Un marco geométrico para la divisibilidad: Potencias primas, números perfectos y caracterización de primalidad

Miguel Cerdá Bennassar

Enero de 2026

Resumen

Se introduce una representación tabular bidimensional de la divisibilidad en la que filas y columnas codifican simultáneamente divisores y múltiplos. Esta construcción no pretende sustituir el razonamiento algebraico, sino ofrecer un marco visual donde propiedades aritméticas clásicas aparecen como rasgos estructurales observables. Se muestra cómo este escenario geométrico permite identificar visualmente la estructura de potencias primas, números perfectos pares y caracterizar la primalidad mediante un criterio diagonal basado en relaciones internas de una región previa bien definida. El énfasis está en la reorganización conceptual y la intuición geométrica, no en la novedad algorítmica.

1. Introducción

La aritmética elemental se expresa habitualmente mediante formulaciones algebraicas que describen propiedades de los números a través de igualdades, factorizaciones y demostraciones formales. Sin embargo, muchas de estas propiedades —como la localización de los divisores, la estructura de las potencias primas, la organización de los números perfectos o la caracterización de la primalidad— admiten una lectura alternativa cuando se traducen a un marco geométrico adecuado.

En este trabajo se introduce una representación geométrica de los números naturales basada en la relación de divisibilidad, en la que filas y columnas codifican simultáneamente divisores y múltiplos. Esta construcción no pretende sustituir el razonamiento algebraico, sino ofrecer un *escenario visual* donde determinadas propiedades aparecen como *rasgos estructurales observables*: alineaciones, vacíos, duplicaciones y patrones diagonales que, en su formulación estándar, requieren demostración explícita.

El interés de esta representación es triple:

1. Permite obtener intuición geométrica directa sobre hechos aritméticos clásicos, como la organización de las potencias primas y la estructura de los números perfectos.

2. Proporciona una caracterización alternativa de la primalidad basada en relaciones internas de una región previa, reorganizando la información clásica mediante una dualidad aditiva-multiplicativa.

3. Ofrece un marco unificado que revela patrones comunes en familias de números aparentemente distintas.

1.1. Estructura del documento

La Sección 2 introduce la construcción del escenario geométrico. Las Secciones 3 y 4 analizan las firmas visuales de potencias primas y números perfectos. Las Secciones 5 a 7 desarrollan la caracterización de primalidad por región previa y criterio diagonal. La Sección 8 conecta explícitamente ambos enfoques mediante lectura geométrica. Finalmente, la Sección 10 discute alcance, limitaciones y el valor de representaciones alternativas.

1.2. Nota sobre representaciones relacionadas

Existen en la literatura diversas representaciones geométricas de la relación de divisibilidad, como los diagramas de Hasse asociados al retículo parcialmente ordenado $(\mathbb{N}, |)$. La construcción presentada en este trabajo no pretende sustituir ni generalizar dichos enfoques, sino ofrecer una representación bidimensional alternativa que codifica simultáneamente divisores y múltiplos en un único escenario geométrico indexado por los valores naturales. Su especificidad reside en que las propiedades estructurales —vacíos, duplicaciones, diagonales— aparecen como rasgos geométricos directamente observables.

2. Construcción del escenario geométrico

En lo que sigue, la expresión *escenario geométrico* se utilizará como abreviatura descriptiva de la representación tabular de la divisibilidad introducida en esta sección.

Consideramos una tabla bidimensional infinita en la que tanto las filas como las columnas están indexadas por los números naturales. La construcción se basa en la relación elemental de divisibilidad y se define de la siguiente manera.

Cada *fila* está asociada a un número natural $n \geq 1$ y representa el conjunto de posibles divisores de n. Cada *columna* está asociada a un número natural $k \geq 1$ y representa el conjunto de múltiplos de k. En la celda situada en la intersección de la fila n y la columna k se marca un indicador visual (por ejemplo, una celda coloreada) si y solo si se cumple la relación

$$k \mid n.$$

De este modo, una misma construcción codifica simultáneamente dos informaciones complementarias:

- los divisores de un número n, visibles como las celdas marcadas en su fila;
- los múltiplos de un número k, visibles como las celdas marcadas en su columna.

