteros. Un modo de construir sistemas de este tipo es prescribir un ciclo de periodo 3, $A \to B \to C \to A$, y resolver las ecuaciones que imponen sus tres transiciones.

En el segundo escrito de esta sección se estudia la familia de los ciclos $(C + 9,\, C + 3,\, C)$ y se demuestra que cada uno de sus sistemas es conjugado de la aplicación de Collatz. Algo análogo ocurre con los ciclos $(C + 3,\, C + 1,\, C)$ (Observación 5). El presente escrito trata el caso intermedio, los ciclos $(C + 6,\, C + 3,\, C)$, en el que el comportamiento es distinto: los extremos A y C tienen la misma paridad, la rama que los transforma tiene pendiente $-\frac{1}{2}$, y el sistema resultante no es conjugado afín de Collatz.

Todos los miembros de la familia se reducen a una sola aplicación,

$$g(m) = \begin{cases} -\,m/2, & m \text{ par}, \\ 3m - 1, & m \text{ impar}, \end{cases}$$

de la que se establecen el ciclo, el punto fijo y la estructura de las órbitas que permanecen en los enteros no negativos.

2. Construcción de la familia

Teorema 1 (Construcción)**.** *Para cada entero $C \geq 0$, la aplicación f_C definida por*

$$\textit{si } C \textit{ es par:} \quad f_C(n) = \begin{cases} -\dfrac{n}{2} + \dfrac{3C}{2} + 6, & n \textit{ par}, \\ 3n - (2C+9), & n \textit{ impar}, \end{cases}$$

$$\textit{si } C \textit{ es impar:} \quad f_C(n) = \begin{cases} 3n - (2C+9), & n \textit{ par}, \\ -\dfrac{n}{2} + \dfrac{3(C+4)}{2}, & n \textit{ impar}, \end{cases}$$

toma valores enteros y recorre el ciclo

$$C+6 \longrightarrow C+3 \longrightarrow C \longrightarrow C+6.$$

Demostración. Los valores son enteros: si C es par, $n/2$ y $3C/2$ lo son para n par; si C es impar, $-n+3C$ es par para n impar. Si C es par, $C+6$ y C son pares y $C+3$ es impar, y se tiene

$$\begin{aligned} f_C(C+6) &= -\tfrac{C+6}{2} + \tfrac{3C}{2} + 6 = C+3, \\ f_C(C+3) &= 3(C+3) - (2C+9) = C, \\ f_C(C) &= -\tfrac{C}{2} + \tfrac{3C}{2} + 6 = C+6. \end{aligned}$$

Si C es impar, $C+6$ y C son impares y $C+3$ es par, y se tiene

$$\begin{aligned} f_C(C+6) &= \tfrac{-(C+6)+3C+12}{2} = C+3, \\ f_C(C+3) &= 3(C+3) - (2C+9) = C, \\ f_C(C) &= \tfrac{-C+3C+12}{2} = C+6. \end{aligned}$$

□

Comentario 2 (Origen de la pendiente $-\frac{1}{2}$). Como $A - C = 6$ es par, los extremos $A = C+6$ y C tienen la misma paridad y los transforma la misma rama, que debe llevar $A \mapsto B$ y $C \mapsto A$. Su pendiente queda forzada:

$$\frac{B-A}{A-C} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

La otra rama solo actúa sobre B, y la condición $B \mapsto C$ no fija su pendiente; se toma 3, como en la aplicación de Collatz. La rama de pendiente $-\frac{1}{2}$ es, más exactamente, una homotecia de razón $-\frac{1}{2}$ centrada en el punto fijo (Proposición 6); se la llama *reflexión* porque lleva cada punto al otro lado del punto fijo, no porque sea una simetría de razón -1. Cuando el salto $A - C$ es impar, A y C caen en ramas distintas y la pendiente $\frac{1}{2}$ de una división genuina es compatible con el ciclo.

