Particiones binarias de los números naturales

Versión divulgativa con marcos técnicos integrados

Miguel Cerdá Bennassar

ORCID: 0000-0001-8360-1933

Enero de 2026 (revisado en noviembre de 2026)

Resumen

Este texto aborda un problema elemental de la aritmética: de qué maneras puede descomponerse un número natural en dos partes. A partir de una situación cotidiana, se describe de forma progresiva el conjunto completo de particiones binarias posibles y se analizan las restricciones que aparecen de manera inevitable. El estudio pone de manifiesto el papel central de la paridad, la existencia de un reparto de referencia y la presencia de una simetría interna que organiza todas las opciones válidas. Se examina después qué ocurre cuando se exige que las dos partes sean cuadrados o cubos. Ambos tipos de números caben en los repartos: dos cuadrados o dos cubos cualesquiera ocupan una posición bien determinada en el reparto de su suma. La diferencia aparece cuando se exige además que el total sea una potencia del mismo exponente. Para los cuadrados esto ocurre en infinitos casos; para los cubos no ocurre nunca, pero esa imposibilidad es un teorema de Euler y no una consecuencia de la estructura del reparto.

Introducción

Este trabajo estudia un problema elemental de la aritmética: las distintas formas en que un número natural puede descomponerse en dos partes. Aunque la formulación del problema es simple, el conjunto de soluciones posibles presenta una estructura interna bien definida, gobernada por restricciones aritméticas que no dependen de criterios externos, sino de la naturaleza misma de los números.

El objetivo del texto es describir de manera completa y accesible el espacio de las particiones binarias, identificando los parámetros que lo organizan y los límites que lo delimitan, y precisar qué puede y qué no puede deducirse de esa estructura. Para ello se adopta un enfoque progresivo, que parte de consideraciones intuitivas y conduce, cuando es necesario, a formulaciones precisas.

El documento está concebido con una doble finalidad: puede leerse como una exposición divulgativa continua o como un estudio formal, mediante los marcos técnicos integrados en cada sección. Ambos niveles son independientes, pero coherentes entre sí, y permiten al lector elegir el grado de detalle con el que desea abordar el problema.

Nota al lector

Este documento puede leerse de dos maneras:

- **Lectura conceptual:** siguiendo el texto principal, pensado como una exposición divulgativa.
- **Lectura formal:** consultando los **marcos técnicos**, donde se fijan definiciones, resultados y demostraciones.

Ambos niveles están sincronizados por secciones: el texto principal introduce las ideas; los marcos técnicos las precisan.

Índice

1. El problema del reparto **3**

2. Paridad: lo posible y lo imposible **3**

3. Índice de desbalance y parametrización **3**

4. Frontera del espacio de particiones **4**

5. Simetría central y triple igualdad **5**

6. Números especiales: cuadrados perfectos **5**

7. Cubos: encajan, pero el total no es un cubo **6**

8. Síntesis estructural **7**

1. El problema del reparto

Imaginemos una situación sencilla. Un padre quiere repartir un cierto número de objetos entre sus dos hijos. No se trata de dividirlos necesariamente en partes iguales: puede dar más a uno que al otro, siempre que la suma total se conserve.

Pronto surge una dificultad inesperada. Al intentar imponer una diferencia concreta entre las dos partes, descubre que algunos repartos simplemente no existen: por mucho que lo intente, siempre sobra o falta algo. Este pequeño tropiezo cotidiano es, en realidad, una pista matemática.

Marco técnico 1.1 — Definición básica de partición binaria

Definición 1.1. *Sea $c \in \mathbb{N}$. Una* partición binaria *de c es un par ordenado $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tal que $a + b = c$ y $a \leq b$.*

Observación 1.2. *La condición $a \leq b$ evita duplicidades: (a, b) y (b, a) representan el mismo reparto.*

2. Paridad: lo posible y lo imposible

Si el número total que queremos repartir es *par*, las dos partes siempre difieren en una cantidad par. Si el número total es *impar*, la diferencia entre las dos partes es inevitablemente impar. No es una cuestión de justicia ni de preferencia, sino una restricción aritmética: la paridad del total controla todos los repartos posibles.

