La Reina Lota y su Ley de la Mitad

Miguel Cerdá Bennassar

Enero de 2026 (revisado en octubre de 2026)

Capítulo I

En el reino de Lota regía una ley sencilla: cada mañana, toda fortuna debía partirse en dos mitades exactas. Una mitad quedaba en manos del súbdito y la otra pasaba a las arcas reales, sin excepción.

La ley tenía, sin embargo, una dificultad con las cantidades impares. Siete monedas no pueden repartirse en dos mitades iguales: tres irían a palacio, tres quedarían en casa y una moneda quedaría sin dueño. Por eso, cuando una bolsa amanecía con una cantidad impar, ese día no se hacía partición y la corona no recibía nada.

Para que esas bolsas no quedaran fuera de la ley, la reina adoptó una costumbre. Cuando un súbdito tenía una cantidad impar de monedas, lo visitaba al anochecer y le entregaba el doble de lo que tenía más una moneda. A la mañana siguiente la bolsa contenía una cantidad par y la partición se hacía con normalidad. Quien anochecía con siete monedas recibía quince; al día siguiente, con veintidós en la bolsa, entregaba once a la corona y conservaba once. En dos jornadas había pasado de siete monedas a once.

El ofrecimiento parecía favorable para ambas partes: el súbdito ganaba monedas y la corona recibía una mitad mayor de la que habría obtenido.

Capítulo II

Durante los primeros días la reina se limitó a observar. Los registros mostraban que algunos súbditos aumentaban su fortuna sin infringir la ley en ningún momento, mientras que las cuentas de palacio registraban más salidas que entradas. La reina llegó a preguntarse si su ofrecimiento no estaría perjudicando a la corona.

Decidió no intervenir y dejar que los días siguieran su curso. Con el tiempo advirtió que las monedas que salían de palacio por la noche acababan regresando, no siempre al día siguiente ni por el mismo camino, pero regresaban. Hasta entonces no se había perdido ninguna. La reina pensó que las ganancias de los súbditos eran oscilaciones pasajeras y confió en que el tiempo pondría cada moneda en su sitio.

Capítulo III

Los días siguieron sucediéndose sin cambios en la ley. Algunos súbditos recordaban el día en que su bolsa había pesado más, pero con el tiempo esas cifras se olvidaron. Nadie supo decir en qué momento su fortuna había dejado de crecer, porque no hubo confiscaciones ni pérdidas bruscas, solo una sucesión de particiones que nadie podía considerar injustas.

La reina dejó las cuentas detalladas en manos de los escribanos. Las monedas salían de palacio y volvían a él, y en los registros de aquellos días ninguna tardaba mucho en regresar.

Capítulo IV — El registro

El registro de los escribanos (Tabla 1) recoge la historia completa de los veintiún súbditos del reino. La primera fila, marcada como n, contiene la fortuna de cada uno el día en que se implantó la ley de la mitad. Cada fila siguiente, $n_1, n_2, \ldots$, recoge la fortuna al terminar cada jornada: la mitad, si la bolsa había amanecido par, o el triple más una moneda, si había amanecido impar y había recibido la visita de la reina.

El primer día fue desfavorable para la corona. Once súbditos tenían una cantidad impar y recibieron la visita nocturna, y diez la tenían par y pasaron por la balanza. La reina entregó doscientas cincuenta y tres monedas y recaudó cincuenta y cinco.

Durante nueve días el saldo de palacio fue negativo. Al décimo pasó a ser positivo y desde entonces apenas retrocedió. Fue aumentando el número de súbditos con una sola moneda, mientras la riqueza de la corona crecía sin necesidad de modificar la ley ni de crear nuevos impuestos. Las ganancias de los súbditos habían sido reales, pero pasajeras.

El proceso terminó el día veinte, cuando la reina recibió la mitad de la fortuna de los dos últimos súbditos que aún tenían dos monedas. El saldo final de la corona era de doscientas diez monedas.

El escribano mayor señaló que la cifra no era casual. Las monedas no se crean ni se pierden, solo pasan del súbdito a la corona o de la corona al súbdito. Quien empezó con n monedas y terminó con una había entregado a la corona, descontado lo que ella le dio, $n - 1$ monedas. Los veintiún súbditos sumaban doscientas treinta y una monedas al principio y veintiuna al final.

