Estudio de las Secuencias SP, SPI y SPP y su Relación con Propiedades Dinámicas

Miguel Cerdá Bennassar

Abril de 2025
Versión 2 (septiembre de 2026)

Nota de rectificación. La versión 1 de este escrito (abril de 2025) contenía en su Sección 5, «Inferencia de Propiedades desde SPI y SPP», un argumento según el cual la convergencia observada de SPI y SPP permitía inferir propiedades dinámicas de la secuencia de Collatz, y concluía que estas secuencias proporcionaban «evidencia fuerte» de la ausencia de ciclos adicionales. *Ese argumento era incorrecto y se retira por completo*, junto con las afirmaciones de las conclusiones que dependían de él.
Los motivos son dos. Primero, los datos allí presentados corresponden a trayectorias concretas cuya convergencia se conocía de antemano, puesto que las secuencias SPI y SPP se calculan *a partir* de la trayectoria de Collatz; no constituyen por tanto evidencia independiente. Segundo, y más importante, el enunciado que la sección pretendía apoyar no es una consecuencia parcial de la conjetura de Collatz sino *equivalente* a ella, como se demuestra en la Sección 5 de esta versión.
Las Secciones 1 a 4 de la versión 1 se conservan en su contenido; sus demostraciones, que allí eran esquemáticas, se han completado. Se han corregido además los recuentos del ejemplo numérico grande de la Sección 6. Ningún resultado de esta versión depende del material retirado.

1. Introducción

En este trabajo definimos y analizamos tres secuencias iterativas sobre los enteros positivos: la Secuencia Personalizada (SP), la Secuencia Personalizada de Impares (SPI) y la Secuencia Personalizada de Pares (SPP). Las tres se generan mediante funciones basadas en valuaciones 2-ádicas y transformaciones que combinan factores de 3 y de 2.

El objetivo es construir una representación comprimida de las trayectorias de Collatz: una sucesión que recorra la misma trayectoria saltando los términos intermedios que no aportan información estructural. Demostramos que SP es exactamente eso, con un control explícito del número de pasos de Collatz que cada paso de SP condensa (Teorema 4.4), y que SPI y SPP son sus subsucesiones de impares y de pares, cada una obtenida por dos iteraciones de SP (Teorema 4.5).

Conviene declarar desde el principio el alcance de estos resultados, porque es la corrección central de esta versión. La compresión es una herramienta de cálculo y de exposición: permite recorrer una trayectoria con un 15 % de sus términos. No es un método de demostración. En la Sección 5 probamos que la convergencia universal de SP es *equivalente* a la conjetura de Collatz, y no un enunciado más débil del que aquella pudiera deducirse. Verificar SP, SPI o SPP para valores concretos no aporta, por tanto, información alguna que no estuviera ya en la verificación directa de Collatz para esos mismos valores.

La motivación es de economía de representación, no de evidencia. El Lema 3.2 muestra que la trayectoria de Collatz de un impar k con $\nu_2(k+1) = n$ atraviesa un bloque de

ascenso de $2n$ pasos cuyos términos intermedios están enteramente determinados por k: son los x_j con $x_j + 1 = 3^j 2^{\,n-j} q$. Conocido k, nada nuevo ocurre hasta el final del bloque. SP conserva exactamente los extremos de esos bloques y descarta su interior; SPI es, en particular, la sucesión de los impares que inician cada bloque de ascenso. La pregunta que esto abre no es si la representación facilita una demostración —el Corolario 5.2 responde que no—, sino si la estructura de valuaciones que deja a la vista tiene algo que decir sobre los obstáculos conocidos del problema.

2. Definiciones

En todo lo que sigue, $\nu_2(x)$ denota la valuación 2-ádica de x, es decir, el mayor n tal que $2^n \mid x$.

Definición 2.1 (Secuencia Personalizada)**.** Para $k \in \mathbb{N}^+$ definimos

$$f_{SP}(k) = \begin{cases} \dfrac{3^n(k+1)}{2^n} - 1, & \text{si } k \text{ es impar, donde } n = \nu_2(k+1), \\[2ex] \dfrac{k}{2^m}, & \text{si } k \text{ es par, donde } m = \nu_2(k). \end{cases}$$

La secuencia SP se genera iterando f_{SP} desde un entero inicial k.