Cuando el total es par, existe un reparto perfectamente equilibrado, que consiste en dividirlo en dos mitades iguales. Cuando el total es impar, este equilibrio exacto no existe, pero sí un reparto casi equilibrado, en el que una parte recibe solo una unidad más que la otra. A partir de ese reparto central podemos alejarnos poco a poco, dando más a uno y menos al otro, y la idea clave es medir cuánto nos alejamos de él.

Marco técnico 2.1 — Lema de paridad de la diferencia

Lema 2.1. *Sea (a, b) una partición binaria de c. Entonces $b - a$ tiene la misma paridad que c.*

Demostración. Como $a + b = c$, se tiene $c - (b - a) = 2a$, que es par. Por tanto c y $b - a$ son congruentes módulo 2. □

3. Índice de desbalance y parametrización

Introducimos ahora un parámetro sencillo: un número natural que cuenta los pasos que damos desde el reparto más equilibrado. Lo llamaremos *índice de desbalance*.

Cuando el total es par, el reparto central es

$$\frac{c}{2} + \frac{c}{2}.$$

Si nos alejamos un paso, obtenemos

$$\frac{c}{2} - 1 \quad \text{y} \quad \frac{c}{2} + 1.$$

Si nos alejamos dos pasos, restamos y sumamos dos, y así sucesivamente. Cada valor del índice genera exactamente un reparto distinto, y cada reparto procede de un único valor del índice.

Marco técnico 3.1 — Parametrización por índice de desbalance

Proposición 3.1. *Sea $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 2$.*

- *Si c es par, para cada $n \in \{0, 1, \ldots, \frac{c}{2} - 1\}$ definimos*

$$a = \frac{c}{2} - n, \qquad b = \frac{c}{2} + n,$$

  y toda partición binaria de c se escribe de forma única así.

- *Si c es impar, para cada $n \in \{0, 1, \ldots, \frac{c-3}{2}\}$ definimos*

$$a = \frac{c - 2n - 1}{2}, \qquad b = \frac{c + 2n + 1}{2},$$

  y toda partición binaria de c se escribe de forma única así.

Demostración. Sea c par. Las fórmulas dan $a + b = c$; además $a \leq b$ porque $n \geq 0$, y $a \geq 1$ porque $n \leq c/2 - 1$. Recíprocamente, si (a, b) es una partición binaria de c, el lema anterior asegura que $b - a$ es par, y $n = (b - a)/2$ es el único entero que cumple $b - a = 2n$. Resolviendo el sistema $a + b = c$, $b - a = 2n$ se obtienen las fórmulas del enunciado, y las condiciones $a \leq b$ y $a \geq 1$ dan $0 \leq n \leq c/2 - 1$. El caso impar es idéntico con $b - a = 2n + 1$ y $n = (b - a - 1)/2$; la condición $a \geq 1$ da entonces $n \leq (c - 3)/2$. □

4. Frontera del espacio de particiones

Este proceso no puede continuar indefinidamente. Llega un momento en que una de las partes deja de ser positiva, y el reparto deja de tener sentido. Así, el índice de desbalance no puede crecer sin límite: existe una frontera clara entre lo posible y lo imposible. La matemática no solo describe qué repartos existen, sino también dónde se terminan.

Marco técnico 4.1 — Cotas y número de particiones

Corolario 4.1. *El número de particiones binarias de c es*

$$\#\mathcal{P}(c) = \begin{cases} \dfrac{c}{2}, & \text{si } c \text{ es par,} \\ \dfrac{c-1}{2}, & \text{si } c \text{ es impar,} \end{cases}$$

es decir, $\#\mathcal{P}(c) = \lfloor c/2 \rfloor$ en ambos casos.

