Una reformulación estructural del problema de Collatz mediante una disposición columnar de los números naturales

Miguel Cerdá Bennassar

Diciembre de 2025
Revisado en septiembre de 2026

Resumen

Se introduce una disposición columnar de los números naturales basada en su descomposición 2-ádica, construida de forma local y progresiva. Esta representación organiza los enteros en columnas determinadas por su núcleo impar y permite visualizar de manera explícita las cadenas de divisiones por 2 sin imponer ninguna estructura adicional.

Una vez fijado este escenario, se muestra que la iteración de Collatz puede leerse de forma natural sobre dicha disposición, separando los descensos deterministas asociados a factores de 2 de los desplazamientos horizontales inducidos por los pasos impares. El enfoque no pretende resolver la conjetura de Collatz, sino proporcionar un marco estructural claro y completo para la representación de sus trayectorias.

1. Introducción

El problema de Collatz, formulado a partir de la iteración

$$n \mapsto \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 3n+1, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

ha resistido durante décadas múltiples enfoques analíticos. Una dificultad recurrente es la mezcla, en una misma dinámica, de transformaciones de naturaleza muy distinta: divisiones sucesivas por 2, completamente deterministas, y saltos multiplicativos inducidos por la operación $3n+1$.

En este trabajo se propone una reformulación estructural que separa ambas escalas de forma exacta, apoyándose en una representación columnar de los números naturales basada en su descomposición 2-ádica. El objetivo es clarificar dónde reside la dinámica esencial del problema, sin introducir hipótesis adicionales ni pretender una resolución de la conjetura.

2. La tabla columnar de los números naturales (estructura)

Todo entero positivo puede escribirse de forma única como

$$n = m\,2^k,$$

donde m es impar y $k \geq 0$. Esta descomposición se visualiza de manera natural mediante una tabla columnar en la que cada columna corresponde a una raíz impar m y contiene los valores

$$m,\ 2m,\ 4m,\ 8m, \ldots$$

hasta un límite prefijado.

La construcción de la tabla es puramente local: al recorrer los naturales en orden, cada nuevo número se coloca debajo de su mitad si esta existe, y en caso contrario se inicia una nueva

columna. La estructura resultante coincide con la forma columnar del árbol binario completo subyacente a cualquier *binary heap*, en el sentido puramente estructural.

Esta disposición no introduce ninguna estructura adicional, sino que hace explícita la descomposición natural de los enteros según su núcleo impar y su potencia de 2.

Comentario. *La disposición columnar utilizada en este trabajo hace explícita la descomposición 2-ádica $n = m2^k$ y, por tanto, está emparentada con representaciones estándar en aritmética 2-ádica y con árboles binarios generados por las operaciones de duplicación y bisección. La contribución aquí no reside en la novedad de dicha partición de $\mathbb{N}$, sino en su uso como escenario estructural para la dinámica de Collatz: las divisiones por 2 se traducen en movimientos verticales dentro de una columna, mientras que los pasos impares inducen cambios de columna bien definidos. Esta separación permite describir cualquier trayectoria como una concatenación de descensos deterministas y desplazamientos horizontales, sin introducir hipótesis adicionales.*

3. Construcción progresiva de la tabla

La disposición propuesta no se define como una tabla rectangular de tamaño prefijado. Por el contrario, se construye de forma local y progresiva recorriendo los números naturales en orden creciente.

El procedimiento es el siguiente:

- Se comienza escribiendo el número 1 en la fila superior.
- Para cada nuevo número $n \geq 2$:
  - si n es par, se coloca directamente debajo de $n/2$;
  - si n es impar, se inicia una nueva columna a la derecha.

Este proceso determina de manera unívoca la posición de cada entero positivo sin necesidad de reordenamientos posteriores.

