La tabla 2-ádica de los números naturales: tablas truncadas, números de Jacobsthal y medida de Haar

Miguel Cerdá Bennassar
https://collatz.es

Febrero de 2026
Revisado en septiembre de 2026. Versión 2: noviembre de 2026

Resumen

Se estudia la disposición de los números naturales en una tabla bidimensional en la que cada $n = 2^k m$, con m impar, ocupa la fila k de la columna de raíz m. Se calcula la longitud de cada fila de la tabla truncada hasta un natural N y se muestra que es igual a $\lfloor N/2^{k+1} \rfloor$ más la cifra k-ésima de N en base 2. Se estudian dos truncaciones especiales: hasta $N = 2^{n+1}-1$, en la que las filas tienen longitudes $2^n, 2^{n-1}, \ldots, 1$, y hasta el número de Jacobsthal $N = J_{2s} = (4^s - 1)/3$, en la que las filas tienen longitudes $J_{2s-1}, J_{2s-2}, \ldots, J_1$. Ambas son casos particulares de un resultado general: cuando la escritura binaria de N es periódica a partir de una cifra, las longitudes de las filas satisfacen, desde la fila correspondiente, una recurrencia lineal determinada por el período. El mismo argumento se aplica a las tablas p-ádicas. Se localizan además los números de Mersenne en la fila de los impares y se identifica la distribución límite de las filas con la medida de Haar de los enteros 2-ádicos. La lectura de la dinámica de Collatz sobre esta misma tabla se trata en el escrito *Una reformulación estructural del problema de Collatz mediante una disposición columnar de los números naturales* [1].

1. Introducción

La representación habitual de los números naturales es la recta numérica, que oculta la factorización de cada natural como producto de una potencia de 2 por un impar. La tabla que se estudia aquí reorganiza los naturales precisamente según esa factorización: la fila 0 recoge los impares, la fila 1 los pares que no son múltiplos de 4, la fila 2 los múltiplos de 4 que no lo son de 8, y así sucesivamente.

La partición de $\mathbb{N}$ que define la tabla es la descomposición 2-ádica estándar y no es nueva. El interés de este escrito está en sus truncaciones: al cortar la tabla en un natural N, las longitudes de las filas siguen fórmulas exactas, y para ciertos valores de N reproducen sucesiones conocidas, en particular los números de Jacobsthal.

El escrito se organiza así. La Sección 2 define la tabla. La Sección 3 calcula las longitudes de las filas de una tabla truncada cualquiera y las expresa mediante la escritura binaria de N. La Sección 4 estudia las truncaciones de Mersenne y de Jacobsthal, y la Sección 5 las sitúa dentro de un resultado general sobre escrituras binarias periódicas. La Sección 6 localiza los números de Mersenne en la fila 0, la Sección 7 identifica la distribución límite de las filas con la medida de Haar de $\mathbb{Z}_2$ y la Sección 8 extiende los resultados a las tablas p-ádicas.

Esta segunda versión añade la expresión binaria de las longitudes de las filas (Proposición 3.3), las Secciones 5 y 8, que responden a las dos preguntas abiertas de la versión anterior, y corrige la Observación 4.6.

2. La tabla 2-ádica

Para $n \geq 1$ se denota por $\nu_2(n)$ el mayor exponente k tal que $2^k \mid n$, y por $\mathrm{odd}(n) = n/2^{\nu_2(n)}$ su parte impar.

Definición 2.1 (Tabla 2-ádica)**.** La tabla 2-ádica $\mathcal{T}$ dispone cada natural $n = 2^k m$, con $k = \nu_2(n)$ y $m = \mathrm{odd}(n)$, en la fila k y en la columna de raíz m:

$$\mathcal{T}(k, m) = 2^k m, \qquad k \geq 0, \quad m \in \{1, 3, 5, \dots\}.$$

Dentro de cada fila, las columnas se ordenan por su raíz, de modo que la raíz m ocupa la posición $(m+1)/2$.

Proposición 2.2. *La aplicación $(k, m) \mapsto 2^k m$ es una biyección de $\{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 3, 5, \dots\}$ en $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. En particular, cada natural ocupa exactamente una celda de $\mathcal{T}$.*

Demostración. Es la existencia y unicidad de la escritura $n = 2^k m$ con m impar, que se obtiene tomando $k = \nu_2(n)$ y $m = \mathrm{odd}(n)$. □

Las primeras filas de la tabla son:

Fila k	Columnas de raíz $m = 1, 3, 5, \dots$											
0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	$\cdots$
1	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	$\cdots$
2	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	$\cdots$
3	8	24	40	56	72	88	104	120	136	152	168	$\cdots$
4	16	48	80	112	144	176	208	240	272	304	336	$\cdots$
5	32	96	160	224	288	352	416	480	544	608	672	$\cdots$

Cada columna es la cadena $m, 2m, 4m, 8m, \dots$ generada por su raíz impar, y cada número $2n$ se sitúa en la fila inmediatamente inferior a la de n, en su misma columna. La primera columna contiene las potencias de 2: $\mathcal{T}(k, 1) = 2^k$.