La diagonal principal de la tabla corresponde a las celdas (n, n) y actúa como referencia natural del valor de cada fila. El número de celdas potenciales en la fila n coincide con n, lo que permite interpretar la posición horizontal de una celda como el valor del divisor correspondiente.

Esta representación no introduce ninguna información adicional ni codificación heurística: cada celda marcada corresponde exactamente a una relación de divisibilidad verdadera, y toda relación de divisibilidad verdadera queda representada por una celda marcada. En este sentido, la tabla constituye una traducción geométrica literal de la estructura multiplicativa de $\mathbb{N}$.

Una consecuencia inmediata de esta construcción es que la ausencia de celdas marcadas en determinadas regiones de una fila no es un artefacto visual, sino la expresión directa de una imposibilidad aritmética. Los llamados *vacíos estructurales* —intervalos sin celdas marcadas— adquieren así un significado matemático preciso y serán fundamentales en las secciones posteriores.

Este escenario geométrico es completamente estático: no describe ningún proceso ni dinámica. Su propósito es proporcionar el marco sobre el cual pueden leerse diversas propiedades estructurales de los números naturales como rasgos visuales.

3. Vacíos estructurales y potencias primas

La construcción descrita en la sección anterior permite interpretar la presencia o ausencia de celdas marcadas en una fila como información aritmética directa. En particular, los intervalos consecutivos sin celdas marcadas —a los que nos referiremos como *vacíos estructurales*— corresponden a regiones donde no existen divisores del número considerado. Estos vacíos no dependen de criterios visuales, sino que reflejan restricciones multiplicativas precisas.

3.1. Potencias primas

Sea $n = p^k$ una potencia de un primo p, con $k \geq 2$. Sus divisores son exactamente

$$1,\ p,\ p^2,\ \ldots,\ p^{k-1},\ p^k.$$

En la fila correspondiente a n, esto se traduce en la aparición de celdas marcadas únicamente en las columnas

$$C(p),\ C(p^2),\ \ldots,\ C(p^{k-1}),$$

además de la diagonal $C(p^k)$.

Dos rasgos geométricos destacan inmediatamente:

- Las celdas marcadas internas forman una cadena única, alineada geométricamente y espaciada por factores constantes de p.
- Desde la última celda marcada interna, situada en p^{k-1}, hasta la diagonal p^k, la fila presenta un vacío estructural continuo.

Este vacío corresponde algebraicamente al hecho de que p^{k-1} es el mayor divisor propio de p^k y, por tanto, no existen divisores en el intervalo (p^{k-1}, p^k).

3.2. Casos canónicos

El patrón anterior se manifiesta con especial claridad en los siguientes casos:

- **Cuadrados de primos** (p^2): aparece una única celda marcada interna en $C(p)$, seguida de un vacío total hasta la diagonal.
- **Cubos de primos** (p^3): aparecen dos celdas marcadas internas en $C(p)$ y $C(p^2)$, seguidas de un vacío estructural desde p^2 hasta p^3.
- **Potencias altas** (p^k, $k \geq 4$): el número de celdas marcadas internas es $k-1$, manteniéndose siempre el vacío continuo final desde p^{k-1} hasta p^k.

En todos los casos, la posición relativa del último divisor propio es

$$\frac{p^{k-1}}{p^k} = \frac{1}{p},$$

independiente del exponente k. El tamaño del vacío estructural final depende únicamente del primo base p, no de la altura de la potencia.

3.3. Contraste con potencias de compuestos

Este patrón es específico de las potencias de primos. Si $n = q^3$ con q compuesto, como en el caso

$$64 = 4^3 = 2^6,$$

la factorización induce una familia mucho más rica de divisores propios. En consecuencia, la fila correspondiente presenta numerosas celdas marcadas (por ejemplo, en $2, 4, 8, 16, 32$), y el vacío estructural final desaparece o se reduce significativamente.

Desde el punto de vista geométrico, esto distingue con claridad las potencias primas —caracterizadas por una cadena única y un vacío final amplio— de las potencias de números compuestos, cuya estructura multiplicativa genera una densidad mayor de celdas marcadas.

