Una restricción de exponentes para los ciclos del mapa de retorno

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Resumen

En [3] se demostró que el mapa de retorno R sobre los impares positivos no admite ciclos periódicos no triviales con nueve ramas expansivas o menos. La demostración acotaba inferiormente la profundidad expansiva total E comparando factores multiplicativos, a partir de la estimación $R(Q)/Q \leq 27/31$ válida en toda rama contractiva.

Aquí se obtiene una segunda restricción, independiente de aquella y más fuerte, que no compara factores sino que contabiliza exponentes. Si m es el número de expansiones, d el parámetro entero del ciclo y S la suma de todos sus exponentes 2-ádicos, entonces

$$E \;\geq\; S - \left\lfloor \tfrac{5}{2}\,(d-m) \right\rfloor .$$

Se establece además la identidad exacta de la que procede, que indica cuánto se pierde respecto del caso extremo, y se demuestra que el coeficiente $5/2$ es óptimo: existen rachas arbitrariamente largas de la rama B_5, construidas explícitamente mediante la congruencia $5Q \equiv 27 \pmod{2 \cdot 32^{L}}$.

Como corolario, la cota superior para d mejora en todos los casos recalculados salvo $m = 8$, y el resultado de [3] se eleva un escalón:

> *No existe ningún ciclo periódico positivo no trivial de R que contenga diez ramas expansivas o menos.*

Índice

1. Introducción **2**

2. La identidad de exponentes **2**

3. Optimalidad del coeficiente **3**

4. Consecuencia: la tabla de cotas superiores **4**

5. Demostración del resultado principal **5**

6. El caso siguiente **5**

7. La parte computacional **6**

8. Conclusiones 7

1. Introducción

El mapa de retorno R, introducido en [1] y estudiado en [2, 3], posee dos familias de ramas,

$$A_r(Q) = \frac{3^{r-1}Q + 3^{r-2}}{2^r}, \qquad B_r(Q) = \frac{3^{r-2}Q + 3^{r-2}}{2^r}, \qquad r \geq 2,$$

de las cuales son expansivas A_r con $r \geq 3$ y B_r con $r \geq 6$; las contractivas son exactamente A_2, B_2, B_3, B_4, B_5.

Para un ciclo con m ramas expansivas de profundidades $e_1, \ldots, e_m$, escribimos $E = \sum e_j$ para la profundidad expansiva total, S para la suma de los exponentes r de todas las ramas, k para el número de símbolos, b para el de ramas de tipo B y $d = k + b$. En [3] la cota inferior para E se obtiene comparando los factores multiplicativos del ciclo, lo que da

$$E > \gamma\,(d - 2m), \qquad \gamma = \frac{\log(31/27)}{2\log(3/2)} = 0{,}170360\ldots \tag{1}$$

La observación de la que parte este escrito es que esa comparación desaprovecha información. Las ramas contractivas forman un alfabeto finito y conocido; para cada una de ellas puede calcularse exactamente cuánto aporta a S por cada unidad que aporta a d, y ese cociente está acotado. Contabilizar exponentes, en lugar de comparar factores, produce una restricción distinta:

$$E \;\geq\; S - \left\lfloor \tfrac{5}{2}\,(d - m) \right\rfloor. \tag{2}$$

Como S es aproximadamente αd con $\alpha = \log 3/\log(3/2) = 2{,}709511\ldots$, el miembro derecho de (2) vale aproximadamente $(\alpha - \frac{5}{2})d + \frac{5}{2}m = 0{,}209511\,d + 2{,}5\,m$, frente al $0{,}170360\,d - 0{,}34\,m$ de (1). La mejora es de un factor 1,23 en el coeficiente de d, y el término en m cambia de signo.

Ese coeficiente interviene en el exponente de la cota del mínimo del ciclo, de modo que la mejora se propaga a toda la tabla de cotas superiores de [3, Prop. 6.3] y eleva el resultado un escalón.

Teorema 1.1 (Resultado principal)**.** *No existe ningún ciclo periódico positivo no trivial de R que contenga diez ramas expansivas o menos.*

Las Secciones 2 y 3 establecen (2) y la optimalidad de su coeficiente; la Sección 4 recalcula la tabla de cotas superiores y la Sección 5 demuestra el Teorema 1.1.

2. La identidad de exponentes

Fijemos la notación para las multiplicidades de cada rama en un ciclo con m expansiones:

$a_{\mathrm{exp}},\ b_{\mathrm{exp}}$	expansiones de tipo A y de tipo B, con $a_{\mathrm{exp}} + b_{\mathrm{exp}} = m$,
a_{con}	ramas A_2,
b_2, b_3, b_4, b_5	ramas B_2, B_3, B_4, B_5.