3. Tablas truncadas

Definición 3.1 (Tabla truncada)**.** Para $N \geq 1$, la tabla truncada $\mathcal{T}(N)$ está formada por las celdas de $\mathcal{T}$ cuyo valor es a lo sumo N. Se denota por $r_k(N)$ la longitud de su fila k, es decir, el número de naturales $n \leq N$ con $\nu_2(n) = k$.

Por la Proposición 2.2, $\mathcal{T}(N)$ contiene exactamente los naturales $1, 2, \dots, N$, y por tanto $\sum_{k \geq 0} r_k(N) = N$.

Proposición 3.2 (Longitud de las filas)**.** *Para $N \geq 1$ y $k \geq 0$,*

$$r_k(N) = \Big\lfloor \frac{N}{2^k} \Big\rfloor - \Big\lfloor \frac{N}{2^{k+1}} \Big\rfloor.$$

En particular, $\mathcal{T}(N)$ tiene exactamente $\lfloor \log_2 N \rfloor + 1$ filas no vacías.

Demostración. Hay $\lfloor N/2^k \rfloor$ naturales $n \leq N$ divisibles por 2^k, y de ellos $\lfloor N/2^{k+1} \rfloor$ son divisibles por 2^{k+1}. La diferencia cuenta los $n \leq N$ con $\nu_2(n) = k$. La fila k no está vacía si y solo si $2^k \leq N$, es decir, si y solo si $k \leq \lfloor \log_2 N \rfloor$. □

Para $k \geq 0$ se denota por $b_k(N) \in \{0, 1\}$ la cifra de N en la posición k de su escritura binaria, contada desde la derecha a partir de 0, de modo que $N = \sum_{k \geq 0} b_k(N)\, 2^k$.

Proposición 3.3 (Expresión binaria de las longitudes)**.** *Para $N \geq 1$ y $k \geq 0$,*

$$r_k(N) = \Big\lfloor \frac{N}{2^{k+1}} \Big\rfloor + b_k(N).$$

Demostración. El cociente $\lfloor N/2^k \rfloor$ es el número cuya escritura binaria se obtiene suprimiendo las k últimas cifras de N, y su última cifra es $b_k(N)$. Por tanto $\lfloor N/2^k \rfloor = 2\lfloor N/2^{k+1} \rfloor + b_k(N)$, y basta sustituir en la Proposición 3.2. □

Corolario 3.4. *Para $N \geq 1$ se tiene $r_0(N) = \lceil N/2 \rceil$ y, para $k \geq 1$,*

$$r_k(N) = r_{k-1}\big(\lfloor N/2 \rfloor\big).$$

Es decir, las filas $1, 2, 3, \ldots$ de $\mathcal{T}(N)$ tienen las mismas longitudes que las filas $0, 1, 2, \ldots$ de $\mathcal{T}(\lfloor N/2 \rfloor)$.

Demostración. Para $k = 0$, la Proposición 3.3 da $r_0(N) = \lfloor N/2 \rfloor + b_0(N) = \lceil N/2 \rceil$. Para $k \geq 1$, se tiene $\lfloor \lfloor N/2 \rfloor / 2^k \rfloor = \lfloor N/2^{k+1} \rfloor$ y $b_{k-1}(\lfloor N/2 \rfloor) = b_k(N)$, y la Proposición 3.3 aplicada a $\lfloor N/2 \rfloor$ y a N da la igualdad. También puede verse directamente: la multiplicación por 2 lleva biyectivamente los naturales $n \leq \lfloor N/2 \rfloor$ con $\nu_2(n) = k - 1$ a los naturales $2n \leq N$ con $\nu_2(2n) = k$. □

Observación 3.5. La longitud $r_k(N)$ no coincide en general con $\lceil N/2^{k+1} \rceil$. Como $\lceil N/2^{k+1} \rceil = \lfloor N/2^{k+1} \rfloor + 1$ si $2^{k+1} \nmid N$ y $\lceil N/2^{k+1} \rceil = \lfloor N/2^{k+1} \rfloor$ si $2^{k+1} \mid N$, la Proposición 3.3 muestra que las dos cantidades difieren exactamente cuando $b_k(N) = 0$ y $2^k \nmid N$, es decir, cuando la cifra k de N es 0 pero alguna cifra de posición inferior no lo es. Por ejemplo, $85 = 1010101_2$ y $b_5(85) = 0$, de modo que $r_5(85) = 1$, mientras que $\lceil 85/64 \rceil = 2$.

