La conjugación $y = x + 1$ y la estructura de los tramos de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2026

Resumen

Sobre los enteros impares, la aplicación $T(x) = (3x+1)/2$ satisface $T(x)+1 = \frac{3}{2}(x+1)$: el cambio de variable $y = x+1$ la convierte en la multiplicación por $\frac{3}{2}$. Mostramos que esta única identidad determina por completo la estructura interna de los tramos de las trayectorias de Collatz —la relación $(B+1)/(A+1) = (3/2)^k$, la alternancia de impares de tipo $4n+3$ y $4n+1$, y la longitud exacta del tramo— y construimos a partir de ella una función que recorre una trayectoria conservando solo los extremos de sus tramos. Demostramos que los parámetros de esa función no son libres: la condición de producir un entero impar los determina unívocamente a partir de la entrada. Establecemos finalmente que la convergencia universal de la sucesión así generada es equivalente a la conjetura de Collatz, de modo que la construcción es una reformulación del problema y no una reducción.

Nota sobre esta versión. Este escrito reemplaza a ≪Función Generadora de Secuencias Armónicas sobre Números Impares: Extracción de la Estructura Esencial de los Tramos de Collatz≫ (junio de 2025). Se retiran de aquel texto: el Teorema 6.2, cuya demostración de convergencia universal era incorrecta; la afirmación de que los parámetros (k, m) admiten varias elecciones válidas para una misma entrada, que es falsa (Teorema 3.2); la comparación de la Sección 9 con los récords computacionales de longitud, que confrontaba magnitudes no comparables; y las cifras de la Sección 8.2, que confundían el valor $2^n - 1$ con el exponente n (Observación 4.5). El resto del contenido se conserva, reorganizado en torno a la identidad del Lema 2.1, y sus demostraciones se han completado.

1. Introducción

Las trayectorias de Collatz se dejan descomponer en *tramos*: cadenas de ascensos consecutivos rematadas por una sucesión de divisiones. Este escrito describe esa estructura, muestra que está enteramente determinada por una única identidad elemental y construye a partir de ella una función que recorre una trayectoria conservando solo los extremos de sus tramos.

La identidad es la siguiente. Sobre los enteros impares, la aplicación $T(x) = \frac{3x+1}{2}$ cumple

$$T(x) + 1 = \tfrac{3}{2}\,(x + 1),$$

de modo que el cambio de variable $y = x + 1$ convierte el paso abreviado de Collatz en la multiplicación por $\frac{3}{2}$. De ahí se siguen, sin trabajo adicional, los tres hechos estructurales que organizan el escrito:

- la relación $\dfrac{B+1}{A+1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^k$ entre el impar A que abre un tramo y el par B que lo cierra, siendo k el número de impares que contiene;

- la alternancia interna del tramo, en la que los impares de tipo $4n+3$ producen exactamente una división y un impar de tipo $4n+1$ lo cierra mediante varias divisiones consecutivas;
- la longitud del tramo, igual a $2\,\nu_2(A+1)+1$ términos y por tanto arbitrariamente grande: el tramo que abre $A = 2^n - 1$ tiene $2n+1$ términos.

En la primera versión de este escrito (junio de 2025) estos tres hechos figuraban como teoremas independientes. Aquí se presentan como lo que son: lecturas sucesivas de una misma identidad.

El escrito incorpora además dos resultados ausentes de aquella versión, cada uno de los cuales corrige una afirmación suya.

El primero concierne a la función generadora

$$T(A,k,m) = \frac{(A+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k - 1}{2^m},$$

presentada allí como una familia dotada de flexibilidad paramétrica, en la que varias combinaciones (k,m) podían ser válidas para una misma entrada. Demostramos que no la tiene: la exigencia de que el resultado sea un entero impar positivo con $m \geq 1$ fuerza $k = \nu_2(A+1)$. No hay, pues, familia paramétrica sino una única función determinista, y la búsqueda exhaustiva prevista en el algoritmo devuelve siempre el mismo valor.