C	Ciclo	Rama par	Rama impar
0	$(6, 3, 0)$	$-n/2 + 6$	$3n - 9$
1	$(7, 4, 1)$	$3n - 11$	$-n/2 + 15/2$
2	$(8, 5, 2)$	$-n/2 + 9$	$3n - 13$
3	$(9, 6, 3)$	$3n - 15$	$-n/2 + 21/2$
4	$(10, 7, 4)$	$-n/2 + 12$	$3n - 17$
5	$(11, 8, 5)$	$3n - 19$	$-n/2 + 27/2$

Cuadro 1: Primeros miembros de la familia.

3. Conjugación por traslación

Teorema 3 (Reducción a una sola aplicación)**.** *Sea* $\tau_C(n) = n - (C+4)$*. Para todo* $C \geq 0$*,*

$$\tau_C \circ f_C \circ \tau_C^{-1} = g.$$

En consecuencia, todos los miembros de la familia son conjugados entre sí por traslaciones.

Demostración. Sea $n = m + C + 4$. Si C es par, la traslación conserva la paridad. Para m par,

$$f_C(n) - (C+4) = -\frac{m+C+4}{2} + \frac{3C}{2} + 6 - (C+4) = -\frac{m}{2};$$

para m impar,

$$f_C(n) - (C+4) = 3(m+C+4) - (2C+9) - (C+4) = 3m - 1.$$

Si C es impar, la traslación invierte la paridad: m par corresponde a n impar y m impar a n par. Para m par,

$$f_C(n) - (C+4) = \frac{-(m+C+4) + 3(C+4)}{2} - (C+4) = -\frac{m}{2};$$

para m impar, el cálculo es el mismo que en el caso anterior y da $3m - 1$. □

Bajo la traslación τ_C, el ciclo $(C+6,\ C+3,\ C)$ corresponde al ciclo $2 \to -1 \to -4 \to 2$ de g, el mismo para todos los miembros.

Corolario 4. *La aplicación* g *no es conjugada, mediante una biyección afín de* $\mathbb{Z}$*, ni de la aplicación de Collatz ni de ninguna aplicación* $x \mapsto x/2$ *(par),* $3x + k$ *(impar).*

Demostración. Una biyección afín de $\mathbb{Z}$ es de la forma $h(x) = \pm x + b$. La conjugada $h \circ F \circ h^{-1}$ de una aplicación afín $F(x) = \lambda x + \mu$ tiene la misma pendiente λ, y h lleva cada clase de paridad a una clase de paridad. Por tanto, la conjugación conserva el conjunto de pendientes de las dos ramas. Para g es $\{-\frac{1}{2}, 3\}$, y para las aplicaciones $x/2,\ 3x + k$ es $\{\frac{1}{2}, 3\}$. □

Observación 5 (El salto $A - C = 3$)*.* Para los ciclos $(C+3,\ C+1,\ C)$, el mismo procedimiento da, según la paridad de C, una rama $3n - (2C-3)$ y una rama $(n + C - 1)/2$. La traslación $n = m + C - 1$ las convierte en $3m + 1$ y $m/2$: cada miembro de esa familia es la propia aplicación de Collatz trasladada, y para $C = 1$ es exactamente ella. Sus ciclos son los ciclos enteros de Collatz trasladados, y el ciclo prescrito corresponde a $(4, 2, 1)$. La traslación lleva los enteros positivos $m \geq 1$ al semieje $n \geq C$, y es sobre ese semieje donde la llegada al ciclo prescrito equivale a la conjetura de Collatz [1]. Los valores $0 \leq n < C$ corresponden a enteros no positivos de Collatz y pueden tener otro destino: para $C = 3$, por ejemplo, aparece el ciclo $0 \to 1 \to 0$, que es el ciclo $-2 \to -1 \to -2$ de Collatz. El caso $A - C = 9$ es el del segundo escrito de esta sección.

4. El ciclo y el punto fijo

Proposición 6. *La aplicación* g *tiene un único punto fijo,* $m = 0$*, y la única preimagen de* 0 *es el propio* 0*. En cada miembro de la familia, el punto fijo es* $n^* = C + 4$*, y ninguna órbita que empiece en otro valor llega a él.*

Demostración. Un punto fijo par cumple $-m/2 = m$, es decir, $m = 0$, que es par. Un punto fijo impar cumple $3m - 1 = m$, es decir, $m = \frac{1}{2}$, que no es entero. Si $g(m) = 0$, entonces m es par y $-m/2 = 0$, o bien m es impar y $3m - 1 = 0$, imposible. Luego $g^{-1}(0) = \{0\}$. La traslación τ_C da el enunciado para f_C. □

Comentario 7 (Composiciones de ramas). Una composición de p ramas de g es afín, con pendiente $(-\frac{1}{2})^a 3^b$, $a + b = p$, que nunca vale 1. Cada composición tiene, por tanto, a lo sumo un punto fijo. Esto no basta para excluir otros ciclos, porque hay infinitos itinerarios posibles y cada uno podría dar el suyo.