Aplicando estas reglas de forma secuencial se obtiene la siguiente tabla hasta $n = 41$:

	índices de columna j																			
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\cdots$
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	$\cdots$
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38											
4	12	20	28	36																
8	24	40																		
16																				
32																				
$\vdots$																				

Cada columna corresponde a una sucesión de multiplicaciones por 2 a partir de un impar, que actúa como raíz de dicha columna. Los puntos suspensivos indican que la construcción se extiende indefinidamente en anchura, al aparecer nuevos impares. Asimismo, la extensión vertical refleja la aparición de potencias de 2 cada vez mayores. En las secciones siguientes se mostrará cómo la dinámica de Collatz se descompone naturalmente sobre esta estructura.

4. Estructura resultante

La estructura obtenida no es una tabla rectangular de tamaño prefijado. Su anchura crece cada vez que aparece un nuevo impar, que inicia una nueva columna, y su altura crece únicamente cuando en la construcción aparece un número con una potencia de 2 mayor que las ya representadas.

Columnas (cadenas de mitades)

Cada columna está formada por una cadena vertical obtenida mediante divisiones sucesivas por 2. En particular, si una columna comienza en un impar m, entonces sus entradas (hasta el límite de construcción considerado) son

$$m,\ 2m,\ 4m,\ 8m,\ \ldots$$

y cada elemento $2^k m$ se coloca directamente debajo de $2^{k-1}m$.

Esta disposición hace explícita la descomposición única de cada entero positivo en la forma $n = m2^k$, con m impar y $k \geq 0$.

Filas (misma altura 2-ádica)

Cada fila corresponde a una altura 2-ádica fija $k \geq 0$ y contiene precisamente los números cuyo exponente 2-ádico es k, es decir, los enteros de la forma

$$2^k m, \qquad m \text{ impar.}$$

En consecuencia, la primera fila ($k = 0$) contiene los impares; la siguiente ($k = 1$) contiene los pares que no son múltiplos de 4; la fila $k = 2$ contiene los múltiplos de 4 que no son múltiplos de 8, y así sucesivamente.

Al construir la tabla hasta un máximo N, la fila k tiene longitud finita y contiene exactamente los valores $2^k m \leq N$ con m impar. Por ello, las filas no tienen longitud constante y la figura resultante crece de manera no uniforme tanto en anchura como en altura conforme aumenta N.

5. Cobertura completa de los números naturales

Teorema 5.1 (Descomposición única por columnas)**.** *Todo entero positivo $n \geq 1$ aparece exactamente una vez en la disposición construida. En particular, cada n se sitúa en la columna correspondiente a su factor impar y a una altura determinada por su potencia de* 2*.*

Demostración. Todo entero positivo admite una descomposición única

$$n = m\,2^k,$$

donde m es impar y $k \geq 0$. El procedimiento de construcción coloca n debajo de $n/2$ tantas veces como sea posible, hasta alcanzar su núcleo impar m, que inicia la columna correspondiente. La unicidad de la descomposición garantiza que n no puede aparecer en ninguna otra posición. □

6. Dinámica de las iteraciones en la tabla columnar

La tabla columnar definida en las secciones anteriores no es únicamente un dispositivo de clasificación de los números naturales, sino un escenario natural para representar la dinámica de las iteraciones de Collatz. Cada transformación elemental se traduce en un movimiento bien definido dentro de la tabla, lo que permite separar los dos mecanismos que intervienen en una trayectoria.

6.1. Pares receptores de los pasos impares

Para todo impar $m = 2t + 1$ se tiene

$$3m + 1 = 6t + 4 \equiv 4 \pmod 6.$$

Recíprocamente, todo par positivo $y = 6s + 4$ es de la forma $3m + 1$ con $m = (y - 1)/3 = 2s + 1$, que es impar. Se obtiene así una caracterización exacta.

Proposición 6.1 (Pares receptores)**.** *Un par positivo y es de la forma $y = 3m + 1$ con m impar si y solo si $y \equiv 4 \pmod 6$. En tal caso, su predecesor impar inmediato es único: $m = (y - 1)/3$.*

Llamamos *receptores* a los pares $y \equiv 4 \pmod 6$: son exactamente los pares que admiten un predecesor impar inmediato. La Figura 3 del Apéndice los resalta: los pares $4, 10, 16, 22, 28, \ldots, 82$ son, respectivamente, $3m + 1$ para $m = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 27$. Por ejemplo, 22 procede de 7 y 52 procede de 17.