4. Números perfectos y duplicación estructural

La lectura geométrica introducida en las secciones anteriores se vuelve especialmente expresiva en el caso de los números perfectos pares. En este contexto, los vacíos estructurales característicos de las potencias primas son sustituidos por un patrón de duplicación regular que refleja con precisión la factorización clásica de estos números.

4.1. Forma canónica y número de divisores

Todo número perfecto par tiene la forma

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1}M,$$

donde p es primo y $M = 2^p - 1$ es un primo de Mersenne. La factorización es, por tanto,

$$n = 2^{p-1}\, M^1,$$

y el número total de divisores viene dado por

$$d(n) = (p)(2) = 2p.$$

Excluyendo el divisor trivial 1 y el propio n, la fila correspondiente contiene exactamente

$$2p - 2$$

celdas marcadas internas.

4.2. Estructura geométrica de la fila

Los divisores de n se organizan naturalmente en dos familias:

$$2^k \quad \text{y} \quad 2^k M \qquad (k = 0, \ldots, p-1).$$

En la tabla, estas familias aparecen como dos alineaciones paralelas de celdas marcadas:

- una cadena correspondiente a las potencias de 2, situada en la región izquierda de la fila;
- una cadena desplazada por el factor M, situada en una región más a la derecha.

Ambas cadenas tienen la misma longitud y se extienden hasta alcanzar la diagonal. Esta duplicación estructural sustituye al patrón de cadena única observado en las potencias primas.

4.3. La mitad derecha vacía

Un rasgo geométrico particularmente significativo es la ausencia de celdas marcadas en la mitad derecha de la fila, es decir, en el intervalo

$$\left(\frac{n}{2},\, n\right).$$

Visualmente, esta región aparece completamente vacía.

Desde el punto de vista algebraico, este hecho se explica porque el mayor divisor propio de un número perfecto par es

$$\frac{n}{2} = 2^{p-2}M,$$

y, por tanto, no existen divisores propios mayores que $n/2$. La tabla hace visible esta propiedad sin necesidad de cálculo: la frontera aparece como un límite geométrico claro entre la última celda marcada interna y la diagonal.

4.4. Ejemplos canónicos

Los primeros números perfectos pares ilustran este patrón con claridad creciente:

$$\begin{aligned}
6 = 2^1 \cdot 3 &\quad \Rightarrow d(n) = 4, \;\; 2 \text{ celdas internas},\\
28 = 2^2 \cdot 7 &\quad \Rightarrow d(n) = 6, \;\; 4 \text{ celdas internas},\\
496 = 2^4 \cdot 31 &\quad \Rightarrow d(n) = 10, \;\; 8 \text{ celdas internas},\\
8128 = 2^6 \cdot 127 &\quad \Rightarrow d(n) = 14, \;\; 12 \text{ celdas internas}.
\end{aligned}$$

En todos los casos, la fila correspondiente presenta dos cadenas completas de igual longitud y una región derecha sin celdas marcadas.

Desde esta perspectiva, los números perfectos no se caracterizan por la escasez de divisores, sino por la organización simétrica y duplicada de los mismos. La tabla permite identificar esta regularidad de forma inmediata, ofreciendo una lectura geométrica directa de propiedades que, en la formulación algebraica estándar, requieren una argumentación explícita.

5. La región previa y caracterización de primalidad

Hasta ahora hemos analizado familias de números con estructuras multiplicativas específicas: potencias primas con sus vacíos característicos, y números perfectos con su duplicación estructural. En esta sección introducimos una caracterización de la primalidad que emerge naturalmente del mismo escenario geométrico, pero desde una perspectiva dual centrada en la región inmediatamente anterior al número candidato.

5.1. Motivación

La caracterización clásica de la primalidad se formula como una condición negativa: un número natural p es primo si no admite divisores propios distintos de 1 y de sí mismo. Algorítmicamente, esto se traduce en la búsqueda de divisores en el intervalo $[2, \sqrt{p}]$.

El enfoque que presentamos a continuación no pretende competir en eficiencia computacional, sino mostrar que la condición de primalidad puede leerse como una *propiedad interna de la región inmediatamente anterior al número candidato*, reorganizando así la información clásica desde una perspectiva que enfatiza relaciones internas en lugar de divisores externos.