El segundo concierne al alcance. La primera versión afirmaba demostrar la convergencia universal de la secuencia generada por T. Esa demostración era incorrecta y se retira. En su lugar probamos que el enunciado que pretendía establecer es *equivalente* a la conjetura de Collatz: la sucesión comprimida que arranca en A alcanza el 1 si y solo si lo alcanza la trayectoria de Collatz de A. La compresión no es, por tanto, un camino hacia la conjetura, sino otra manera de escribirla.

Queda entonces planteada la única pregunta que el marco permite plantear con sentido. La representación deja a la vista una estructura de valuaciones: cada paso queda descrito por el par (k_i, m_i) con $k_i = \nu_2(A_i+1)$ y $m_i = \nu_2\big(3^{k_i}q_i - 1\big)$, donde $A_i + 1 = 2^{k_i}q_i$, y la convergencia equivale a que se cumpla siempre

$$\sum_i m_i \;>\; (\log_2 3 - 1)\sum_i k_i.$$

Si esta escritura dice algo sobre la distribución conjunta de ambos exponentes que no se sepa ya por otras vías, ahí estaría su utilidad. El presente escrito se limita a establecer el marco con precisión y a dejar la pregunta formulada.

2. La conjugación y la estructura del tramo

Recordemos la función de Collatz: para $x \in \mathbb{N}^+$,

$$f_C(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{si } x \text{ es impar,} \\ x/2, & \text{si } x \text{ es par,} \end{cases}$$

y denotemos por $\nu_2(x)$ la valuación 2-ádica de x. Sobre los impares definimos $T(x) = \frac{3x+1}{2}$, que es entero por ser $3x+1$ par.

Lema 2.1 (Conjugación)**.** *Para todo x impar, $T(x)+1 = \frac{3}{2}(x+1)$.*

Demostración. $T(x)+1 = \frac{3x+1}{2} + 1 = \frac{3x+3}{2} = \frac{3}{2}(x+1)$. □

Lema 2.2 (Estructura del bloque)**.** *Sea A impar, $n = \nu_2(A+1) \geq 1$, y escribamos $A+1 = 2^n q$ con q impar. Definamos $x_0 = A$ y $x_{j+1} = T(x_j)$. Entonces, para $0 \leq j \leq n$,*

$$x_j + 1 = 3^j\, 2^{n-j}\, q.$$

En particular x_j es impar para $0 \leq j \leq n-1$ —de modo que T está definida en cada uno de esos pasos— y $x_n = 3^n q - 1$ es par.

Demostración. Inducción sobre j. Para $j = 0$ la identidad es la definición de n y q. Si vale para $j \leq n-1$, entonces $n - j \geq 1$, luego $x_j + 1$ es par y x_j impar, de modo que $T(x_j)$ está definida, y por el Lema 2.1

$$x_{j+1} + 1 = \tfrac{3}{2}\left(3^j 2^{n-j} q\right) = 3^{j+1} 2^{n-j-1} q.$$

Para $j = n$ se obtiene $x_n + 1 = 3^n q$, producto de impares y por tanto impar, luego x_n es par. □

Definición 2.3 (Tramo)**.** Con la notación del Lema 2.2, llamamos *tramo abierto por A* al segmento inicial de la trayectoria de Collatz de A

$$A = x_0,\ 2x_1,\ x_1,\ 2x_2,\ x_2,\ \ldots,\ 2x_n,\ x_n = B,$$

y $B = x_n$ es su término de cierre.

Que este segmento es efectivamente la trayectoria de Collatz se comprueba de inmediato: si x_j es impar, $f_C(x_j) = 3x_j + 1 = 2\,T(x_j) = 2x_{j+1}$, y $f_C(2x_{j+1}) = x_{j+1}$. Cada paso de T consume exactamente dos pasos de f_C.