	Súbditos																					*V*	*Saldo*
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	11	0
n_1	4	1	10	2	16	3	22	4	28	5	34	6	40	7	46	8	52	9	58	10	64	4	−198
n_2	2		5	1	8	10	11	2	14	16	17	3	20	22	23	4	26	28	29	5	32	7	−48
n_3	1		16		4	5	34	1	7	8	52	10	10	11	70	2	13	14	88	16	16	4	−149
n_4			8		2	16	17		22	4	26	5	5	34	35	1	40	7	44	8	8	5	−55
n_5			4		1	8	52		11	2	13	16	16	17	106		20	22	22	4	4	3	−92
n_6			2			4	26		34	1	40	8	8	52	53		10	11	11	2	2	3	−39
n_7			1			2	13		17		20	4	4	26	160		5	34	34	1	1	3	−98
n_8						1	40		52		10	2	2	13	80		16	17	17			3	−29
n_9							20		26		5	1	1	40	40		8	52	52			1	−25
n_{10}							10		13		16			20	20		4	26	26			1	83
n_{11}							5		40		8			10	10		2	13	13			3	117
n_{12}							16		20		4			5	5		1	40	40			2	87
n_{13}							8		10		2			16	16			20	20			0	125
n_{14}							4		5		1			8	8			10	10			1	171
n_{15}							2		16					4	4			5	5			2	180
n_{16}							1		8					2	2			16	16			0	171
n_{17}									4					1	1			8	8			0	193
n_{18}									2									4	4			0	203
n_{19}									1									2	2			0	208
n_{20}																		1	1			0	210

Tabla 1: Registro de los escribanos. La fila n contiene la fortuna inicial de cada súbdito; la fila n_j, su fortuna al terminar la jornada j. En rosa, las bolsas impares que reciben la visita de la reina en la jornada siguiente; en gris, las bolsas que llegan a una sola moneda y quedan desde entonces al margen de la ley (Capítulo V). La columna V cuenta esas visitas, y la columna *Saldo* da el saldo acumulado de la corona al terminar la jornada.

Capítulo V — La excepción

La ley de la mitad no cambió en su formulación, pero sí en su alcance.

El primer día la reina había visitado también al único súbdito que tenía una sola moneda. Esa misma noche los escribanos hicieron la cuenta: la corona le había entregado tres monedas, al día siguiente recuperaría dos y al otro, una. El súbdito volvería a tener una moneda y la corona no habría ganado nada. Si la ley seguía aplicándose a esa bolsa, el recorrido se repetiría indefinidamente (una, cuatro, dos, una) con saldo siempre nulo.

Por esta razón, a partir del segundo día la ley dejó de aplicarse a quienes tenían una sola moneda. No hubo proclamas; bastó una anotación al margen del registro. Esas bolsas dejaron de recibir visitas y de pasar por la balanza. Los súbditos afectados lo aceptaron sin protestar, ya que no perdían nada, aunque tampoco ganaban.

Desde entonces las fortunas mayores siguieron partiéndose y recibiendo visitas, mientras que las de una sola moneda permanecían inmóviles. Una vez alcanzado ese límite, ningún súbdito volvía a salir de él.

Capítulo VI — La frontera

Con el paso de los días fue aumentando el número de súbditos con una sola moneda. Seguían haciendo su vida como siempre, pero en el registro sus bolsas ya no variaban. La gente empezó a referirse a ellos como «los de la moneda».

Por encima de ese límite la ley seguía actuando: las fortunas se partían, aparecían bolsas impares y la reina hacía sus visitas. Pero el movimiento general era hacia la frontera, y nadie regresaba de ella. La reina comprendió que la ley necesitaba ese límite para ser eficaz: no para señalarlo, sino para no traspasarlo.

Capítulo VII — El día sin división

Llegó finalmente un día en que todas las bolsas del reino amanecieron con una sola moneda. Las balanzas no se movieron porque no había nada que pesar. La ley seguía vigente, pero ya no encontraba a quién aplicarse.