Demostración. Se cuenta el número de valores admisibles de n en cada caso: de 0 a $c/2-1$ si c es par, y de 0 a $(c-3)/2$ si c es impar. □

Observación 4.2. *En el caso impar conviene no confundir el último índice, $(c-3)/2$, con el número de índices, $(c-1)/2$. Por ejemplo, $c = 5$ tiene exactamente dos particiones, $1+4$ y $2+3$, con índices 1 y 0.*

5. Simetría central y triple igualdad

Todos los repartos válidos comparten una propiedad notable: ambas partes están siempre a la misma distancia de un punto central. En el caso par, ese punto es exactamente la mitad del total; en el caso impar, es el valor intermedio entre las dos mitades posibles. Esta simetría no depende del reparto elegido: es una propiedad estructural del sistema.

Marco técnico 5.1 — Triple igualdad

Proposición 5.1. *Sea (a, b) una partición binaria con índice n.*

- *Si c es par: $a + n = b - n = \frac{c}{2}$.*
- *Si c es impar: $a + n + 1 = b - n = \frac{c+1}{2}$.*

Demostración. Sustitución directa a partir de la parametrización. □

6. Números especiales: cuadrados perfectos

Una vez descrito el espacio completo de repartos, podemos hacernos una nueva pregunta: ¿en qué casos aparecen números especiales dentro de estos repartos?

Por ejemplo, si el total es 100, encontramos una partición notable:

$$36 + 64 = 100.$$

Ambos números son cuadrados perfectos, y ocupan el índice $n = 14$ del reparto de 100. Más aún, el propio total es un cuadrado, de modo que la partición expresa la igualdad $6^2+8^2 = 10^2$, una terna pitagórica. El reparto no produce esta coincidencia, pero la localiza: la diferencia entre las dos partes, $64 - 36 = 28$, es exactamente el doble del índice.

Las ternas pitagóricas son infinitas y se conocen desde la Antigüedad; Euclides dio un procedimiento para obtenerlas todas. Por tanto, entre los totales que son cuadrados hay infinitos cuyo reparto contiene una partición formada por dos cuadrados.

Marco técnico 6.1 — Cuadrados perfectos en una partición binaria

Supongamos que en una partición binaria de c ambas partes son cuadrados perfectos, $a = x^2$ y $b = y^2$ con $x < y$. La diferencia entre ellos viene dada por

$$y^2 - x^2 = (y - x)(y + x).$$

Caso c par. Entonces x^2 e y^2 tienen la misma paridad, luego también x e y, y los dos factores $y - x$ e $y + x$ son pares. Escribiendo

$$p = \frac{y - x}{2}, \qquad q = \frac{y + x}{2},$$

la igualdad $b - a = 2n$ se convierte en $2n = 4pq$, es decir,

$$n = 2pq.$$

Para $c = 100$, con $x = 6$ e $y = 8$, se tiene $p = 1$, $q = 7$ y $n = 14$.

Caso c impar. Entonces x e y tienen distinta paridad, los dos factores son impares y la igualdad $b - a = 2n + 1$ se escribe

$$2n + 1 = (y - x)(y + x).$$

Para $c = 25 = 9 + 16$, se tiene $n = 3$ y $7 = 1 \cdot 7$.

En ambos casos el índice queda determinado por la factorización de la diferencia de los dos cuadrados. Esta descripción es válida para cualquier total: dos cuadrados cualesquiera $x^2 < y^2$ ocupan siempre la posición correspondiente en el reparto de su suma. Que la suma sea a su vez un cuadrado es una condición adicional, que en el caso de los cuadrados se cumple en infinitos casos, los de las ternas pitagóricas.

7. Cubos: encajan, pero el total no es un cubo

Si repetimos la pregunta con cubos perfectos, lo primero que se observa es que también encajan. Por ejemplo, en el reparto de 35 aparece la partición

$$8 + 27 = 35,$$

con $8 = 2^3$ y $27 = 3^3$, en el índice $n = 9$. Y el número 1729 admite dos particiones formadas por cubos, $1 + 1728$ y $729 + 1000$, que ocupan los índices 863 y 135 de un mismo reparto.

Podría pensarse que los cubos, al estar cada vez más separados, no caben en los repartos, porque la diferencia entre dos cubos consecutivos crece mucho más deprisa que el índice. No es así: el índice no está obligado a crecer despacio. Dos cubos cualesquiera, por separados que estén, ocupan una posición en el reparto de su suma, con un índice tan grande como haga falta.