4. Dos truncaciones especiales

4.1. La truncación de Mersenne

Proposición 4.1. *Sea $n \geq 0$. La tabla truncada $\mathcal{T}(2^{n+1} - 1)$ tiene $n + 1$ filas no vacías, de longitudes*

$$r_k(2^{n+1} - 1) = 2^{n-k}, \qquad 0 \leq k \leq n.$$

Demostración. Para $0 \le k \le n+1$ se tiene $\lfloor (2^{n+1}-1)/2^k \rfloor = 2^{n+1-k}-1$, y la Proposición 3.2 da $r_k = (2^{n+1-k}-1) - (2^{n-k}-1) = 2^{n-k}$. □

Por ejemplo, $\mathcal{T}(31)$ tiene filas de longitudes $16, 8, 4, 2, 1$ y $\mathcal{T}(63)$ tiene filas de longitudes $32, 16, 8, 4, 2, 1$.

4.2. La truncación de Jacobsthal

Los números de Jacobsthal [2] (OEIS A001045 [3]) se definen por

$$J_0 = 0, \quad J_1 = 1, \quad J_m = J_{m-1} + 2J_{m-2} \ (m \ge 2), \qquad J_m = \frac{2^m - (-1)^m}{3}.$$

Los primeros valores son $0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, \ldots$ De la fórmula cerrada se deduce la relación

$$J_m = 2J_{m-1} + (-1)^{m+1} \qquad (m \ge 1), \tag{1}$$

y los términos de índice par tienen la forma $J_{2s} = (4^s - 1)/3 = 1 + 4 + \cdots + 4^{s-1}$, que en binario se escribe $1010\cdots101_2$, con s unos.

Lema 4.2. *Sea $s \ge 1$. Para $0 \le k \le 2s$,*

$$\left\lfloor \frac{J_{2s}}{2^k} \right\rfloor = \begin{cases} J_{2s-k}, & k \text{ par}, \\ J_{2s-k} - 1, & k \text{ impar}. \end{cases}$$

Demostración. Por la fórmula cerrada, $J_{2s}/2^k = (2^{2s-k} - 2^{-k})/3$. Si k es par, $J_{2s-k} = (2^{2s-k}-1)/3$ y

$$\frac{J_{2s}}{2^k} - J_{2s-k} = \frac{1 - 2^{-k}}{3} \in \left[0, \frac{1}{3}\right),$$

luego la parte entera es J_{2s-k}. Si k es impar, $J_{2s-k} = (2^{2s-k}+1)/3$ y

$$\frac{J_{2s}}{2^k} - J_{2s-k} = -\frac{1 + 2^{-k}}{3} \in \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right],$$

luego la parte entera es $J_{2s-k} - 1$. □

Teorema 4.3 (Jacobsthal en la tabla 2-ádica)**.** *Sea $s \ge 1$. La tabla truncada $\mathcal{T}(J_{2s})$ tiene $2s-1$ filas no vacías, de longitudes*

$$r_k(J_{2s}) = J_{2s-1-k}, \qquad 0 \le k \le 2s-2.$$

Es decir, las longitudes de las filas son, de arriba abajo, $J_{2s-1}, J_{2s-2}, \ldots, J_2, J_1$.

Demostración. Sea $0 \le k \le 2s-1$ y $j = 2s-k$. Por la Proposición 3.2 y el Lema 4.2: si k es par, j es par y $r_k = J_j - (J_{j-1} - 1) = J_{j-1}$, pues $J_j = 2J_{j-1} - 1$ por (1); si k es impar, j es impar y $r_k = (J_j - 1) - J_{j-1} = J_{j-1}$, pues $J_j = 2J_{j-1} + 1$ por (1). En ambos casos $r_k = J_{2s-1-k}$. Para $k = 2s-1$ se obtiene $r_{2s-1} = J_0 = 0$, y para $k \ge 2s$ la fila está vacía porque $2^{2s} > J_{2s}$. Como $J_1, \ldots, J_{2s-1}$ son positivos, las filas no vacías son exactamente las de índice $0 \le k \le 2s-2$. □

Ejemplo 4.4. Para $s = 3$, la tabla $\mathcal{T}(21)$ tiene filas de longitudes J_5, J_4, J_3, J_2, J_1, es decir, 11, 5, 3, 1, 1:

Fila k	Elementos											r_k
0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	11
1	2	6	10	14	18							5
2	4	12	20									3
3	8											1
4	16											1

Para $s = 4$, la tabla $\mathcal{T}(85)$ tiene filas de longitudes $43, 21, 11, 5, 3, 1, 1$.