5.2. Definición de la región previa

Definición 5.1. Sea $p \geq 3$ un número impar. Definimos la *región previa* asociada a p como el intervalo discreto

$$\mathcal{M}(p) = \left\{ \frac{p+1}{2}, \frac{p+1}{2} + 1, \ldots, p-1 \right\}.$$

Este conjunto contiene exactamente $|\mathcal{M}(p)| = \frac{p-1}{2}$ elementos y constituye la mitad superior del intervalo $[1, p-1]$, inmediatamente anterior a p.

Observación 5.2. La región previa $\mathcal{M}(p)$ existe para todo impar p, independientemente de su primalidad. No introduce información adicional: es simplemente un intervalo finito determinado por p. Su interés reside en que, como veremos, contiene toda la información necesaria para decidir la naturaleza aritmética de p.

Ejemplo 5.3. Para $p = 15$:

$$\mathcal{M}(15) = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}.$$

Para $p = 11$:

$$\mathcal{M}(11) = \{6, 7, 8, 9, 10\}.$$

La elección del punto inicial $(p+1)/2$ no es arbitraria: corresponde al complemento del máximo divisor propio posible, garantizando que la región previa capture todas las posibles factorizaciones no triviales mediante una construcción dual que desarrollaremos a continuación.

6. Dualidad aditiva y multiplicativa

6.1. El emparejamiento complementario

La observación central es que cada elemento de $\mathcal{M}(p)$ puede emparejarse con su complemento aditivo respecto a p.

Definición 6.1. Para cada $n \in \mathcal{M}(p)$, definimos su *complemento* como

$$k_n = p - n.$$

Dado que $n > \frac{p}{2}$, se tiene $k_n < \frac{p}{2}$. Este emparejamiento establece una biyección entre $\mathcal{M}(p)$ y el intervalo $\left[1, \frac{p-1}{2}\right]$.

6.2. De la suma al producto

La clave de la reformulación reside en detectar cuándo la relación aditiva $n + k_n = p$ puede inducir una relación multiplicativa.

Lema 6.2. *Si $k_n \mid n$ para algún $n \in \mathcal{M}(p)$, entonces p admite una factorización no trivial.*

Demostración. Si $k_n \mid n$, entonces $n = m \cdot k_n$ para algún entero $m \geq 1$. Sustituyendo en la relación de complementariedad:

$$p = n + k_n = m \cdot k_n + k_n = (m+1)k_n.$$

Como $n \in \mathcal{M}(p)$ implica $n > \frac{p}{2}$, se tiene $k_n < \frac{p}{2} < p$. Además, $m \geq 1$ implica $m + 1 \geq 2$. Por tanto, $p = (m+1)k_n$ es una factorización no trivial. □

6.3. La dualidad explícita

Este lema revela una dualidad profunda entre dos perspectivas sobre la misma información:

Perspectiva multiplicativa clásica	**Perspectiva por complemento aditivo**
Buscar k tal que $k \mid p$	Buscar n tal que $(p-n) \mid n$
Factorización directa: $p = a \cdot b$	Factorización vía complemento: $n = m \cdot (p-n)$
Intervalo de búsqueda: $[2, \sqrt{p}]$	Intervalo de búsqueda: $\mathcal{M}(p)$
Relación: $k \mid p$	Relación dual: $(p-n) \mid n$

Ambas perspectivas son algebraicamente equivalentes, pero la segunda reorganiza la búsqueda hacia la región inmediatamente anterior al número candidato, enfatizando las *relaciones internas* en lugar de los *divisores externos*.

Observación 6.3. Esta dualidad no es inmediatamente evidente. El paso de "k divide a p" a "k divide a $p-k$" requiere una reinterpretación conceptual que, aunque simple una vez vista, no es la formulación natural en la que tradicionalmente se piensa la primalidad.

7. El criterio diagonal de primalidad

7.1. Formulación del criterio

El Lema 6.2 establece que la existencia de una relación $(p-n) \mid n$ dentro de $\mathcal{M}(p)$ implica que p es compuesto. El siguiente teorema muestra que esta condición es también necesaria.