Definición 2.2 (Secuencia Personalizada de Impares)**.** Para $k \in \mathbb{N}^+$ impar,

$$f_{SPI}(k) = \frac{(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m}, \qquad n = \nu_2(k+1), \quad m = \nu_2\!\left((k+1)\left(\tfrac{3}{2}\right)^n - 1\right).$$

Definición 2.3 (Secuencia Personalizada de Pares)**.** Para $k \in \mathbb{N}^+$ par,

$$f_{SPP}(k) = \left(\frac{k}{2^{\nu_2(k)}} + 1\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu_2\left(\frac{k}{2^{\nu_2(k)}}+1\right)} - 1.$$

3. La identidad de conjugación

Todos los resultados de este escrito descansan sobre una única identidad elemental, que aislamos aquí para poder demostrar el resto sin repeticiones.

Denotemos por T la aplicación $T(x) = \frac{3x+1}{2}$, definida sobre los enteros impares (donde $3x+1$ es par, de modo que $T(x)$ es entero).

Lema 3.1 (Conjugación)**.** *Para todo x impar,*

$$T(x) + 1 = \tfrac{3}{2}\,(x+1).$$

Demostración. $T(x) + 1 = \frac{3x+1}{2} + 1 = \frac{3x+3}{2} = \frac{3}{2}(x+1)$. □

El cambio de variable $y = x + 1$ transforma, pues, la aplicación T en la simple multiplicación por $\frac{3}{2}$. De ahí se sigue toda la estructura.

Lema 3.2 (Estructura del bloque impar)**.** *Sea k impar, $n = \nu_2(k+1) \geq 1$, y escribamos $k + 1 = 2^n q$ con q impar. Definamos $x_0 = k$ y $x_{j+1} = T(x_j)$. Entonces, para $0 \leq j \leq n$,*

$$x_j + 1 = 3^j\, 2^{\,n-j}\, q.$$

En particular, x_j es impar para $0 \leq j \leq n-1$ —de modo que T está definida en cada uno de esos pasos— y $x_n = 3^n q - 1$ es par.

Demostración. Por inducción sobre j. Para $j = 0$ la identidad es $x_0 + 1 = 2^n q$, que es la definición de n y q. Supongamos que vale para algún $j \le n-1$. Entonces $n - j \ge 1$, luego $x_j + 1 = 3^j 2^{n-j} q$ es par y x_j es impar, de modo que $T(x_j)$ está definida; por el Lema 3.1,

$$x_{j+1} + 1 = \tfrac{3}{2}\left(3^j 2^{n-j} q\right) = 3^{j+1} 2^{n-j-1} q,$$

que es la identidad para $j+1$. Finalmente, para $j = n$ se obtiene $x_n + 1 = 3^n q$, producto de impares y por tanto impar, luego x_n es par. □

4. Propiedades fundamentales y relación con Collatz

Recordemos la función de Collatz: para $n \in \mathbb{N}^+$,

$$f_C(n) = \begin{cases} 3n+1, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ n/2, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Proposición 4.1 (Caso impar)**.** *Sea k impar y $n = \nu_2(k+1)$. Con la notación del Lema 3.2,*

$$f_{SP}(k) = x_n = 3^n q - 1,$$

y la trayectoria de Collatz de k comienza por

$$x_0,\ 2x_1,\ x_1,\ 2x_2,\ x_2,\ \ldots,\ 2x_n,\ x_n.$$

En consecuencia, $f_{SP}(k) = f_C^{2n}(k)$.

Demostración. De $k+1 = 2^n q$ se sigue $f_{SP}(k) = \frac{3^n(k+1)}{2^n} - 1 = 3^n q - 1$, que por el Lema 3.2 es x_n.