Ser receptor no excluye otra procedencia: un receptor también puede alcanzarse por división entre 2. Así, $4 = 3 \cdot 1 + 1$, pero también $4 = 8/2$. La proposición identifica los pares que *admiten* un predecesor impar inmediato; no separa los pares según una procedencia exclusiva.

Observación 6.1 (Impares múltiplos de 3)**.** *Los impares $m \equiv 3 \pmod 6$, resaltados en la fila superior de la Figura 3, codifican una propiedad distinta. Como $3m' + 1 \equiv 1 \pmod 3$, ningún número de la forma $(3m' + 1)/2^i$ es múltiplo de 3; por tanto, un impar múltiplo de 3 no se alcanza nunca tras un paso impar. Solo puede aparecer como valor inicial de una trayectoria o tras divisiones entre 2 desde un par múltiplo de 3. Si se escribe $m = 6r + 3$, su imagen es*

$$3m + 1 = 18r + 10 = 6(3r + 1) + 4,$$

un receptor cuyo parámetro es $s = 3r + 1$ y no r; por ejemplo, $m = 9$ produce $28 = 6 \cdot 4 + 4$.

6.2. Movimiento vertical: divisiones entre 2

Una división entre 2 lleva $n = 2^k m$ a $2^{k-1} m$: mantiene la columna, cuya raíz es el impar m, y reduce la altura 2-ádica k en una unidad. En la tabla tal como se ha dibujado, con la raíz en la fila superior, este movimiento es vertical *hacia la raíz*, es decir, hacia arriba, mientras que el valor numérico disminuye. Tras exactamente k divisiones se alcanza la raíz m de la columna. Este movimiento es completamente determinista.

6.3. Movimiento horizontal: el paso impar

Desde un impar m, situado en la fila superior de su columna, el paso impar produce

$$3m + 1 = 2^a \, S(m), \qquad a = \nu_2(3m + 1) \geq 1, \quad S(m) \text{ impar.}$$

Por la Proposición 6.1, el par $3m + 1$ es un receptor; está en la columna de raíz $S(m)$, a altura a. Tras a divisiones entre 2, la trayectoria llega a la raíz $S(m)$. Por ejemplo, desde $m = 9$ se obtiene $28 = 4 \cdot 7$, en la columna de raíz 7 y altura 2, y dos divisiones llevan a 7.

El cambio de columna es, por tanto, $m \mapsto S(m)$. Está completamente determinado por m, pero no obedece a ninguna regla sencilla sobre el índice de columna: es la aplicación de Siracusa, y en ella reside toda la dificultad del problema.

Observación 6.2 (La multiplicación por 3)**.** *Si se indexan las columnas por $j = (m - 1)/2$, la multiplicación $m \mapsto 3m$ lleva la columna j a la columna $j' = m + j$, pues $(3m - 1)/2 = m + (m - 1)/2$. Por ejemplo, $m = 9$ está en la columna $j = 4$ y 27 en la columna $j' = 13$. Sin embargo, $m \mapsto 3m$ no es un paso de Collatz: desde $m = 9$ el paso real $3m + 1 = 28$ cae en la columna de raíz 7, no en la de raíz 27. Las afirmaciones sobre el desplazamiento horizontal de una trayectoria deben formularse con $3m + 1$ o con su núcleo impar $S(m)$.*

6.4. Lectura dinámica global

Desde esta perspectiva, una trayectoria de Collatz es una alternancia de dos movimientos elementales:

- un paso impar, que lleva de la raíz m de una columna al receptor $3m+1$, situado en la columna de raíz $S(m)$ a altura $\nu_2(3m+1)$;
- una serie de $\nu_2(3m+1)$ divisiones entre 2, que recorren esa columna hasta su raíz $S(m)$.