Observación 4.5 (Comprobación de la suma). Como $\mathcal{T}(J_{2s})$ contiene los naturales de 1 a J_{2s}, el Teorema 4.3 equivale a la identidad $J_1 + J_2 + \cdots + J_{2s-1} = J_{2s}$, que también puede comprobarse directamente: $\sum_{i=0}^{m} J_i = (J_{m+2} - 1)/2$, y para $m = 2s - 1$ se obtiene $(J_{2s+1} - 1)/2 = J_{2s}$.

Observación 4.6 (Índice par e índice impar). La truncación en un número de Jacobsthal de índice impar no reproduce la sucesión de Jacobsthal: $\mathcal{T}(11)$, con $11 = J_5$, tiene filas de longitudes $6, 3, 1, 1$, y $\mathcal{T}(43)$, con $43 = J_7$, tiene filas de longitudes $22, 11, 5, 3, 1, 1$. Sí la reproduce la truncación en $J_{2s+1} - 1 = 2J_{2s}$: $\mathcal{T}(10)$ tiene filas de longitudes $5, 3, 1, 1 = J_4, J_3, J_2, J_1$, y $\mathcal{T}(42)$ tiene filas de longitudes $21, 11, 5, 3, 1, 1$. La razón se verá en el Corolario 5.5: la escritura binaria de $2J_{2s}$ es alternante, $1010\cdots10_2$, mientras que la de J_{2s+1} termina en 11.

Observación 4.7 (Diferencias entre filas consecutivas). Por la recurrencia de Jacobsthal, la diferencia entre las longitudes de dos filas consecutivas de $\mathcal{T}(J_{2s})$ es de nuevo un número de Jacobsthal duplicado:

$$r_k - r_{k+1} = J_{2s-1-k} - J_{2s-2-k} = 2J_{2s-3-k}.$$

En $\mathcal{T}(85)$: $43 - 21 = 22 = 2 \cdot 11$, $21 - 11 = 10 = 2 \cdot 5$, $11 - 5 = 6 = 2 \cdot 3$, y así sucesivamente.

Observación 4.8 (Sumas parciales). La escritura $J_{2s} = 4^{s-1} + 4^{s-2} + \cdots + 4 + 1$ presenta J_{2s} como la última de las sumas parciales 4^{s-1}, $4^{s-1} + 4^{s-2}$, $\ldots$, $4^{s-1} + \cdots + 4 + 1$; por ejemplo, $16, 20, 21$ para $s = 3$. En la suma de todas ellas, la potencia 4^k aparece en $k+1$ sumas parciales, de modo que esa suma vale $\sum_{k=0}^{s-1}(k+1)\,4^k$, que es el término s-ésimo de la sucesión OEIS A014916 [5]: $1, 9, 57, 313, 1593, \ldots$

5. Escrituras binarias periódicas

Las truncaciones de Mersenne y de Jacobsthal corresponden a las escrituras binarias $11\cdots1_2$ y $1010\cdots101_2$. En esta sección se muestra que cualquier repetición en la escritura binaria de N se traduce en una recurrencia lineal entre las longitudes de las filas de $\mathcal{T}(N)$.

Sea $N \geq 1$ con $L = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$ cifras binarias, que se escriben ahora de izquierda a derecha:

$$N = (d_0\, d_1 \cdots d_{L-1})_2, \qquad d_0 = 1, \qquad d_j = b_{L-1-j}(N).$$

Para $0 \leq j \leq L$ se denota por $P_j = (d_0 \cdots d_{j-1})_2 = \lfloor N/2^{L-j} \rfloor$ el número formado por las j primeras cifras, con $P_0 = 0$, y para $0 \leq j \leq L-1$ se escribe

$$R_j = r_{L-1-j}(N),$$

de modo que $R_0, R_1, \ldots, R_{L-1}$ son las longitudes de las filas de $\mathcal{T}(N)$ leídas de abajo arriba.

Lema 5.1. *Para $0 \leq j \leq L-1$ se tiene $R_j = P_j + d_j$. En particular $R_0 = 1$ y, para $0 \leq j \leq L-2$,*

$$R_{j+1} = 2R_j + d_{j+1} - d_j.$$

Demostración. Con $k = L-1-j$, la Proposición 3.3 da $R_j = \lfloor N/2^{L-j} \rfloor + b_{L-1-j}(N) = P_j + d_j$. Como $P_{j+1} = 2P_j + d_j$, se obtiene $R_{j+1} = 2P_j + d_j + d_{j+1} = 2R_j + d_{j+1} - d_j$. □

Proposición 5.2 (Repeticiones y recurrencias)**.** *Sean $q \geq 1$ y $0 \leq j \leq L-1-q$. Si $d_{j+q} = d_j$, entonces*

$$R_{j+q} = R_{j+q-1} + R_{j+q-2} + \cdots + R_{j+1} + 2R_j.$$

Demostración. Sumando las igualdades del Lema 5.1 para los índices $j, j+1, \ldots, j+q-1$,

$$\sum_{i=0}^{q-1} (R_{j+i+1} - 2R_{j+i}) = \sum_{i=0}^{q-1} (d_{j+i+1} - d_{j+i}) = d_{j+q} - d_j = 0.$$