Para la trayectoria: si x_j es impar, $f_C(x_j) = 3x_j + 1 = 2\,T(x_j) = 2x_{j+1}$, que es par, y $f_C(2x_{j+1}) = x_{j+1}$. Cada paso de T consume, pues, exactamente dos pasos de f_C. Como el Lema 3.2 garantiza que $x_0, \ldots, x_{n-1}$ son impares, esto se aplica n veces y se obtiene $x_n = f_C^{2n}(k)$. □

Proposición 4.2 (Caso par)**.** *Sea k par y $m = \nu_2(k)$. Entonces $f_{SP}(k) = k/2^m = f_C^m(k)$, y este valor es impar.*

Demostración. Inmediato: f_C aplicada a un par lo divide por 2, y tras m divisiones el cociente $k/2^m$ es impar por definición de m. □

Corolario 4.3 (Alternancia)**.** *f_{SP} transforma impares en pares y pares en impares. Toda secuencia SP alterna estrictamente la paridad.*

Demostración. Por la Proposición 4.1, si k es impar, $f_{SP}(k) = 3^n q - 1$ con $3^n q$ impar, luego $f_{SP}(k)$ es par. Por la Proposición 4.2, si k es par, $f_{SP}(k)$ es impar. □

Teorema 4.4 (SP como subsucesión de Collatz)**.** *Definamos*

$$s(k) = \begin{cases} 2\,\nu_2(k+1), & \textit{si } k \textit{ es impar,} \\ \nu_2(k), & \textit{si } k \textit{ es par.} \end{cases}$$

Entonces $s(k) \ge 1$ para todo $k \in \mathbb{N}^+$ y $f_{SP}(k) = f_C^{s(k)}(k)$.

En consecuencia, escribiendo $\sigma_0 = 0$ y $\sigma_{i+1} = \sigma_i + s\big(f_{SP}^i(k)\big)$, se tiene

$$f_{SP}^i(k) = f_C^{\sigma_i}(k), \qquad 0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots, \qquad \sigma_i \to \infty.$$

Es decir: la órbita de SP desde k es una subsucesión de la trayectoria de Collatz desde k, en el mismo orden relativo, y avanza por ella sin detenerse.

Demostración. La identidad $f_{SP}(k) = f_C^{s(k)}(k)$ es la Proposición 4.1 en el caso impar y la Proposición 4.2 en el caso par. Para la cota $s(k) \geq 1$: si k es impar, $k+1$ es par, luego $\nu_2(k+1) \geq 1$ y $s(k) \geq 2$; si k es par, $\nu_2(k) \geq 1$ y $s(k) \geq 1$. La composición e inducción sobre i dan el resto; la sucesión (σ_i) es estrictamente creciente por ser $s \geq 1$, y por tanto no acotada. □

Teorema 4.5 (SPI y SPP como composiciones de SP)**.** *Para k impar, $f_{SPI}(k) = f_{SP}(f_{SP}(k))$. Para k par, $f_{SPP}(k) = f_{SP}(f_{SP}(k))$.*

Demostración. Sea k impar, $n = \nu_2(k+1)$, $k+1 = 2^n q$. Por la Proposición 4.1, $B := f_{SP}(k) = 3^n q - 1$, que es par, y por la Proposición 4.2, $f_{SP}(B) = B/2^{\nu_2(B)}$. Por otra parte, $(k+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 = 3^n q - 1 = B$, de modo que en la definición de f_{SPI} se tiene $m = \nu_2(B)$ y $f_{SPI}(k) = B/2^{\nu_2(B)} = f_{SP}(f_{SP}(k))$.

Sea ahora k par y $u := k/2^{\nu_2(k)} = f_{SP}(k)$, que es impar. La definición de f_{SPP} es exactamente $(u+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu_2(u+1)} - 1$, es decir, $f_{SP}(u)$. Luego $f_{SPP}(k) = f_{SP}(f_{SP}(k))$. □

Corolario 4.6. *Para k impar, la órbita de f_{SPI} desde k es exactamente la subsucesión de términos impares de la órbita de f_{SP} desde k; para k par, la órbita de f_{SPP} desde k es la subsucesión de términos pares. Cada una de ellas es, por el Teorema 4.4, una subsucesión de la trayectoria de Collatz de k.*

Demostración. Consecuencia inmediata del Teorema 4.5 y de la alternancia (Corolario 4.3). □

Observación 4.7 (SPI y SPP no son independientes). El Corolario 4.6 muestra que las dos subsucesiones se determinan mutuamente término a término: si $A_0, A_1, \ldots$ son los términos de SPI y $B_0, B_1, \ldots$ los de SPP, entonces $B_i = f_{SP}(A_i)$ y $A_{i+1} = B_i/2^{\nu_2(B_i)}$. No se trata, por tanto, de dos objetos que puedan corroborarse el uno al otro, sino de una única sucesión leída con dos rótulos.