5. Órbitas no negativas

Fijado un miembro f_C, interesa saber qué valores iniciales $n_0 \geq 0$ generan órbitas que no salen nunca de $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Sea

$$S_C = \{\, n_0 \geq 0 : \ f_C^j(n_0) \geq 0 \text{ para todo } j \geq 0 \,\}.$$

Teorema 8 (Caracterización finita)**.** *Para todo $C \geq 0$, toda órbita que empieza en S_C permanece en el intervalo $[0,\ 3C + 12]$. En particular, S_C es finito, se determina en un número finito de pasos, y toda órbita que empieza en S_C es periódica a partir de algún momento.*

Demostración. Sea $L = C + 4$. En las coordenadas $m = n - L$, la condición $n \geq 0$ es $m \geq -L$, y la dinámica es la de g. Si m es un iterado par, el siguiente es $-m/2$, y $-m/2 \geq -L$ exige $m \leq 2L$. Si m es un iterado impar, el siguiente es $3m - 1$, que es par, y el posterior es $-(3m - 1)/2$; de $-(3m - 1)/2 \geq -L$ se obtiene $m \leq (2L + 1)/3 \leq 2L$. Así, todos los iterados cumplen $-L \leq m \leq 2L$, es decir, $0 \leq n \leq 3L = 3C + 12$. Una órbita que recorre un conjunto finito acaba siendo periódica.

Para determinar S_C, sean

$$E_0 = \{0, 1, \dots, 3C + 12\}, \qquad E_{j+1} = \{\, n \in E_j : \ f_C(n) \in E_j \,\}.$$

Por inducción, E_j es el conjunto de los $n \in E_0$ cuyos j primeros iterados están en E_0. Los conjuntos E_j son finitos y decrecientes, luego se estabilizan, y el conjunto estable es el de los $n \in E_0$ cuya órbita entera queda en E_0. Por lo ya demostrado, ese conjunto es S_C. □

Ejemplo 9. Para el miembro $(8, 5, 2)$ se obtiene

$$S_2 = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14, 18\}.$$

Todas estas órbitas terminan en el ciclo $(8, 5, 2)$, salvo la del punto fijo $6 = C + 4$. El valor 3, por ejemplo, no pertenece a S_2: su órbita $3 \to -4 \to 11 \to 20 \to -1 \to -16 \to 17 \to 38 \to -10 \to 14 \to 2$ pasa por enteros negativos antes de entrar en el ciclo.

Observación 10 (El tamaño de S_C crece con C). En las coordenadas de g, el conjunto $S_C - (C+4)$ no es el mismo para todos los miembros: la ventana $[-L, 2L]$ crece con C y admite órbitas que bajan más antes de entrar en el ciclo. Por ejemplo, $|S_C| = 9$ para $C = 0$, 13 para $4 \leq C \leq 11$, 18 para $C = 12$, 37 para $C = 20$, 106 para $C = 100$ y 178 para $C = 200$.

Por el Teorema 8, el destino de las órbitas de S_C depende solo de los ciclos de g contenidos en la ventana $[-(C + 4),\ 2(C + 4)]$.

Proposición 11 (Verificación para $C \le 199\,996$)**.** *La aplicación g no tiene más ciclos que $\{0\}$ y $(2,-1,-4)$ con algún elemento en $[-2\cdot 10^5,\, 2\cdot 10^5]$. En consecuencia, para todo $C \le 199\,996$, toda órbita que empieza en S_C termina en el ciclo $(C+6,\, C+3,\, C)$, salvo la del punto fijo $C+4$.*

Demostración. La primera afirmación es una comprobación por ordenador: se iteró g desde cada uno de los 400 001 enteros m con $|m| \le 2\cdot 10^5$ hasta repetir un valor, y solo aparecieron esos dos ciclos.