Los súbditos contaron sus monedas y comprobaron que nadie había ganado ni perdido nada durante la noche. Por primera vez desde que se estableció la ley, todas las fortunas eran iguales. La reina revisó el registro de ese día y no hizo ninguna anotación. Pasaron los días y nada volvió a dividirse. La ley no había sido derogada; simplemente había dejado de tener efecto.

Capítulo VIII — La audiencia

Al cabo de un tiempo, el Jurado de la ciudad solicitó audiencia a la reina.

Habló primero el tesorero mayor, convencido de que no había nada que discutir. Según él, cada mañana el súbdito devolvía la mitad de lo que tenía, de modo que lo que la corona entregaba por la noche volvía a la balanza al día siguiente. La ley, por tanto, garantizaba el retorno de las monedas.

Pidió entonces la palabra un maestro de escuela. No discutió la ley, sino la cuenta. Recordó el caso del súbdito que anochece con siete monedas: la corona le entrega quince y a la mañana siguiente recupera once, de modo que pierde cuatro. En general, una visita seguida de una sola partición deja siempre a la corona en pérdida, por un importe igual a la mitad de lo que tenía el súbdito más media moneda. La corona solo sale ganando si después de la visita llegan varias particiones seguidas.

Explicó que cada visita viene a triplicar la bolsa, mientras que cada partición la reduce a la mitad. Para que la corona pueda acabar ganando, cada visita debe ir seguida, por término medio, de algo más de una partición y media, y ni siquiera esa proporción basta por sí sola. Nada de esto lo garantiza la ley; lo deciden las propias cifras.

El tesorero respondió que en el registro a cada visita le habían seguido casi tres particiones. El maestro lo admitió, pero observó que el registro solo recogía a veintiún súbditos, y preguntó quién podía asegurar que una fortuna distinta no encadenaría suficientes visitas para no volver nunca. Nadie supo responderle.

La reina escuchó sin intervenir. Esa noche volvió a leer el registro completo.

Capítulo IX — El retorno

El reino llevaba tiempo en calma cuando el consejero de la reina propuso devolver a los súbditos las doscientas diez monedas que la corona había acumulado. No a cada uno las suyas, porque eso solo habría repetido el primer recorrido cifra por cifra, sino por sorteo. Lo propuso por curiosidad y también para poner a prueba la pregunta del maestro. La reina aceptó.

En el sorteo, uno de los súbditos recibió veintiséis monedas y amaneció con veintisiete. Los demás recibieron cantidades menores. A la mañana siguiente las balanzas volvieron a funcionar.

Esta vez el recorrido fue distinto. La mayoría de las bolsas volvieron pronto a la frontera, pero la del súbdito de las veintisiete monedas empezó a crecer, con subidas y bajadas sucesivas. Al cabo de setenta y siete jornadas tenía nueve mil doscientas treinta y dos monedas. Más de nueve mil habían salido de palacio hacia una sola casa, y la tesorería tuvo que recurrir a reservas que no se tocaban desde hacía mucho tiempo. El maestro de escuela no hizo ningún comentario.

Capítulo X — Lo que permanece

Finalmente, también la bolsa del súbdito de las veintisiete monedas empezó a reducirse. Bajó de mil, de cien y de diez monedas, y el día ciento once llegó a la frontera. El reino volvió a quedar en calma y el saldo de la corona volvió a ser de doscientas diez monedas, de acuerdo con la cuenta del escribano mayor.

La reina había visto regresar dos veces todas las fortunas del reino, pero no olvidaba la pregunta del maestro. Mandó llamar a los tesoreros y les preguntó si podían garantizar que cualquier fortuna, fuera cual fuera su tamaño, acabaría regresando. Respondieron que podían seguir tantas bolsas como la reina quisiera, una tras otra, y que todas las que habían seguido habían vuelto. Pero ninguno supo demostrar que volverían todas, porque una bolsa que nadie ha tenido nunca no aparece en ningún registro.

La reina no mandó guardar las balanzas. La experiencia terminó sin decreto y sin demostración: la ley de la mitad había llevado a la frontera todas las fortunas que el reino conocía, pero sobre las demás nadie podía afirmar nada todavía.