5. Equivalencia con la conjetura de Collatz

Los puntos 1 y 2 desempeñan el papel de estados terminales: se comprueba directamente que $f_{SP}(1) = 2$ y $f_{SP}(2) = 1$, de modo que $\{1, 2\}$ es un ciclo de f_{SP} de longitud 2; asimismo $f_{SPI}(1) = 1$ y $f_{SPP}(2) = 2$ son puntos fijos.

Teorema 5.1 (Equivalencia)**.** *Para todo $k \in \mathbb{N}^+$, la órbita de f_{SP} desde k alcanza el ciclo $\{1, 2\}$ si y solo si la trayectoria de Collatz desde k alcanza el valor 1.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que $f_C^t(k) = 1$ para algún $t \geq 0$. Para todo $\sigma \geq t$ se tiene $f_C^\sigma(k) \in \{1, 4, 2\}$, pues a partir de 1 la trayectoria recorre el ciclo $1 \to 4 \to 2 \to 1$. Por el Teorema 4.4, $\sigma_i \to \infty$, luego existe i con $\sigma_i \geq t$ y por tanto $f_{SP}^i(k) \in \{1, 4, 2\}$. Como $f_{SP}(4) = 1$, $f_{SP}(2) = 1$ y $f_{SP}(1) = 2$, en los tres casos la órbita de SP está ya en $\{1, 2\}$ o entra en él en un paso, y permanece allí.

($\Rightarrow$) Supongamos que $f_{SP}^i(k) \in \{1, 2\}$ para algún i. Por el Teorema 4.4, $f_{SP}^i(k) = f_C^{\sigma_i}(k)$, de modo que el valor 1 o el valor 2 aparece en la trayectoria de Collatz de k; en el segundo caso, $f_C(2) = 1$. En ambos, la trayectoria alcanza 1. □

Corolario 5.2. *El enunciado*

> para todo $k \in \mathbb{N}^+$, la órbita de f_{SP} desde k alcanza el ciclo $\{1, 2\}$

es equivalente a la conjetura de Collatz. Lo mismo vale para el enunciado «la órbita de f_{SPI} desde todo impar alcanza el punto fijo 1» y para «la órbita de f_{SPP} desde todo par alcanza el punto fijo 2».

Demostración. La primera afirmación es el Teorema 5.1 cuantificado sobre k. Para las otras dos, el Corolario 4.6 identifica las órbitas de f_{SPI} y f_{SPP} con las subsucesiones de impares y de pares de la órbita de f_{SP}, que por el Corolario 4.3 son ambas infinitas mientras la órbita de SP no haya entrado en $\{1, 2\}$; alcanzar 1 (resp. 2) equivale entonces a que la órbita de SP alcance el ciclo. □

Observación 5.3 (Alcance). El Corolario 5.2 delimita con precisión lo que estas secuencias pueden y no pueden aportar.

1. **La verificación no es evidencia independiente.** La órbita de SPI desde k se calcula a partir de la trayectoria de Collatz de k, que es justamente el objeto cuya convergencia se quiere establecer. Comprobar que SPI llega a 1 en 18 pasos es una manera abreviada de comprobar que la trayectoria de Collatz llega a 1, no un hecho adicional que la apoye.

2. **SPI y SPP no se corroboran mutuamente.** Por la Observación 4.7, cada una determina la otra; su acuerdo es una identidad, no una coincidencia.

3. **SP es una reformulación, no una reducción.** Una demostración de la convergencia universal de SP sería una demostración de la conjetura de Collatz, con la misma dificultad. Formulada en los términos de SPI, sea (A_i) la órbita de f_{SPI} desde un impar A_0, y escribamos $A_i + 1 = 2^{k_i} q_i$ con q_i impar, $k_i = \nu_2(A_i + 1)$ y $m_i = \nu_2\big(3^{k_i} q_i - 1\big)$. Se tiene entonces la relación exacta

$$A_{i+1} + \frac{1}{2^{m_i}} = (A_i + 1)\,\frac{3^{k_i}}{2^{\,k_i + m_i}},$$

de modo que la cuestión abierta es si se cumple siempre $\sum_i m_i > (\log_2 3 - 1) \sum_i k_i$, que es la dificultad habitual del problema $3x + 1$ en otra notación.