Teorema 7.1 (Criterio diagonal de primalidad)**.** *Sea $p \geq 3$ un número impar. Entonces:*

$$p \text{ es compuesto} \iff \exists\, n \in \mathcal{M}(p) : (p-n) \mid n.$$

Equivalentemente:

$$p \text{ es primo} \iff \forall\, n \in \mathcal{M}(p) : (p-n) \nmid n.$$

Demostración. La implicación ($\Rightarrow$) está probada en el Lema 6.2.

Para el recíproco, supongamos que p es compuesto e impar. Entonces existen enteros $a, b > 1$ tales que $p = ab$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir $a \leq b$, lo que implica $b \geq \sqrt{p} > 1$ y $a \geq 2$.

Definimos:

$$k = b, \qquad n = p - b = ab - b = (a-1)b.$$

Observemos que:

- $k \mid n$ trivialmente, pues $n = (a-1)b$ con $a - 1 \geq 1$.
- Como $a \geq 2$, se tiene $n = (a-1)b \geq b = k$, y en particular $n \geq \frac{p}{a} \geq \frac{p}{b} \geq \sqrt{p}$.
- Además, $n = p - b < p$.

Para verificar que $n \in \mathcal{M}(p)$, necesitamos $n \geq \frac{p+1}{2}$. Esto se cumple porque:

$$n = (a-1)b \geq b \geq \frac{p}{a} \geq \frac{p}{2} \geq \frac{p+1}{2} - \frac{1}{2}.$$

Como n es entero y p es impar, $n \geq \frac{p+1}{2}$.

Por tanto, $n \in \mathcal{M}(p)$ y $(p-n) = b = k$ divide a n, lo que completa la prueba. □

7.2. Interpretación del criterio

El teorema anterior puede leerse de la siguiente manera:

> *La primalidad de p equivale a la ausencia total de relaciones de divisibilidad entre elementos de $\mathcal{M}(p)$ y sus complementos aditivos. Un número impar es primo precisamente cuando su región previa no admite ninguna configuración interna compatible con una factorización no trivial.*

La denominación "criterio diagonal" proviene de interpretar los pares $(n, p-n)$ como puntos sobre una diagonal en un sistema de coordenadas adecuado, como se verá en la siguiente sección.

7.3. Ejemplos ilustrativos

Ejemplo 7.2 (Caso primo: $p = 11$)**.** Sea $p = 11$. Entonces:

$$\mathcal{M}(11) = \{6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Verificamos la condición $(p - n) \mid n$ para cada $n \in \mathcal{M}(11)$:

n	$p - n$	$(p - n) \mid n$	Observación
6	5	$5 \nmid 6$	No hay divisibilidad
7	4	$4 \nmid 7$	No hay divisibilidad
8	3	$3 \nmid 8$	No hay divisibilidad
9	2	$2 \nmid 9$	No hay divisibilidad
10	1	$1 \mid 10$	Divisor trivial

El caso $n = 10$ corresponde al divisor trivial 1 y no induce factorización no trivial. No aparece ninguna relación relevante, por lo que 11 es primo.

Ejemplo 7.3 (Caso compuesto: $p = 15$)**.** Sea $p = 15 = 3 \times 5$. Entonces:

$$\mathcal{M}(15) = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}.$$

Verificamos la condición:

n	$p - n$	$(p - n) \mid n$	Observación
8	7	$7 \nmid 8$	No hay divisibilidad
9	6	$6 \nmid 9$	No hay divisibilidad
10	5	$5 \mid 10$	**Divisibilidad detectada**
11	4	$4 \nmid 11$	No hay divisibilidad
12	3	$3 \mid 12$	**Divisibilidad detectada**
13	2	$2 \nmid 13$	No hay divisibilidad
14	1	$1 \mid 14$	Divisor trivial

La diagonal detecta dos celdas:

- Para $n = 10$, tenemos $5 \mid 10$, lo que implica:

$$15 = 10 + 5 = 2 \cdot 5 + 5 = 3 \cdot 5.$$

- Para $n = 12$, tenemos $3 \mid 12$, lo que implica:

$$15 = 12 + 3 = 4 \cdot 3 + 3 = 5 \cdot 3.$$

Ambas detecciones corresponden a la misma factorización $15 = 3 \times 5$, vista desde sus factores complementarios. Este desdoblamiento es característico: toda factorización no trivial genera exactamente dos intersecciones en la diagonal (una por cada factor).