El miembro izquierdo vale $R_{j+q} - R_{j+q-1} - \cdots - R_{j+1} - 2R_j$. □

Corolario 5.3 (Escrituras eventualmente periódicas)**.** *Sean $q \geq 1$ y $j_0 \geq 0$, y supóngase que $d_{i+q} = d_i$ para $j_0 \leq i \leq L-1-q$. Entonces la sucesión $R_{j_0}, R_{j_0+1}, \ldots, R_{L-1}$ satisface la recurrencia lineal de polinomio característico*

$$x^q - x^{q-1} - \cdots - x - 2 = (x-2)(x^{q-1} + x^{q-2} + \cdots + 1).$$

Demostración. Es la Proposición 5.2 aplicada a cada j con $j_0 \leq j \leq L-1-q$. La factorización se comprueba desarrollando el producto. □

Los valores iniciales $R_{j_0}, \ldots, R_{j_0+q-1}$ dependen de las primeras cifras de N a través del Lema 5.1. Se recogen a continuación los primeros casos.

Ejemplo 5.4 (Período 1)**.** Si $N = 2^L - 1 = 11\cdots1_2$, se tiene $R_0 = 1$ y $R_{j+1} = 2R_j$, luego $R_j = 2^j$. Es la Proposición 4.1.

Corolario 5.5 (Período 2: escritura alternante)**.** *Si la escritura binaria de N es alternante, $N = 1010\cdots_2$ con L cifras, es decir, $N = \lfloor 2^{L+1}/3 \rfloor$, la tabla $\mathcal{T}(N)$ tiene L filas no vacías, de longitudes $J_L, J_{L-1}, \ldots, J_1$ de arriba abajo. En particular, para $L = 2s-1$ se obtiene $N = J_{2s}$ y el Teorema 4.3, y para $L = 2s$ se obtiene $N = 2J_{2s} = J_{2s+1} - 1$ y la tabla $\mathcal{T}(2J_{2s})$, de filas $J_{2s}, J_{2s-1}, \ldots, J_1$.*

Demostración. Por el Lema 5.1, $R_0 = 1$ y, si $L \geq 2$, $R_1 = P_1 + d_1 = 1 + 0 = 1$. Como $d_{j+2} = d_j$ para todo j, la Proposición 5.2 da $R_{j+2} = R_{j+1} + 2R_j$, que es la recurrencia de Jacobsthal con $R_0 = J_1$ y $R_1 = J_2$. Luego $R_j = J_{j+1}$ para $0 \leq j \leq L-1$. La igualdad $N = \lfloor 2^{L+1}/3 \rfloor$ se sigue de $J_{2s} = (4^s - 1)/3$ y $2J_{2s} = (2 \cdot 4^s - 2)/3$. □

Ejemplo 5.6 (Período 2 con prefijo)**.** Si la escritura binaria de N empieza por unas cifras cualesquiera y continúa de forma alternante, las longitudes de las filas satisfacen la recurrencia de Jacobsthal $R_{j+2} = R_{j+1} + 2R_j$ a partir de la fila en que empieza la alternancia, con valores iniciales distintos de J_1, J_2. Las sucesiones $3, 7, 13, 27, 53, 107, 213, 427, 853, \ldots$ y $7, 15, 29, 59, 117, 235, 469, 939, 1877, \ldots$ aparecen en unas tablas del autor de 2019. Son, salvo el término inicial, las sucesiones OEIS A048573 [7], definida por $a(0) = 2$, $a(1) = 3$ y $a(n) = a(n-1) + 2a(n-2)$, y OEIS A383953 [8], definida por $a(0) = 4$ y $a(n) = 2a(n-1) + (-1)^n$; esta última también cumple $a(n) = a(n-1) + 2a(n-2)$ para $n \geq 2$. Sus términos $853 = 1101010101_2$ y $1877 = 11101010101_2$, que son en ambos casos el término $a(9)$, tienen escritura

alternante a partir de la segunda y de la tercera cifra, respectivamente, y las tablas truncadas correspondientes tienen filas de longitudes, de arriba abajo,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(853):&\ 427,\ 213,\ 107,\ 53,\ 27,\ 13,\ 7,\ 3,\ 2,\ 1,\\ \mathcal{T}(1877):&\ 939,\ 469,\ 235,\ 117,\ 59,\ 29,\ 15,\ 7,\ 4,\ 2,\ 1.\end{aligned}$$