Teorema 2.4 (Relación multiplicativa)**.** *El tramo abierto por A contiene exactamente $n = \nu_2(A+1)$ números impares, y*

$$\frac{B+1}{A+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Demostración. Los términos impares del tramo son $x_0, \ldots, x_{n-1}$, que son n por el Lema 2.2; los restantes, $2x_1, \ldots, 2x_n$ y x_n, son pares. La razón es $\frac{B+1}{A+1} = \frac{3^n q}{2^n q} = (3/2)^n$. □

Teorema 2.5 (Alternancia modular)**.** *Con la notación anterior, $x_j \equiv 3 \pmod 4$ para $0 \leq j \leq n-2$, y $x_{n-1} \equiv 1 \pmod 4$. En consecuencia:*

1. *para $0 \leq j \leq n-2$ se tiene $\nu_2(3x_j + 1) = 1$: cada uno de estos impares produce exactamente una división;*
2. *$\nu_2(3x_{n-1} + 1) \geq 2$: el impar que cierra el tramo produce varias divisiones consecutivas.*

Demostración. Por el Lema 2.2, $\nu_2(x_j + 1) = n - j$ para $0 \leq j \leq n$. Ahora bien, $x_j \equiv 3 \pmod 4$ equivale a $4 \mid x_j + 1$, es decir a $n - j \geq 2$; y $x_j \equiv 1 \pmod 4$ equivale a $n - j = 1$, esto es $j = n - 1$.

Para las consecuencias, $3x_j + 1 = 2x_{j+1}$, luego $\nu_2(3x_j + 1) = 1 + \nu_2(x_{j+1})$. Si $j \leq n-2$ entonces $j + 1 \leq n - 1$ y x_{j+1} es impar, de donde $\nu_2(3x_j + 1) = 1$. Si $j = n - 1$ entonces x_n es par y $\nu_2(3x_{n-1} + 1) = 1 + \nu_2(x_n) \geq 2$. □

Teorema 2.6 (Longitud del tramo)**.** *El tramo abierto por A tiene exactamente $2n + 1$ términos, con $n = \nu_2(A+1)$. En particular, para $A = 2^n - 1$ el tramo tiene exactamente $2n + 1$ términos.*

Demostración. Por la Definición 2.3 el tramo consta de x_0 y de los pares $(2x_j, x_j)$ para $1 \le j \le n$, es decir $1 + 2n$ términos. Para $A = 2^n - 1$ se tiene $A + 1 = 2^n$, luego $\nu_2(A+1) = n$. □

Ejemplo 2.7. Como n no está acotado, tampoco lo está la longitud de un tramo. El tramo abierto por $2^{1000} - 1$ tiene 2001 términos; el abierto por $2^{10^9} - 1$ tiene $2 \cdot 10^9 + 1$. Se trata de segmentos de trayectoria cuya longitud se conoce exactamente sin necesidad de calcularlos.

3. La función generadora y la determinación de sus parámetros

Definición 3.1. Para A impar y $k, m \in \mathbb{N}^+$ definimos

$$T(A,k,m) = \frac{(A+1)\left(\frac{3}{2}\right)^k - 1}{2^m} = \frac{(A+1)3^k - 2^k}{2^{\,k+m}},$$

donde la segunda expresión, de numerador y denominador enteros, es la que se emplea en los cálculos.

La primera versión de este escrito presentaba (k, m) como parámetros libres, sujetos únicamente a que el resultado fuese un impar positivo, y proponía localizarlos mediante una búsqueda exhaustiva. El teorema siguiente muestra que esa libertad no existe.

Teorema 3.2 (Los parámetros están forzados)**.** *Sea A impar, $n = \nu_2(A+1)$ y $A+1 = 2^n q$ con q impar. Si $k, m \in \mathbb{N}^+$ son tales que $T(A,k,m)$ es un entero impar positivo, entonces necesariamente*

$$k = n \qquad y \qquad m = \nu_2(3^n q - 1)\,.$$

Demostración. Escribamos $N = (A+1)3^k - 2^k = 2^n q\, 3^k - 2^k$, de modo que $T(A,k,m) = N/2^{\,k+m}$.