Como la tabla contiene todos los enteros positivos, cada término de la trayectoria ocupa una celda de ella. La tabla separa así el mecanismo determinista de las divisiones entre 2, confinado a cada columna, del cambio de columna $m \mapsto S(m)$, que concentra la dinámica no trivial. Las Figuras 1 y 2 del Apéndice muestran dos ejemplos de esta lectura.

7. Ciclos y columnas

Lema 7.1 (Los ciclos no triviales implican varias columnas)**.** *Considérese la dinámica de Collatz proyectada sobre la tabla columnar. Si existe un ciclo distinto del ciclo clásico* $1 \to 4 \to 2 \to 1$*, entonces dicho ciclo contiene al menos dos impares distintos y, por tanto, visita al menos dos columnas distintas de la tabla.*

Demostración. En cualquier ciclo de la iteración de Collatz aparece al menos un impar, pues si todos los términos fueran pares la dinámica sería estrictamente decreciente por divisiones sucesivas entre 2 y no podría cerrarse en un ciclo.

Sea m un impar perteneciente a un ciclo. Si el ciclo contuviera un único impar, ese impar debería reproducirse tras un paso impar y la subsiguiente cadena de divisiones por 2, es decir, tras aplicar $3m+1$ y dividir sucesivamente entre 2 hasta volver a un impar, se obtendría de nuevo el mismo m. Esto implica

$$3m+1 = m\,2^s$$

para algún $s \geq 1$, y por tanto $m = \frac{1}{2^s-3}$, lo que fuerza $s=2$ y $m=1$. Así, el único ciclo con un solo impar es el ciclo clásico.

Por tanto, cualquier ciclo distinto del clásico debe contener al menos dos impares distintos. Como en la tabla columnar cada impar determina una columna (su núcleo impar), la trayectoria cíclica visita necesariamente al menos dos columnas distintas. □

8. Conclusiones

En este escrito se ha introducido una disposición columnar de los números naturales basada en su descomposición 2-ádica, construida de forma local y progresiva, que particiona $\mathbb{N}$ de manera completa y sin solapamientos. Cada entero aparece exactamente una vez, determinado por su núcleo impar y su potencia de 2, sin imponer ninguna estructura adicional sobre el conjunto de los naturales.

Una vez fijado este escenario, se ha mostrado que la dinámica de Collatz puede leerse de forma natural sobre la tabla resultante. Las divisiones por 2 corresponden a desplazamientos verticales dentro de una misma columna, mientras que los pasos impares inducen cambios de columna bien definidos. Esta representación permite separar con claridad los mecanismos deterministas asociados a factores de 2 de los desplazamientos horizontales producidos por la operación $3m+1$.

El enfoque presentado no pretende aportar una demostración de la conjetura de Collatz, sino proporcionar un marco estructural limpio y completo para la representación de sus trayectorias. Al hacer explícita la geometría subyacente de las iteraciones, la tabla columnar clarifica dónde reside la complejidad del problema y ofrece un escenario común para el análisis y la comparación de distintos enfoques dinámicos.

A. Ejemplos ilustrativos en la tabla columnar

Este apéndice recoge algunos ejemplos visuales destinados a ilustrar la lectura de trayectorias de Collatz sobre la tabla columnar introducida en el cuerpo del trabajo. Las figuras no aportan resultados adicionales, sino que muestran de forma explícita los mecanismos descritos previamente: descensos verticales asociados a divisiones por 2 y desplazamientos horizontales inducidos por los pasos impares.