En ambos casos, las filas superiores reproducen los términos anteriores de la sucesión. Lo mismo ocurre con todos los términos $a(n)$ de índice impar $n \geq 3$ de ambas sucesiones, cuya escritura binaria es 11 o 111 seguida de las cifras alternantes $0101\cdots01$: las filas de $\mathcal{T}(a(n))$ tienen longitudes $a(n-1), a(n-2), \ldots, a(1)$, seguidas de $2, 1$ en la primera sucesión y de $4, 2, 1$ en la segunda. En los términos de índice par $n \geq 2$, cuya escritura binaria termina en 11, la fila superior tiene un elemento más, $a(n-1)+1$, y las demás filas no cambian. Para $N = 853$, el Lema 5.1 da $R_0 = 1$, $R_1 = 2$ y $R_2 = 3$, y como $d_{j+2} = d_j$ para $j \geq 1$, la Proposición 5.2 da $R_{j+2} = R_{j+1} + 2R_j$ para $j \geq 1$, de donde $R_2, R_3, \cdots = 3, 7, 13, 27, \ldots$ Para $N = 1877$ se obtiene del mismo modo $R_0, R_1, R_2, R_3 = 1, 2, 4, 7$ y $R_{j+2} = R_{j+1} + 2R_j$ para $j \geq 2$, de donde $R_3, R_4, R_5, \cdots = 7, 15, 29, \ldots$

Ejemplo 5.7 (Período 3)**.** Si $N = (100100\cdots100)_2$, con el bloque 100 repetido t veces, el Lema 5.1 da $R_0 = 1$, $R_1 = 1$ y $R_2 = 2$, y el Corolario 5.3 da $R_{j+3} = R_{j+2} + R_{j+1} + 2R_j$. Las longitudes de las filas, leídas de abajo arriba, son por tanto los $3t$ primeros términos de la sucesión OEIS A077947 [6], de función generadora $1/(1 - x - x^2 - 2x^3)$:

$$1, 1, 2, 5, 9, 18, 37, 73, 146, 293, 585, 1170, \ldots$$

Por ejemplo, $\mathcal{T}(2340)$, con $2340 = 100100100100_2$, tiene, de arriba abajo, filas de longitudes 1170, 585, 293, 146, 73, 37, 18, 9, 5, 2, 1, 1. La entrada de la OEIS da la fórmula $\text{round}(2^{j+2}/7)$ para el término j-ésimo; el factor $4/7$ es el valor $(100)_2/(2^3 - 1)$ del bloque dividido por $2^3 - 1$.

6. Los números de Mersenne en la fila 0

Los números de Mersenne son $M_n = 2^n - 1$, $n \geq 1$ (OEIS A000225 [4]): $1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$ Como son impares, están en la fila 0.

Proposición 6.1. *El número de Mersenne M_n ocupa, en la fila 0, la posición 2^{n-1}. En consecuencia, los números de Mersenne son exactamente los impares cuya posición en la fila 0 es una potencia de 2.*

Demostración. El impar m ocupa la posición $(m+1)/2$, y para $m = 2^n - 1$ esta posición es 2^{n-1}. Recíprocamente, el impar de la posición 2^{n-1} es $2 \cdot 2^{n-1} - 1 = M_n$. □

Corolario 6.2. *La tabla truncada $\mathcal{T}(2^{n+1}-1)$ contiene los números de Mersenne $M_1, \ldots, M_{n+1}$, y el último elemento de su fila 0 es M_{n+1}.*

7. Distribución de las filas y medida de Haar

Por la Proposición 3.3, $r_k(N) = N/2^{k+1} + O(1)$ con $|O(1)| \leq 1$, y por tanto la proporción de elementos de $\mathcal{T}(N)$ situados en la fila k tiende a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{r_k(N)}{N} = \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Es la distribución geométrica de razón $1/2$: la mitad de los naturales está en la fila 0, la cuarta parte en la fila 1, y así sucesivamente. En la truncación de Mersenne las proporciones son casi exactas; por ejemplo, en $\mathcal{T}(63)$:

Fila k	$r_k(63)$	Proporción en $\mathcal{T}(63)$	Límite $2^{-(k+1)}$
0	32	32/63	1/2
1	16	16/63	1/4
2	8	8/63	1/8
3	4	4/63	1/16
4	2	2/63	1/32
5	1	1/63	1/64

Esta distribución límite tiene una interpretación exacta en los enteros 2-ádicos $\mathbb{Z}_2$ (véase, por ejemplo, [10]). Los elementos de $\mathbb{Z}_2$ con valuación k forman el conjunto $2^k\mathbb{Z}_2^\times$, donde $\mathbb{Z}_2^\times$ es el grupo de unidades (los enteros 2-ádicos impares).