Si $k > n$, entonces $\nu_2\big(2^n q 3^k\big) = n$ y $\nu_2\big(2^k\big) = k > n$, luego $\nu_2(N) = n < k \le k+m$ y $2^{\,k+m} \nmid N$: el cociente no es entero.

Si $k < n$, entonces $\nu_2\big(2^n q 3^k\big) = n > k$, luego $\nu_2(N) = k$ exactamente y $N/2^k$ es impar. Como $m \ge 1$, el cociente $N/2^{\,k+m}$ no es entero.

Queda $k = n$. En ese caso $N = 2^n(3^n q - 1)$ y $T(A,n,m) = (3^n q - 1)/2^m$, que es un entero impar si y solo si $m = \nu_2(3^n q - 1)$. □

Corolario 3.3. *T es una función de A solamente. Escribiendo $B = 3^n q - 1$ y $m = \nu_2(B)$,*

$$T(A) := T(A,n,m) = \frac{B}{2^m},$$

que es el término de cierre del tramo abierto por A dividido por su mayor potencia de 2. La doble búsqueda sobre (k,m) prevista en el algoritmo de la versión anterior devuelve siempre este par y es por tanto innecesaria: n y m se leen directamente de dos valuaciones.

Corolario 3.4. *$T(A)$ es el primer término impar de la trayectoria de Collatz de A posterior al tramo que A abre. Concretamente,*

$$T(A) = f_C^{\,2n+m}(A), \qquad n = \nu_2(A+1), \quad m = \nu_2(B).$$

Demostración. Por la Definición 2.3 se alcanza B tras $2n$ pasos de f_C, y B es par; las m divisiones siguientes conducen a $B/2^m$, que es impar. □

Corolario 3.5 (Coincidencia con el operador f_{SPI})**.** *Para todo A impar,*

$$T(A) = f_{SPI}(A) = f_{SP}(f_{SP}(A))\,,$$

donde f_{SP} y f_{SPI} son los operadores definidos en [6].

Demostración. Con la notación del Lema 2.2, la rama impar de f_{SP} da $f_{SP}(A) = 3^n q - 1 = B$, que es el término de cierre del tramo abierto por A (Definición 2.3); como B es par, la rama par da $f_{SP}(B) = B/2^{\nu_2(B)}$. Esta composición es $f_{SPI}(A)$ por definición, y coincide con $T(A)$ según el Corolario 3.3. □

Observación 3.6. Las dos construcciones no son, por tanto, aproximaciones distintas que converjan a un mismo resultado, sino dos derivaciones del mismo operador: una por composición de f_{SP}, otra por cierre del tramo. Iterándolas se obtiene la misma órbita para toda entrada impar, de modo que la lista de impares de [6] y la sucesión comprimida de este escrito no constituyen verificaciones mutuamente independientes.

Definición 3.7 (Sucesión comprimida)**.** Dado A_0 impar, la sucesión comprimida es $A_{i+1} = T(A_i)$. Escribimos $k_i = \nu_2(A_i + 1)$, $A_i + 1 = 2^{k_i} q_i$, $B_i = 3^{k_i} q_i - 1$ y $m_i = \nu_2(B_i)$.

Proposición 3.8 (Relación exacta entre términos consecutivos)**.** *Para todo i,*

$$A_{i+1} + \frac{1}{2^{m_i}} \;=\; (A_i + 1)\,\frac{3^{k_i}}{2^{\,k_i + m_i}}.$$

Demostración. $A_{i+1} = \left(3^{k_i} q_i - 1\right)/2^{m_i} = 3^{k_i} q_i / 2^{m_i} - 2^{-m_i}$, y $3^{k_i} q_i = (A_i + 1)\,3^{k_i}/2^{k_i}$. □

Observación 3.9. Obsérvese que el término correctivo 2^{-m_i} no puede omitirse: la identidad $A_{i+1} + 1 = (A_i + 1) 3^{k_i} / 2^{\,k_i + m_i}$ solo sería válida para $m_i = 0$, que el Teorema 3.2 excluye. Es la relación de la Proposición 3.8, y no aquella, la que rige el crecimiento de la sucesión.