Lo que no ocurre nunca es que el total sea también un cubo. Ningún cubo se reparte en dos cubos: no existen enteros positivos con $x^3 + y^3 = z^3$. Esta imposibilidad no se deduce de la estructura del reparto, que es la misma para cualquier total, sino que es un teorema de Euler, cuya demostración requiere argumentos aritméticos de otra naturaleza. El reparto permite comprobarlo para cada cubo concreto, recorriendo un número finito de candidatos, pero no demostrarlo para todos a la vez.

Marco técnico 7.1 — Cubos en una partición binaria

Proposición 7.1. *Sean $x < y$ enteros positivos y $c = x^3 + y^3$. Entonces (x^3, y^3) es una partición binaria de c y su índice es*

$$n = \frac{y^3 - x^3 - \varepsilon}{2},$$

con $\varepsilon = 0$ si c es par y $\varepsilon = 1$ si c es impar. En particular, para cubos consecutivos, $c = m^3 + (m+1)^3$ es impar y

$$n = \frac{3m(m+1)}{2}.$$

Demostración. La primera afirmación es la parametrización de la sección 3 aplicada a $a = x^3$ y $b = y^3$. Para cubos consecutivos, m^3 y $(m+1)^3$ tienen distinta paridad, de modo que c es impar, y

$$(m+1)^3 - m^3 = 3m^2 + 3m + 1 = 2 \cdot \frac{3m(m+1)}{2} + 1,$$

donde $3m(m+1)/2$ es entero porque $m(m+1)$ es par. □

Observación 7.2. *La diferencia mínima entre dos cubos, $3m^2 + 3m + 1$, crece cuadráticamente con m, pero esto no impide que aparezca en un reparto: el índice correspondiente, $3m(m+1)/2$, crece también cuadráticamente. Los parámetros m y n son distintos y no tienen por qué estar relacionados de forma lineal.*

Teorema 7.3 (Euler)**.** *No existen enteros positivos x, y, z tales que $x^3 + y^3 = z^3$.*

El teorema se debe a Euler [1]; una exposición se encuentra en [2]. Dentro del reparto, el caso $c = z^3$ equivale a buscar un índice con $a = x^3$ y $b = y^3$, y para cada z basta examinar los x con $2x^3 \le z^3$. Para $c = 729 = 9^3$, los candidatos son $1 \le x \le 7$, y ninguno de los complementos

$$728,\ 721,\ 702,\ 665,\ 604,\ 513,\ 386$$

es un cubo. Esta comprobación vale para 729, no para todos los cubos.

Lo mismo sucede con exponentes mayores. Fermat demostró la imposibilidad para el exponente 4 mediante el método de descenso infinito [2], y el caso general, el último teorema de Fermat, fue demostrado por Wiles [4], con un paso final debido a Taylor y Wiles [3].

8. Síntesis estructural

A partir de una situación cotidiana, hemos identificado un espacio de posibilidades perfectamente estructurado, delimitado por la paridad y la simetría. Cada reparto de un total tiene un índice, y cada pareja de números con esa suma ocupa exactamente una posición en él, sean cuadrados, cubos o cualquier otra clase de números.

El reparto, sin embargo, no decide por sí mismo qué totales admiten una partición con propiedades adicionales. Que un cuadrado pueda repartirse en dos cuadrados y que un cubo no pueda repartirse en dos cubos son hechos ciertos, pero el primero procede de la construcción de las ternas pitagóricas y el segundo del teorema de Euler. El reparto los organiza y permite comprobarlos caso por caso; la demostración general se encuentra en otro lugar.

«La matemática es la ciencia que extrae conclusiones necesarias.»
— Benjamin Peirce

Referencias

[1] L. Euler, *Vollständige Anleitung zur Algebra*, Academia Imperial de Ciencias, San Petersburgo, 1770.

[2] P. Ribenboim, *Fermat's Last Theorem for Amateurs*, Springer, Nueva York, 1999.

[3] R. Taylor, A. Wiles, Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras, *Ann. of Math.* **141** (1995), 553–572.

[4] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, *Ann. of Math.* **141** (1995), 443–551.