Proposición 7.1 (Medida de Haar)**.** *Sea μ la medida de Haar de $\mathbb{Z}_2$ normalizada por $\mu(\mathbb{Z}_2) = 1$. Entonces*

$$\mu(2^k\mathbb{Z}_2^\times) = \frac{1}{2^{k+1}}, \qquad k \geq 0.$$

Demostración. La medida de Haar normalizada asigna a cada bola $a + 2^k\mathbb{Z}_2$ la medida 2^{-k}. Como $2^k\mathbb{Z}_2^\times = 2^k\mathbb{Z}_2 \setminus 2^{k+1}\mathbb{Z}_2$, se obtiene $\mu(2^k\mathbb{Z}_2^\times) = 2^{-k} - 2^{-(k+1)} = 2^{-(k+1)}$. □

Así, la proporción límite de la fila k de la tabla coincide con la medida de Haar del conjunto de enteros 2-ádicos de valuación k: la tabla truncada $\mathcal{T}(N)$ es una aproximación finita de la partición $\mathbb{Z}_2 = \bigsqcup_{k\geq 0} 2^k\mathbb{Z}_2^\times$ (salvo el punto 0, de medida nula).

8. Tablas p-ádicas

Sea p un primo. La tabla p-ádica $\mathcal{T}_p$ dispone cada natural $n = p^k m$, con $k = \nu_p(n)$ y $p \nmid m$, en la fila k y en la columna de raíz m. Como en la Proposición 2.2, cada natural ocupa exactamente una celda, y la tabla truncada $\mathcal{T}_p(N)$ contiene los naturales $1, \ldots, N$. Se denota por $r_k^{(p)}(N)$ la longitud de su fila k y por $c_k(N) \in \{0, \ldots, p-1\}$ la cifra de N en la posición k de su escritura en base p.

Proposición 8.1. *Para $N \geq 1$ y $k \geq 0$,*

$$r_k^{(p)}(N) = \Big\lfloor \frac{N}{p^k} \Big\rfloor - \Big\lfloor \frac{N}{p^{k+1}} \Big\rfloor = (p-1)\Big\lfloor \frac{N}{p^{k+1}} \Big\rfloor + c_k(N).$$

Demostración. La primera igualdad se obtiene como en la Proposición 3.2, contando los múltiplos de p^k y de p^{k+1}. La segunda, de $\lfloor N/p^k \rfloor = p\lfloor N/p^{k+1} \rfloor + c_k(N)$. □

En particular, $r_k^{(p)}(N)/N \to (p-1)/p^{k+1}$, que es la medida de Haar del conjunto $p^k\mathbb{Z}_p^\times$ de los enteros p-ádicos de valuación k.

Si $N = (d_0\, d_1 \cdots d_{L-1})_p$ con $d_0 \neq 0$, y se definen como antes $P_j = (d_0 \cdots d_{j-1})_p$ y $R_j = r^{(p)}_{L-1-j}(N)$, la Proposición 8.1 da $R_j = (p-1)P_j + d_j$ y, como $P_{j+1} = pP_j + d_j$,

$$R_{j+1} = pR_j + d_{j+1} - d_j.$$

El mismo cálculo de la Proposición 5.2 conduce al resultado siguiente.

Proposición 8.2. *Sean $q \geq 1$ y $0 \leq j \leq L-1-q$. Si $d_{j+q} = d_j$, entonces*

$$R_{j+q} = (p-1)(R_{j+q-1} + \cdots + R_{j+1}) + pR_j.$$

En particular, si la escritura de N en base p es periódica de período q a partir de la cifra j_0, la sucesión $R_{j_0}, \ldots, R_{L-1}$ satisface la recurrencia lineal de polinomio característico $x^q - (p-1)(x^{q-1} + \cdots + x) - p = (x-p)(x^{q-1} + \cdots + 1)$.

Ejemplo 8.3. Si $N = (11\cdots1)_p = (p^L - 1)/(p-1)$, se tiene $R_0 = 1$ y $R_{j+1} = pR_j$, y las filas de $\mathcal{T}_p(N)$ tienen longitudes $p^{L-1}, \ldots, p, 1$, como en la truncación de Mersenne.

Corolario 8.4 (Escritura alternante en base p)**.** *Si la escritura de N en base p es $1010\cdots$ con L cifras, las filas de $\mathcal{T}_p(N)$, leídas de abajo arriba, tienen longitudes*

$$R_j = \frac{p^{j+1} - (-1)^{j+1}}{p+1}, \qquad 0 \leq j \leq L-1.$$

Demostración. Las cifras son $d_j = 1$ para j par y $d_j = 0$ para j impar. Como $P_0 = 0$ y $P_1 = 1$, la igualdad $R_j = (p-1)P_j + d_j$ da $R_0 = 1$ y, si $L \geq 2$, $R_1 = (p-1)\cdot 1 + 0 = p-1$. Como $d_{j+2} = d_j$ para $0 \leq j \leq L-3$, la Proposición 8.2 con $q = 2$ da