Ejemplo 7.4 (Caso compuesto: $p = 21 = 3 \times 7$)**.** Para $p = 21$:

$$\mathcal{M}(21) = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

Buscando divisibilidades:

- $n = 14$: $21 - 14 = 7$ y $7 \mid 14 \implies 21 = 3 \times 7$
- $n = 18$: $21 - 18 = 3$ y $3 \mid 18 \implies 21 = 7 \times 3$

Ambas detecciones corresponden a la misma factorización, vista desde factores complementarios.

8. Lectura geométrica unificada

8.1. Conexión explícita con la tabla de divisibilidad

Todos los patrones analizados en las secciones anteriores —vacíos de potencias primas, duplicación de números perfectos, y diagonal de primalidad— pueden leerse directamente sobre el escenario geométrico introducido en la Sección 2.

En particular, el criterio de primalidad admite una interpretación visual inmediata:

Proposición 8.1 (Lectura geométrica del criterio diagonal)**.** *Sea p un número impar. En la tabla de divisibilidad, p es compuesto si y solo si existe alguna fila $n \in \mathcal{M}(p)$ cuya celda en la columna $C(p-n)$ está marcada.*

Demostración. Inmediato del Teorema 7.1, pues la celda $(n, p-n)$ está marcada si y solo si $(p-n) \mid n$. □

Esta caracterización se vuelve inmediatamente tangible cuando se visualiza sobre la tabla. La Figura 1 muestra dos casos ilustrativos que hacen explícita la diferencia entre primos y compuestos: la diagonal de un primo no encuentra celdas marcadas relevantes, mientras que la diagonal de un compuesto cruza las celdas que delatan su factorización.