Teorema 2.1 (Identidad de exponentes)**.** *Para todo ciclo de R con m ramas expansivas,*

$$\boxed{2E = 2S - 5d + 5m + 5b_{\text{exp}} + a_{\text{con}} + 6b_2 + 4b_3 + 2b_4.} \tag{3}$$

Demostración. Sea $N = a_{\text{con}} + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$ el número de ramas contractivas y $B_c = b_2 + b_3 + b_4 + b_5$. Cada símbolo aporta una unidad a k, y cada símbolo de tipo B aporta además una unidad a b; por tanto cada rama de tipo A aporta 1 a $d = k + b$ y cada rama de tipo B aporta 2, de donde

$$d = m + a_{\text{con}} + 2B_c + b_{\text{exp}}.$$

Por otra parte, separando la contribución expansiva y la contractiva a la suma de exponentes,

$$S = E + 2a_{\text{con}} + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5.$$

Sustituyendo ambas expresiones en $2S - 5d + 5m$ se obtiene

$$2S - 5d + 5m = 2E - a_{\text{con}} - 6b_2 - 4b_3 - 2b_4 + 0 \cdot b_5 - 5b_{\text{exp}},$$

que es (3) reordenada. □

Corolario 2.2 (Restricción de exponentes)**.** *Todo ciclo de R con m ramas expansivas satisface*

$$E \;\geq\; S - \left\lfloor \tfrac{5}{2}\,(d - m) \right\rfloor,$$

con igualdad si y solo si $a_{\text{con}} = b_2 = b_3 = b_4 = b_{\text{exp}} = 0$, esto es, si todas las ramas contractivas son B_5 y todas las expansivas son de tipo A.

Demostración. Todos los sumandos añadidos en (3) son no negativos, luego $2E \geq 2S - 5d + 5m$ y $E \geq S - \frac{5}{2}(d - m)$. Como E y S son enteros, puede tomarse la parte entera indicada. La igualdad exige que se anulen b_{exp}, a_{con}, b_2, b_3 y b_4; el coeficiente de b_5 es nulo y esa multiplicidad queda libre. □

Observación 2.3. La identidad (3) no es una estimación: cuantifica exactamente cuánto se aparta un ciclo del caso extremo. Cada rama B_2 cuesta 6 unidades de $2E$, cada B_3 cuesta 4, cada B_4 cuesta 2, cada A_2 cuesta 1 y cada expansión de tipo B cuesta 5; las ramas B_5 no cuestan nada. Esta contabilidad se usa en la Sección 6.

3. Optimalidad del coeficiente

El coeficiente $\frac{5}{2}$ del Corolario 2.2 procede de la rama B_5, que aporta 5 a S y 2 a d. Cabría esperar que pudiera rebajarse acotando cuántas ramas B_5 consecutivas son posibles. No es así.

Lema 3.1 (Forma afín de B_5)**.** $B_5(Q) = \frac{27}{32}(Q+1)$ *tiene punto fijo* $27/5$ *y multiplicador* $27/32$*, de modo que*

$$5\,B_5^{L}(Q) - 27 = \Big(\frac{27}{32}\Big)^{L}(5Q - 27).$$

Demostración. De $B_5(Q) - \frac{27}{5} = \frac{27}{32}(Q - \frac{27}{5})$, inmediata por iteración. □

Teorema 3.2 (Rachas arbitrariamente largas)**.** *Para todo $L \geq 1$ y todo X, existen enteros impares $Q > X$ tales que la órbita de R desde Q aplica la rama B_5 exactamente L veces consecutivas. En consecuencia, el coeficiente $\frac{5}{2}$ es óptimo para la estimación de exponentes basada únicamente en el alfabeto contractivo, sin restricciones adicionales de cierre orbital.*

Demostración. Tomemos Q con

$$5Q - 27 = 2 \cdot 32^{L}\, t, \tag{4}$$

lo que exige $2 \cdot 32^{L} t \equiv -27 \pmod 5$, es decir $t \equiv 3 \cdot 2^{-(L+1)} \pmod 5$: una clase residual, con infinitos representantes y Q creciente en t, de modo que puede tomarse $Q > X$.

Sea $Q_i = B_5^i(Q)$. Por el Lema 3.1, $5Q_i - 27 = 2 \cdot 27^i 32^{\,L-i} t$, luego

$$Q_i + 1 = \frac{2(16 + 27^i 32^{\,L-i} t)}{5}.$$

Para $0 \le i \le L-1$ se tiene $32^{\,L-i} \equiv 0 \pmod{32}$, de modo que $16 + 27^i 32^{\,L-i} t$ tiene valuación 2-ádica exactamente 4 y por tanto $\nu_2(Q_i + 1) = 5$: la rama aplicada en Q_i es exactamente B_5. Se obtienen así L aplicaciones consecutivas.