Nota para el lector

El cuento traduce a monedas el problema $3x+1$, también llamado problema de Collatz. Una bolsa par se parte en dos; una bolsa impar x recibe $2x+1$ monedas y pasa a contener $3x+1$. La fortuna de cada súbdito evoluciona, por tanto, según la función

$$C(x) = \begin{cases} x/2, & x \text{ par}, \\ 3x+1, & x \text{ impar}, \end{cases}$$

y las columnas de la Tabla 1 son las trayectorias de C para los valores iniciales $1, 2, \ldots, 21$. La excepción del Capítulo V es la convención habitual de detener la iteración al llegar a 1, donde empieza el ciclo trivial $1 \to 4 \to 2 \to 1$; la corona entrega 3 monedas y recupera $2+1$, de modo que su saldo en el ciclo es nulo.

El saldo de la corona. Como las monedas solo pasan del súbdito a la corona o al revés, la corona gana exactamente $n-1$ monedas de cada súbdito que empieza con n y llega a 1. En la Tabla 1 el saldo final es $\sum_{n=1}^{21}(n-1) = 210$, y vuelve a serlo al final del segundo recorrido, cualquiera que haya sido el reparto del sorteo, porque todos los súbditos vuelven a llegar a 1. La conservación fija el saldo cuando se llega a 1, pero no garantiza que se llegue.

La cuenta del maestro. Si a lo largo de una trayectoria se producen a visitas y b particiones, una inducción inmediata da

$$C^{a+b}(n) = \frac{3^a n + R}{2^b}, \qquad R \geq 0 \text{ entero},$$

así que la fortuna solo puede caer por debajo de n si $2^b > 3^a$, es decir, cuando $a > 0$, si $b/a > \log_2 3 \approx 1{,}585$ (condición necesaria, pero no suficiente, porque también interviene R): el «algo más de una partición y media» del Capítulo VIII. Tras cada visita llega al menos una partición, porque $3x+1$ es par. Si las paridades sucesivas se comportaran como lanzamientos de una moneda, el número medio de particiones tras cada visita sería 2, y cada visita con sus particiones multiplicaría la bolsa, en media geométrica, por $3/4$. Este argumento heurístico es clásico (véase [1]), y Terras demostró que el conjunto de enteros que acaban descendiendo por debajo de su valor inicial tiene densidad 1 [2]. Nada de esto alcanza a todos los enteros: la conjetura de Collatz, según la cual toda trayectoria llega a 1, sigue abierta.

Las rachas de visitas. La siguiente observación es elemental y bien conocida.

Observación 1. Sean m impar y $k \geq 1$, y sea $n_0 = m\,2^k - 1$. Tras $2j$ jornadas la bolsa contiene

$$n_{2j} = 3^j m\, 2^{k-j} - 1 \qquad (j = 0, 1, \ldots, k),$$

que es impar para $j < k$ y par para $j = k$. Durante las primeras $2k$ jornadas se alternan, pues, visita y partición, y en la jornada $2k+1$ llega por primera vez una segunda partición seguida.

Demostración. Si $n_{2j} = 3^j m\, 2^{k-j} - 1$ con $j < k$, es impar y $n_{2j+1} = 3n_{2j} + 1 = 3^{j+1} m\, 2^{k-j} - 2$, que es par, de modo que $n_{2j+2} = 3^{j+1} m\, 2^{k-j-1} - 1$. Para $j = k$, $n_{2k} = 3^k m - 1$ es par porque m es impar. □

En la Tabla 1, el súbdito que empieza con 15 monedas tiene $23 = 3 \cdot 2^3 - 1$ al terminar la segunda jornada; seis jornadas después tiene $3^3 \cdot 3 - 1 = 80 = 2^4 \cdot 5$, y a continuación llegan cuatro particiones más. La observación dice cuándo termina la racha, pero no cuántas particiones vienen después: eso depende de la mayor potencia de 2 que divide a $3^k m - 1$, y en este ejemplo fue generosa con la corona.

El súbdito de las veintisiete monedas. La trayectoria de 27 necesita 111 pasos para llegar a 1 y alcanza su máximo, 9232, en el paso 77. Es el ejemplo clásico de que un valor inicial pequeño puede producir un recorrido largo y muy alto.

Referencias

[1] J. C. Lagarias, The $3x+1$ problem and its generalizations, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 3–23.

[2] R. Terras, A stopping time problem on the positive integers, *Acta Arith.* **30** (1976), 241–252.