Todo ciclo de g distinto de $\{0\}$ contiene un entero negativo: desde un positivo par se pasa directamente a un negativo, y desde un positivo impar m se pasa al positivo par $3m-1$ y de él a un negativo. Por tanto, todo ciclo distinto de $\{0\}$ contenido en la ventana $[-(C+4),\, 2(C+4)]$ tiene un elemento en $[-(C+4), -1]$. Si $C+4 \le 2\cdot 10^5$, ese elemento está en el rango comprobado, y el ciclo es $(2,-1,-4)$. Por el Teorema 8 y la Proposición 6 se obtiene la segunda afirmación. □

6. La dinámica en $\mathbb{Z}$

Fuera de S_C, las órbitas visitan enteros negativos. Para estudiarlas conviene la forma acelerada de g, que agrupa cada paso impar con el paso par que le sigue:

$$\tilde{g}(m) = \begin{cases} -\,m/2, & m \text{ par}, \\ -\,\dfrac{3m-1}{2}, & m \text{ impar}. \end{cases}$$

Es una aplicación de la clase estudiada por Matthews y Watts [2], de la forma $x \mapsto (m_i x - r_i)/2$ según la clase de x módulo 2, con multiplicadores $m_0 = -1$ y $m_1 = -3$. Para esa clase, Matthews y Watts conjeturan que, cuando $|m_0 m_1| < 2^2$, toda trayectoria acaba en un ciclo y hay un número finito de ciclos. Aquí $|m_0 m_1| = 3 < 4$. En valor absoluto, $\tilde{g}$ multiplica por $\frac{1}{2}$ o por aproximadamente $\frac{3}{2}$, igual que la aplicación de Terras. En el modelo heurístico de paridades equiprobables, su deriva logarítmica media es, por tanto, $\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\log\frac{3}{4} < 0$ por paso; no se ha demostrado que las órbitas concretas tengan esas frecuencias.

Conjetura 12. *Toda órbita de g en $\mathbb{Z}$ distinta de la del 0 termina en el ciclo $(2,-1,-4)$. Equivalentemente, para cada $C \ge 0$, toda órbita de f_C que no empieza en $C+4$ termina en el ciclo $(C+6,\, C+3,\, C)$.*

La comprobación de la Proposición 11 respalda esta conjetura: todas las órbitas de g que parten de $|m| \le 2\cdot 10^5$ terminan en uno de los dos ciclos, sin que ninguna crezca sin control. La conjetura contiene dos afirmaciones, la ausencia de otros ciclos y la ausencia de órbitas no acotadas, que siguen abiertas, igual que en la aplicación de Collatz. Lo que sí queda resuelto es la parte de la dinámica que no sale de los enteros no negativos: es finita (Teorema 8) y, para $C \le 199\,996$, termina en el ciclo o en el punto fijo.

7. Conclusión

La familia de los ciclos $(C+6,\, C+3,\, C)$ se reduce, por traslación, a la única aplicación $g(m) = -m/2,\ 3m-1$, con un ciclo $(2,-1,-4)$ y un punto fijo 0 sin otras preimágenes. A diferencia de las familias concretas con saltos 3 y 9 consideradas en esta sección, que son

conjugadas de Collatz, g no es conjugada afín de Collatz ni de ninguna aplicación $x/2,\ 3x+k$, porque su rama de fracción tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. Para cada miembro, los valores iniciales cuya órbita no abandona $\mathbb{N}$ forman un conjunto finito contenido en $[0, 3C+12]$, y para $C \le 199\,996$ todas esas órbitas terminan en el ciclo, salvo la del punto fijo. La convergencia en $\mathbb{Z}$ queda como conjetura, en el marco de las aplicaciones de Matthews y Watts.

Referencias

[1] J. C. Lagarias, The $3x+1$ problem and its generalizations, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 3–23.

[2] K. R. Matthews y A. M. Watts, A generalization of Hasse's generalization of the Syracuse algorithm, *Acta Arith.* **43** (1984), 167–175.