A. Trayectoria general con desplazamientos verticales y horizontales

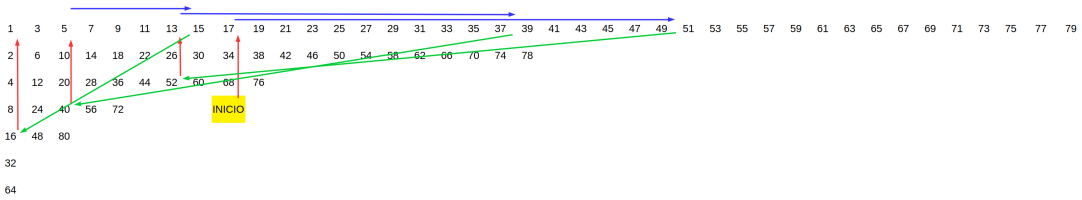

Figura 1: Ejemplo de trayectoria de una secuencia de Collatz representada en la tabla columnar, iniciada en 68. Los desplazamientos verticales corresponden a divisiones sucesivas por 2 dentro de una misma columna, mientras que los pasos impares inducen desplazamientos horizontales entre columnas. La figura ilustra la lectura geométrica de la trayectoria como una concatenación de ambos tipos de movimientos.

Esta representación permite distinguir visualmente los mecanismos deterministas asociados a factores de 2 de los cambios de columna producidos por la operación $3n + 1$, tal como se describe en la Sección 6.

B. Ejemplo clásico: trayectoria de la secuencia iniciada en 17

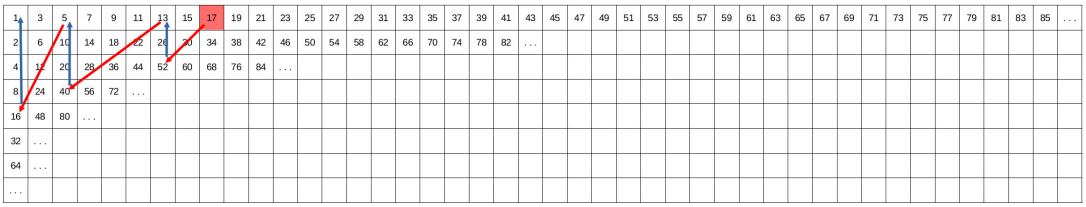

Figura 2: Trayectoria de la secuencia de Collatz iniciada en 17 representada sobre la tabla columnar. El ejemplo muestra un desplazamiento horizontal pronunciado seguido de descensos verticales rápidos, lo que permite identificar la estructura global de la trayectoria.

El caso de 17 es especialmente ilustrativo por la brevedad de la secuencia y por hacer visible la alternancia entre saltos horizontales y caídas verticales hasta alcanzar columnas de índice reducido.

C. Pares obtenidos tras la aplicación de la operación $3m + 1$

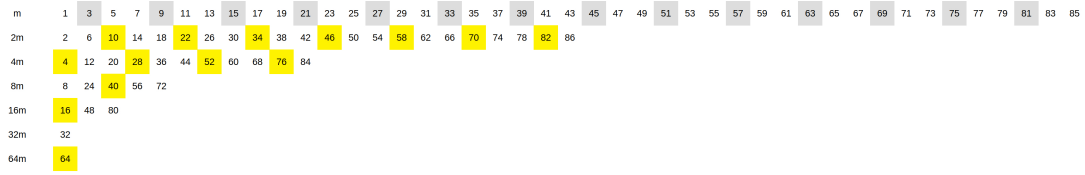

Figura 3: Pares receptores en la tabla columnar. Los pares resaltados en amarillo, $4, 10, 16, \ldots, 82$, son los $y \equiv 4 \pmod 6$, es decir, los valores $3m+1$ de los impares $m = 1, 3, 5, \ldots, 27$. Los impares resaltados en la fila superior son los múltiplos de 3, que no se alcanzan nunca tras un paso impar.

Esta figura ilustra la Proposición 6.1: los pares que admiten un predecesor impar inmediato ocupan posiciones regulares en la tabla: en cada fila de altura $k \geq 1$, uno de cada tres elementos, pues $2^k m \equiv 4 \pmod 6$ equivale a $2^k m \equiv 1 \pmod 3$. Un receptor puede alcanzarse también por división entre 2 (por ejemplo, $4 = 8/2$), de modo que la figura señala qué pares admiten un paso impar como origen, no una procedencia exclusiva.