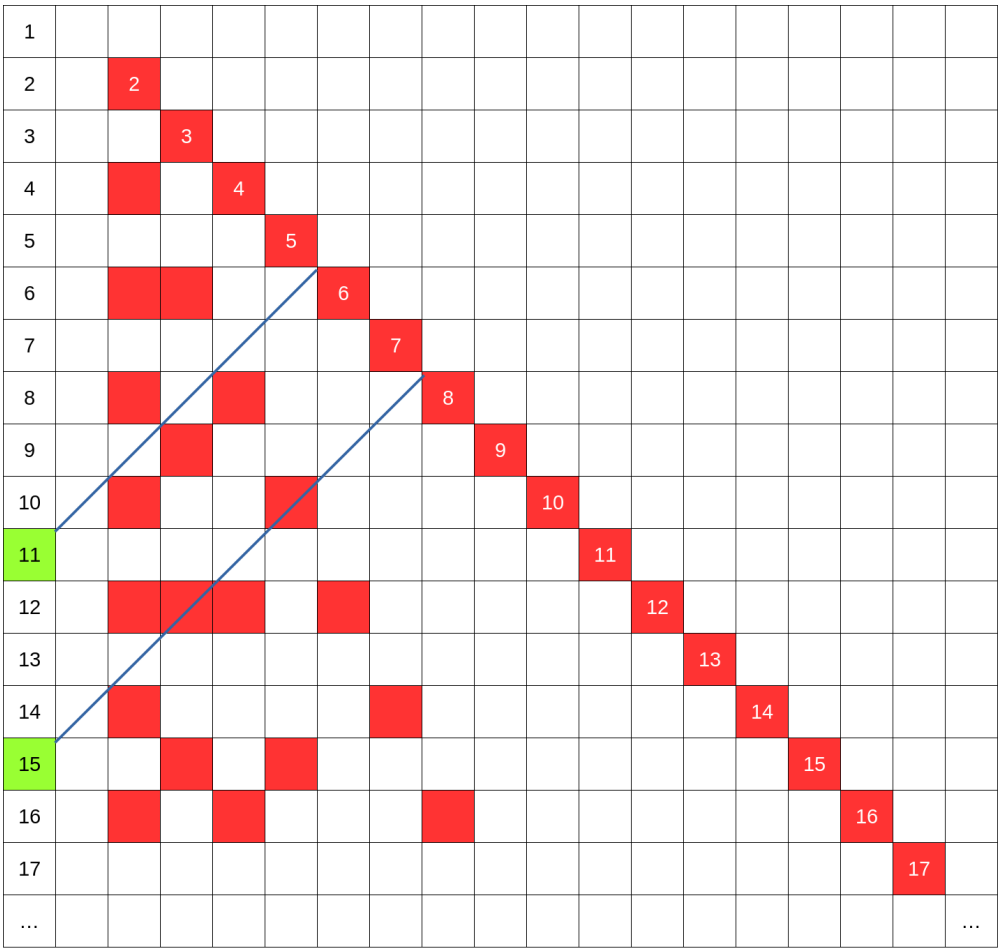

Figura 1: Ilustración del criterio diagonal de primalidad sobre la tabla de divisibilidad. Las celdas rojas indican relaciones $k \mid n$. Las líneas azules trazan las diagonales correspondientes a los pares $(n, p-n)$ para $n \in \mathcal{M}(p)$. **p=11** (verde, primo): La diagonal no cruza ninguna celda roja no trivial. **p=15** (verde, compuesto): La diagonal cruza dos celdas rojas en $(10, 5)$ y $(12, 3)$, detectando la factorización $15 = 3 \times 5$.

8.2. Justificación de la terminología "diagonal"

En la tabla bidimensional, los pares $(n, p-n)$ para $n \in \mathcal{M}(p)$ forman una trayectoria que conecta:

- El punto inicial $\left(\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2}\right)$
- El punto final $(p-1, 1)$

Esta trayectoria desciende de izquierda a derecha con pendiente -1, formando efectivamente una diagonal en el sentido geométrico. La denominación "criterio diagonal" se refiere a esta interpretación visual.

8.3. Visualización conceptual

Para $p = 15$, los pares $(n, p-n)$ son:

$$(8, 7), (9, 6), (10, 5), (11, 4), (12, 3), (13, 2), (14, 1).$$

En la tabla de divisibilidad:

- Las celdas $(10, 5)$ y $(12, 3)$ están marcadas porque $5 \mid 10$ y $3 \mid 12$.
- Estas marcas detectan geométricamente que 15 es compuesto.

Para $p = 11$, los pares son:

$$(6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2), (10, 1).$$

Ninguna de estas celdas está marcada (excepto la trivial $(10, 1)$), reflejando que 11 es primo.

Esta lectura unifica todos los enfoques: la caracterización aritmética del criterio, su manifestación geométrica en la tabla, y su relación con los patrones observados en potencias primas y números perfectos.

9. Reformulaciones equivalentes del criterio

El criterio diagonal admite varias formulaciones equivalentes, cada una enfatizando un aspecto distinto de la misma condición.

9.1. Forma en términos de divisores

Corolario 9.1. *Un número impar p es compuesto si y solo si existe un entero k con $2 \leq k \leq \frac{p-1}{2}$ tal que:*

$$k \mid (p - k).$$

Esta formulación enfatiza la búsqueda sobre posibles divisores k en lugar de elementos de $\mathcal{M}(p)$.

9.2. Forma negativa (caracterización de primos)

Corolario 9.2. *Un número impar p es primo si y solo si para todo entero k con $2 \leq k \leq \frac{p-1}{2}$ se cumple:*

$$k \nmid (p - k).$$

Esta versión enfatiza la ausencia total de divisores propios como condición universal sobre el intervalo.

9.3. Forma multiplicativa

Dado un par (n, k) con $k = p - n$ y $k \mid n$, podemos escribir $n = mk$, de donde:

$$p = n + k = mk + k = (m + 1)k = a \cdot b,$$

con $a = m + 1$ y $b = k$.

Esta reformulación muestra que el criterio diagonal no introduce nuevas nociones de factorización, sino que reorganiza las existentes mediante la dualidad $n \leftrightarrow (p - n)$.

10. Alcance, limitaciones e intuición geométrica

10.1. Alcance de la construcción

El principal valor del escenario geométrico reside en su capacidad para hacer visibles relaciones que, en la formulación algebraica estándar, requieren argumentación explícita. Entre ellas se incluyen:

- la localización y el orden de los divisores de un número;
- la existencia de vacíos estructurales y máximos divisores propios;
- la identificación geométrica de potencias primas y números perfectos;
- la caracterización de la primalidad mediante relaciones internas de una región previa;
- la manifestación visual de la dualidad aditiva-multiplicativa.