$$R_{j+2} = (p-1)R_{j+1} + pR_j, \qquad 0 \leq j \leq L-3,$$

cuyo polinomio característico $x^2 - (p-1)x - p = (x-p)(x+1)$ tiene raíces p y -1. Por tanto $R_j = A\,p^j + B\,(-1)^j$ para ciertas constantes A, B, determinadas por $A + B = R_0 = 1$ y $Ap - B = R_1 = p-1$. Sumando ambas igualdades se obtiene $A(p+1) = p$, luego $A = p/(p+1)$ y $B = 1/(p+1)$, y

$$R_j = \frac{p^{j+1} + (-1)^j}{p+1} = \frac{p^{j+1} - (-1)^{j+1}}{p+1}.$$

Si $L = 1$, solo interviene $R_0 = 1$, que también coincide con la fórmula. □

Para $p = 2$ se recuperan los números de Jacobsthal J_{j+1} del Corolario 5.5. Para $p = 3$ se obtiene la sucesión $(3^n - (-1)^n)/4$, OEIS A015518 [9]: $1, 2, 7, 20, 61, 182, \ldots$; por ejemplo, $\mathcal{T}_3(273)$, con $273 = 101010_3$, tiene filas de longitudes $182, 61, 20, 7, 2, 1$.

Comentario 8.5. En esta sección solo se ha usado la escritura de N en base p, de modo que los resultados valen igualmente para cualquier base entera $b \geq 2$, con filas indexadas por el exponente de la mayor potencia de b que divide a n.

9. Conclusiones

La tabla 2-ádica organiza los naturales según su descomposición $n = 2^k m$. Sus truncaciones tienen filas de longitud exacta $\lfloor N/2^k \rfloor - \lfloor N/2^{k+1} \rfloor = \lfloor N/2^{k+1} \rfloor + b_k(N)$, de modo que la escritura binaria de N determina las longitudes de todas las filas. Al truncar en $2^{n+1} - 1$ las filas tienen longitudes $2^n, \ldots, 1$, y al truncar en el número de Jacobsthal J_{2s}, o en $2J_{2s}$, las

longitudes son números de Jacobsthal consecutivos. Ambos casos se deducen de un resultado general: si $d_{j+q} = d_j$, las longitudes de las filas cumplen $R_{j+q} = R_{j+q-1} + \cdots + R_{j+1} + 2R_j$, y las escrituras binarias periódicas dan lugar a recurrencias lineales de polinomio característico $(x-2)(x^{q-1} + \cdots + 1)$. El argumento se extiende sin cambios a las tablas p-ádicas, en las que la escritura alternante produce la sucesión $(p^n - (-1)^n)/(p+1)$. Los números de Mersenne ocupan en la fila 0 las posiciones que son potencias de 2, y la distribución límite de las filas es la medida de Haar de $\mathbb{Z}_2$.

Las dos preguntas abiertas de la primera versión, sobre otras escrituras binarias periódicas y sobre las tablas p-ádicas, quedan respondidas en las Secciones 5 y 8.

Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Una reformulación estructural del problema de Collatz mediante una disposición columnar de los números naturales*, collatz.es, sección 9.1, diciembre de 2025 (revisado en septiembre de 2026). https://www.collatz.es/section9_1.php

[2] E. Jacobsthal, Fibonaccische Polynome und Kreisteilungsgleichungen, *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft* **17** (1919), 43–57.

[3] OEIS Foundation, Sucesión A001045 (números de Jacobsthal), *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. https://oeis.org/A001045

[4] OEIS Foundation, Sucesión A000225 $(2^n - 1)$, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. https://oeis.org/A000225

[5] OEIS Foundation, Sucesión A014916 $(a(1) = 1,\ a(n) = n \cdot 4^{n-1} + a(n-1))$, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. https://oeis.org/A014916

[6] OEIS Foundation, Sucesión A077947 (desarrollo de $1/(1 - x - x^2 - 2x^3)$), *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. https://oeis.org/A077947

[7] OEIS Foundation, Sucesión A048573 $(a(n) = a(n-1) + 2a(n-2),\ a(0) = 2,\ a(1) = 3)$, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. https://oeis.org/A048573

[8] OEIS Foundation, Sucesión A383953 $(a(0) = 4,\ a(n) = 2a(n-1) + (-1)^n)$, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. https://oeis.org/A383953

[9] OEIS Foundation, Sucesión A015518 $(a(n) = 2a(n-1) + 3a(n-2),\ a(0) = 0,\ a(1) = 1)$, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. https://oeis.org/A015518

[10] W. H. Schikhof, *Ultrametric Calculus: An Introduction to p-adic Analysis*, Cambridge University Press, 1984.