4. Compresión

Proposición 4.1. *Cada aplicación de T condensa $2k_i + m_i \geq 3$ pasos de f_C. Para $A = 2^n - 1$, el primer paso de la sucesión comprimida condensa un tramo de $2n + 1$ términos.*

Demostración. Corolario 3.4 y Teorema 2.6; la cota $2k_i + m_i \geq 3$ se sigue de $k_i \geq 1$ y $m_i \geq 1$. □

La tabla siguiente recoge, para varios valores iniciales, el número de términos de la trayectoria de Collatz desde A hasta 1 (ambos incluidos) y el de la sucesión comprimida bajo el mismo convenio.

A	Términos de Collatz	Términos comprimidos	Factor
21	8	2	4,00
17	13	4	3,25
51	25	6	4,17
39	35	7	5,00
511	62	11	5,64
1023	63	10	6,30
27	112	18	6,22

Ejemplo 4.2 ($A = 51$)**.** La trayectoria de Collatz es

$$51,\ 154,\ 77,\ 232,\ 116,\ 58,\ 29,\ 88,\ 44,\ 22,\ 11,\ 34,\ 17,$$
$$52,\ 26,\ 13,\ 40,\ 20,\ 10,\ 5,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,$$

y la sucesión comprimida extrae

$$51 \to 29 \to 11 \to 13 \to 5 \to 1,$$

con pares $(k, m) = (2, 2),\ (1, 2),\ (2, 1),\ (1, 2),\ (1, 3)$.

Ejemplo 4.3 ($A = 27$)**.** La sucesión comprimida tiene dieciocho términos, frente a los ciento doce de la trayectoria completa:

$$27 \to 31 \to 121 \to 91 \to 103 \to 175 \to 445 \to 167 \to 283 \to 319$$
$$\to 911 \to 577 \to 433 \to 325 \to 61 \to 23 \to 5 \to 1.$$

Ejemplo 4.4 ($A = 511$)**.** $511 \to 9841 \to 7381 \to 173 \to 65 \to 49 \to 37 \to 7 \to 13 \to 5 \to 1$. El primer paso, con $k_0 = 9$, condensa el tramo completo de 19 términos que $511 = 2^9 - 1$ abre, y en él la sucesión crece por un factor mayor que 19.

Observación 4.5 (La compresión no es exponencial)*.* El Teorema 2.6 da para $A = 2^n - 1$ un tramo de $2n + 1$ términos, donde $n = \log_2(A + 1)$: la longitud del tramo es logarítmica en A, no exponencial. La versión anterior de este escrito afirmaba en su Sección 8.2 que $2^{10} - 1 = 1023$ abre un tramo de más de 2000 términos, y análogamente para $2^{20} - 1$ y $2^{100} - 1$; esas cifras resultan de tomar el valor $2^n - 1$ en lugar del exponente n. El tramo abierto por 1023 tiene 21 términos, y su trayectoria completa 63. Queda igualmente sin fundamento la estimación de factores de compresión del orden de $10^9 : 1$ que figuraba en las conclusiones de aquella versión.

5. Alcance de la representación

Se comprueba directamente que $T(1) = 1$: en efecto, $1 + 1 = 2$, $n = 1$, $q = 1$, $B = 2$ y $m = 1$.

Teorema 5.1 (Equivalencia)**.** *Para todo A impar, la sucesión comprimida que arranca en A alcanza el valor* 1 *si y solo si la trayectoria de Collatz de A alcanza el valor* 1*.*

Demostración. Por el Corolario 3.4, $A_i = f_C^{\sigma_i}(A)$ con $\sigma_0 = 0$ y $\sigma_{i+1} - \sigma_i = 2k_i + m_i \geq 3$; en particular (σ_i) es estrictamente creciente y no acotada.