En todos estos casos, la construcción no añade información nueva, pero reorganiza la existente de manera que ciertas restricciones aritméticas se manifiestan como imposibilidades o patrones geométricos claros.

10.2. Complejidad algorítmica del criterio de primalidad

El criterio presentado requiere verificar la condición $(p-n) \mid n$ para cada $n \in \mathcal{M}(p)$, lo que implica explorar $|\mathcal{M}(p)| = \frac{p-1}{2}$ casos. En el peor caso, esto es equivalente a buscar divisores en $[2, \frac{p}{2}]$, lo cual tiene complejidad $O(p)$.

Los tests de primalidad clásicos basados en búsqueda hasta $\sqrt{p}$ tienen complejidad $O(\sqrt{p})$, superior al criterio aquí presentado. Por tanto, **no hay mejora algorítmica**.

10.3. La cuestión de la densidad

Una objeción natural a este tipo de representaciones es la creciente densidad de la tabla para números grandes, que dificulta una inspección visual directa. Sin embargo, esta limitación afecta únicamente a la visualización literal, no a la comprensión estructural.

La utilidad de la construcción no radica en examinar filas de gran tamaño, sino en mostrar que los mecanismos observados en los casos finitos pequeños son consecuencia directa de la regla de construcción y, por tanto, se replican a cualquier escala. La densidad no destruye la estructura; la confirma.

10.4. Valor conceptual de reformulaciones equivalentes

La historia de las matemáticas muestra que reformulaciones equivalentes de un mismo hecho pueden tener valor profundo, incluso sin aportar nueva información en sentido estricto. Ejemplos paradigmáticos incluyen:

- Las diversas caracterizaciones de la convexidad (definición analítica, geométrica, combinatoria).
- Las múltiples formulaciones de la mecánica clásica (newtoniana, lagrangiana, hamiltoniana).
- Las diferentes caracterizaciones de grupos (axiomática, por generadores, por representaciones).

En cada caso, la reformulación no cambia el objeto matemático subyacente, pero revela aspectos estructurales que facilitan conexiones con otras áreas o proporcionan intuición geométrica distinta.

El criterio diagonal se inscribe en esta tradición: reorganiza información conocida de manera que la primalidad aparezca como una propiedad emergente de la región inmediatamente anterior al número candidato, en lugar de como ausencia de divisores en una búsqueda externa.

10.5. Qué aporta esta perspectiva

La representación presentada aporta:

1. **Unificación visual**: Un mismo escenario geométrico permite leer propiedades de potencias primas, números perfectos y primos.
2. **Localización estructural**: Identifica $\mathcal{M}(p)$ como la región mínima donde se decide la primalidad, enfatizando la naturaleza local de esta propiedad.
3. **Dualidad explícita**: Articula la correspondencia $n \leftrightarrow (p - n)$, mostrando cómo la relación aditiva induce la multiplicativa.
4. **Intuición pedagógica**: Ofrece narrativas alternativas para enseñar conceptos aritméticos fundamentales, basadas en patrones visuales en lugar de búsquedas algorítmicas.

10.6. Qué hace visible y qué no

Conviene delimitar con claridad el alcance epistemológico de la construcción. El escenario geométrico hace visibles propiedades relacionadas con la estructura multiplicativa. No proporciona, en cambio, información directa sobre magnitudes globales como la suma de divisores, ni resuelve cuestiones abiertas.

La intuición que aporta no es heurística ni probabilística, sino estructural: permite comprender por qué ciertos comportamientos son inevitables una vez fijada la geometría subyacente.

10.7. Conclusión

La tabla de divisibilidad presentada constituye un marco geométrico coherente para la lectura de la aritmética multiplicativa. Al proporcionar un escenario visual unificado donde múltiples propiedades se manifiestan como rasgos estructurales observables, permite reinterpretar conceptos conocidos desde una perspectiva distinta.

Más que ofrecer nuevos resultados, esta aproximación propone una manera alternativa de mirar los existentes, subrayando el papel que una representación adecuada puede desempeñar en la comprensión de verdades algebraicas establecidas. En palabras de Alexander Grothendieck: *"La introducción de la cantidad de estructura justa para hacer las cosas simples y transparentes es un arte."*