6. Ejemplos y factores de compresión

Fijamos el siguiente convenio de recuento, del que dependen las cifras: la longitud de la trayectoria de Collatz de k es el número de términos desde k hasta 1, ambos incluidos; la de SPI, el número de términos desde k hasta el punto fijo 1; la de SPP, desde $f_{SP}(k)$ hasta el punto fijo 2; y la de SP es la suma de ambas, de acuerdo con el Corolario 4.6.

Ejemplo 6.1 ($k = 27$)**.**

Collatz:	27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, …, 4, 2, 1	(112 términos)
SP:	27, 62, 31, 242, 121, 182, …, 8, 1, 2	(36)
SPI:	27, 31, 121, 91, 103, …, 61, 23, 5, 1	(18)
SPP:	62, 242, 182, 206, 350, …, 92, 80, 8, 2	(18)

El valor máximo de la trayectoria es 9232. SP recorre el 32,1 % de los términos de Collatz y SPI el 16,1 %, con un factor de compresión $112/18 = 6{,}22$.

Ejemplo 6.2 ($k = 719\,604\,127\,133\,093$)**.** La trayectoria de Collatz tiene 1281 términos y alcanza el valor máximo 2 158 812 381 399 280. Bajo el convenio anterior, SP tiene 390 términos (30,4 %), SPI tiene 195 (15,2 %) y SPP tiene 195, con factor de compresión $1281/195 = 6{,}57$. Los términos de SP aparecen en la trayectoria de Collatz en el mismo orden, conforme al Teorema 4.4.

Corrección respecto de la versión 1: allí se consignaban 389, 194 y 194 términos respectivamente, cifras que además no son consistentes entre sí.

Observación 6.3. Estos ejemplos ilustran el comportamiento de la compresión, que se mantiene en torno al 30 % para SP y al 15 % para SPI y SPP. Se trata de una observación sobre el coste de recorrer una trayectoria, no de un indicio sobre su convergencia: por el Corolario 5.2, ambas trayectorias convergen o divergen simultáneamente por construcción.

7. Conclusiones

SP es una representación comprimida exacta de la trayectoria de Collatz: cada paso de SP condensa $s(k)$ pasos de f_C, con $s(k) \geq 1$ explícitamente determinado por valuaciones 2-ádicas (Teorema 4.4). SPI y SPP son sus subsucesiones de impares y de pares, obtenidas cada una por dos iteraciones de SP (Teorema 4.5), y se determinan mutuamente (Observación 4.7). En los casos examinados, SP recorre en torno al 30 % de los términos de la trayectoria original y SPI y SPP en torno al 15 % cada una.

La convergencia universal de SP —y por tanto la de SPI y la de SPP— es equivalente a la conjetura de Collatz (Corolario 5.2). Esta equivalencia es el resultado principal de la presente versión y sustituye a la inferencia retirada. Su valor es delimitador: establece que el marco SP/SPI/SPP es una reformulación del problema y no un camino hacia su solución, y que ninguna verificación numérica dentro de este marco constituye evidencia que no estuviera ya contenida en la verificación directa de Collatz.

Queda como cuestión abierta si la estructura de valuaciones que el marco pone de manifiesto —en particular la distribución conjunta de $k_i = \nu_2(A_i+1)$ y $m_i = \nu_2\big(3^{k_i}q_i - 1\big)$ a lo largo de una órbita— permite decir algo sobre la desigualdad de la Observación 5.3(3) que no se sepa ya por otras vías.

Referencias

[1] J. C. Lagarias, *The* $3x + 1$ *problem and its generalizations*, American Mathematical Monthly **92** (1985), n.º 1, 3–23.

[2] J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The* $3x + 1$ *Problem*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[3] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arithmetica **30** (1976), 241–252.

[4] I. Krasikov, J. C. Lagarias, *Bounds for the* $3x+1$ *problem using difference inequalities*, Acta Arithmetica **109** (2003), n.º 3, 237–258.

[5] G. J. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the* $3n + 1$ *Function*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1681, Springer-Verlag, Berlín, 1998.