Si el coeficiente $\frac{5}{2}$ pudiera rebajarse a $\kappa < \frac{5}{2}$, un bloque formado por L ramas B_5 daría $5L = S_{\text{con}} \le \kappa \cdot 2L$, imposible para L grande. □

Observación 3.3. El Teorema 3.2 cierra en negativo la vía de acotar las rachas de B_5. Una mejora del coeficiente tendría que apoyarse no en el bloque contractivo aislado, sino en su pertenencia a un ciclo, es decir, en condiciones sobre sus extremos.

4. Consecuencia: la tabla de cotas superiores

La cadena de [3, Secs. 5–6] se conserva íntegra sustituyendo únicamente la cota inferior para E. Recordemos sus piezas: con $c = \log_2 \frac{3}{2}$ y $\eta_m = c/((1+c)^m - 1)$, el lema de optimización de [3, Lema 5.1] da

$$q > \frac{2^{\,\eta_m E} - 1}{3},$$

y la cota $\Lambda < d/(2q)$ de [2, Prop. 5.3] produce

$$0 < \Lambda = d \log 3 - S \log \tfrac{3}{2} < \frac{3d}{2\big(2^{\,\eta_m \underline{E}} - 1\big)}, \tag{5}$$

donde $\underline{E}$ es cualquier cota inferior de E. Tomamos

$$\underline{E} = \max\Big\{ S - \lfloor \tfrac{5}{2}(d-m) \rfloor,\ \lfloor \gamma(d-2m) \rfloor + 1 \Big\}, \tag{6}$$

es decir, el mayor de los valores que proporcionan (2) y (1). Las dos restricciones son independientes y conviene conservar ambas: la primera domina en el rango que aquí interesa, pero la segunda no depende de S y acota el recorrido de la criba.

La cota de Laurent, Mignotte y Nesterenko [4] se aplica como en [3, Sec. 6], pues la cota de altura $S < 9d$ no se ve afectada, y da $\Lambda > e^{-11792{,}44}$. Confrontada con (5) deja un rango finito de d, que se criba usando que S es entero.

Proposición 4.1 (Cotas superiores revisadas)**.** *Todo ciclo con m expansiones satisface $d \le d_{\max}(m)$, con*

m	$d_{\text{máx}}$ *según [3]*	$d_{\text{máx}}$ *con (6)*	*reducción*
1	*65*	*27*	$-58\,\%$
2	*203*	*179*	$-12\,\%$
3	*568*	*358*	$-37\,\%$
4	*957*	*747*	$-22\,\%$
5	*1 735*	*1 346*	$-22\,\%$
6	*3 291*	*2 513*	$-24\,\%$
7	*5 625*	*4 458*	$-21\,\%$
8	*9 126*	*9 126*	$0\,\%$
9	*18 252*	*12 028*	$-34\,\%$
10	*27 767*	*19 987*	$-28\,\%$
11	*46 408*	*36 893*	$-21\,\%$
12	—	*55 534*	
13	—	*92 816*	

Observación 4.2. El caso $m = 8$ no mejora. Allí el valor $d = 9126$ sobrevive por una razón ajena a la cota de E: $24727/9126$ es un convergente de α precedido del cociente parcial $a_8 = 23$, de modo que $\Lambda_{\text{mín}}(9126)$ es excepcionalmente pequeña. Es la misma anomalía señalada en [3, Obs. 7.5].

5. Demostración del resultado principal

La cota inferior de [3, Teorema 7.3] no depende del número de expansiones y se conserva sin cambios: todo ciclo periódico positivo no trivial de R satisface $d > 27\,766$. Procede de la verificación de que ningún impar menor o igual que $387\,396\,683$ es el mínimo de un ciclo, junto con la comprobación directa de la condición necesaria $\Lambda_{\text{mín}}(d) < d/(2X_0)$ para todo $d \le 27\,766$.

Demostración del Teorema 1.1. Supongamos que existe un ciclo periódico positivo no trivial de R con $m \le 10$ ramas expansivas. La Proposición 4.1 da $d \le d_{\text{máx}}(m) \le d_{\text{máx}}(10) = 19\,987$, y la cota inferior de [3] da $d > 27\,766$, lo cual es imposible. □

Observación 5.1. Con la restricción (2) disponible, el resultado de [3] habría podido obtenerse con menos maquinaria: la cota (1), y con ella el lema de contracción uniforme $R(Q)/Q \le 27/31$ que la sostiene, dejan de ser necesarias para los casos $m \le 9$. Se conservan aquí porque (6) las utiliza como respaldo fuera del rango principal.

6. El caso siguiente

El Teorema 1.1 no alcanza a $m = 11$, para el cual la Proposición 4.1 deja $27\,767 \le d \le 36\,893$. La identidad (3) describe con precisión qué aspecto tendría un ciclo semejante.