($\Leftarrow$) Si $f_C^t(A) = 1$ para algún t, entonces $f_C^\sigma(A) \in \{1, 4, 2\}$ para todo $\sigma \geq t$, pues a partir de 1 la trayectoria recorre el ciclo $1 \to 4 \to 2 \to 1$. Tomando i con $\sigma_i \geq t$ se obtiene $A_i \in \{1, 4, 2\}$; pero A_i es impar por construcción, luego $A_i = 1$.

($\Rightarrow$) Si $A_i = 1$ para algún i, entonces $f_C^{\sigma_i}(A) = 1$. □

Corolario 5.2. *El enunciado* «para todo A impar la sucesión comprimida alcanza el 1» *es equivalente a la conjetura de Collatz.*

Demostración. La conjetura para un par x equivale a la conjetura para el impar $x/2^{\nu_2(x)}$, que aparece en su trayectoria. El resto es el Teorema 5.1 cuantificado sobre A. □

Observación 5.3 (Qué queda abierto)*.* De la Proposición 3.8 se sigue

$$A_{i+1} < (A_i + 1)\,\frac{3^{k_i}}{2^{\,k_i + m_i}},$$

de modo que el comportamiento de la sucesión está gobernado por el signo acumulado de $\sum_i (k_i + m_i) - (\log_2 3) \sum_i k_i$, es decir, por si se cumple siempre

$$\sum_i m_i \;>\; (\log_2 3 - 1) \sum_i k_i \;\approx\; 0{,}585 \sum_i k_i.$$

Esta es exactamente la dificultad central del problema $3x+1$ en la formulación de Terras [3], escrita aquí en términos de $\nu_2(A_i+1)$ en lugar de $\nu_2(3A_i+1)$. El Corolario 5.2 garantiza que no puede ser de otro modo: una demostración de convergencia dentro de este marco sería una demostración de la conjetura, con su misma dificultad.

La cuestión que el marco sí permite plantear es si la estructura de tramos aporta información sobre la distribución conjunta de k_i y m_i —en particular sobre $\nu_2\big(3^k q - 1\big)$ condicionada a k— que no se obtenga por las vías habituales. Sobre esa distribución no afirmamos nada aquí.

6. Conclusiones

La estructura interna de los tramos de Collatz —la relación $(3/2)^k$ entre los extremos, la alternancia de impares $4n+3$ y $4n+1$, y la longitud exacta $2\nu_2(A+1)+1$— es consecuencia de una única identidad: la conjugación $T(x)+1 = \frac{3}{2}(x+1)$. Presentarla así, en lugar de como una colección de resultados independientes, es la aportación expositiva de este escrito.

La función que comprime cada tramo en un solo paso queda entonces determinada sin ambigüedad: sus parámetros no son libres, sino que se leen de dos valuaciones 2-ádicas de la entrada (Teorema 3.2). Este es el resultado nuevo respecto de la versión anterior, y elimina de paso la búsqueda exhaustiva que aquella prescribía.

La compresión resultante es real y verificable —en torno a un factor 5 o 6 para los valores examinados, y arbitrariamente alta sobre un tramo aislado cuando $\nu_2(A+1)$ es grande—, pero es una economía de representación y no un instrumento de demostración: por el Corolario 5.2, la convergencia universal de la sucesión comprimida es la conjetura de Collatz y no un enunciado más débil.

Referencias

[1] J. C. Lagarias, *The $3x+1$ problem and its generalizations*, American Mathematical Monthly **92** (1985), n.º 1, 3–23.

[2] J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: The $3x+1$ Problem*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[3] R. Terras, *A stopping time problem on the positive integers*, Acta Arithmetica **30** (1976), 241–252.

[4] I. Krasikov, J. C. Lagarias, *Bounds for the $3x+1$ problem using difference inequalities*, Acta Arithmetica **109** (2003), n.º 3, 237–258.

[5] G. J. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the $3n+1$ Function*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1681, Springer-Verlag, Berlín, 1998.

[6] M. Cerdá Bennassar, *Estudio de las Secuencias SP, SPI y SPP y su Relación con Propiedades Dinámicas*, versión 2, septiembre de 2026.