En efecto, para que E se aproxime a su cota inferior es necesario que el defecto

$$5b_{\text{exp}} + a_{\text{con}} + 6b_2 + 4b_3 + 2b_4 = 2E - (2S - 5d + 5m)$$

sea pequeño. La identidad, por sí sola, no obliga a que ese defecto sea pequeño: para demostrar la dominancia de B_5 es necesario combinarla con una cota superior para E. Cuando ambas

cotas dejan un margen reducido, los coeficientes positivos de las demás ramas limitan cuántas contracciones pueden apartarse de B_5.

Esa posible dominancia proporciona una estructura concreta que investigar. El Teorema 3.2 muestra que una racha de L ramas B_5 exige

$$5Q \equiv 27 \pmod{2 \cdot 32^L},$$

es decir, fija su valor de entrada módulo 2^{5L+1}. Estas congruencias corresponden a valores orbitales distintos y no se acumulan automáticamente: las ramas intermedias transportan las condiciones de una racha a la siguiente. El problema consiste en acoplar esas restricciones con las cotas de tamaño orbital y con el cierre entero del ciclo. No se desarrolla esa vía en el presente escrito.

7. La parte computacional

Los enunciados de las Secciones 2 y 3 son demostrados y no requieren cómputo. La Proposición 4.1 sí. Para cada m se recorren los valores de d y, para cada uno, los enteros S con $0 < \Lambda <$ cota, usando (6). Dos criterios de parada controlan el recorrido.

En S: se detiene cuando Λ supera el valor que daría (1) por sí sola. Es lícito porque al disminuir S la primera componente de (6) decrece mientras la segunda no depende de S, de modo que la cota crece hacia el valor dado por (1); una vez que Λ lo supera, ningún S menor puede sobrevivir.

En d: el recorrido llega hasta el límite que impone la cota de Laurent, Mignotte y Nesterenko y, en la práctica, hasta rebasar en cuatro mil unidades el último d superviviente. Los límites efectivos empleados para $m = 1, \ldots, 13$ fueron, respectivamente, 4 029, 4 181, 4 360, 4 749, 5 348, 6 515, 8 460, 13 128, 16 030, 23 989, 40 895, 59 536 y 96 818.

Sobre el control numérico: la decisión de supervivencia compara Λ con una cota, ambas evaluadas en aritmética de precisión arbitraria. Para certificar que la precisión empleada no altera ninguna decisión, el cálculo completo se repite con 60 y con 250 dígitos decimales y se comprueba que ambas ejecuciones producen la misma tabla; las cantidades comparadas no se aproximan en ningún caso a menos de varios órdenes de magnitud de la precisión empleada.

La cota inferior $d > 27\,766$ se toma de [3] sin modificación, incluida su verificación computacional.

El código completo, escrito en Python 3 y con la sola dependencia de `mpmath`, está disponible en

`https://www.collatz.es/articulos/seccion7_4/verificacion_exponentes.py`

Ejecutado sin argumentos comprueba, en este orden, la identidad de exponentes, la construcción de rachas de B_5, la tabla de cotas superiores y el cierre. Su huella SHA-256 es

```
d5412fcac8fe75bd2f3aeddad150968f
816fa3118962ed25a3f10a77077dd3af
```

8. Conclusiones

1. La identidad (3) relaciona exactamente la profundidad expansiva total con los parámetros del ciclo y las multiplicidades de cada rama.
2. De ella se sigue la restricción $E \geq S - \lfloor \frac{5}{2}(d-m) \rfloor$, independiente de la empleada en [3] y más fuerte en un factor 1,23 en el coeficiente de d.
3. El coeficiente $\frac{5}{2}$ es óptimo: existen rachas arbitrariamente largas de la rama B_5, construidas explícitamente.
4. La cota superior para d mejora en todos los casos recalculados salvo $m = 8$, donde manda una anomalía de aproximación racional.
5. En consecuencia no existen ciclos con diez ramas expansivas o menos (Teorema 1.1).
6. Para $m = 11$ queda $27\,767 \leq d \leq 36\,893$. Combinada con una cota superior para E, la identidad limitaría cuántas contracciones pueden apartarse de B_5; las congruencias asociadas a esas rachas son una vía concreta de ataque, pendiente de desarrollar.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Un sistema dinámico sobre enteros y mitades de impares*, 2026. Disponible en `collatz.es`.

[2] M. Cerdá Bennassar, *Inexistencia de ciclos con una única expansión en un mapa de retorno sobre los impares*, 2026. Disponible en `collatz.es`.

[3] M. Cerdá Bennassar, *Ciclos con un número fijo de expansiones en un mapa de retorno sobre los impares*, 2026. Disponible en `collatz.es`.

[4] M. Laurent, M. Mignotte and Y. Nesterenko, *Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation*, Journal of Number Theory **55** (1995), 285–321.