El pentágono de los cubos

Una representación reversible módulo 30

Miguel Cerdá Bennassar

Octubre de 2026

Primera versión

Resumen

Se presenta una representación pentagonal de los enteros organizados en seis filas de paso seis. Las cinco posiciones del pentágono codifican las columnas módulo cinco y, junto con la fila, describen las treinta clases módulo 30. Se demuestra que elevar al cubo conserva cada fila y actúa en su pentágono intercambiando dos posiciones vecinas y dejando fijas las otras tres. La transformación es involutiva: aplicada dos veces devuelve la posición inicial. Esta propiedad permite recuperar la clase de una raíz cúbica entera a partir de la clase de su cubo, aunque no determina por sí sola la raíz completa. La disposición pentagonal de los tramos procede de una nota de 2014, que se reproduce en apéndice. El desarrollo es autocontenido.

Origen de la construcción

La disposición pentagonal de los tramos procede de una nota del autor de 2014, que se reproduce en el apéndice A. En ella figuran ya las cinco familias de tramos $0, 5, 10, \ldots$; $1, 6, 11, \ldots$; hasta $4, 9, 14, \ldots$, situadas en los vértices de un pentágono en el mismo orden y con la misma orientación que en la figura 1. La nota no trata la acción del cubo. El intercambio de posiciones vecinas, su carácter involutivo, la lectura de la clase de una raíz y las demostraciones de este escrito son desarrollos de 2026 y no se atribuyen a aquella nota.

1. Una tabla que puede representarse sin desplegarla

Consideremos la tabla infinita de seis filas

$r \backslash k$	0	1	2	3	4	$\cdots$
0	0	6	12	18	24	$\cdots$
1	1	7	13	19	25	$\cdots$
2	2	8	14	20	26	$\cdots$
3	3	9	15	21	27	$\cdots$
4	4	10	16	22	28	$\cdots$
5	5	11	17	23	29	$\cdots$

Cada entrada tiene la forma $n = 6k + r$. Llamaremos *fila* r a la que contiene los números de resto r módulo 6, y *tramo* a la columna de índice k; estos términos se usarán siempre con ese significado.

Dentro de una fila, cinco avances de columna suman 30 y devuelven la misma terminación decimal. En lugar de reproducir indefinidamente las columnas, las agrupamos en cinco familias: $0, 5, 10, \ldots$; $1, 6, 11, \ldots$; hasta $4, 9, 14, \ldots$. Cada familia ocupa una posición de un pentágono.

La figura es un dispositivo de organización aritmética: sus posiciones y su orden cíclico importan, pero no intervienen en los cálculos los ángulos, las longitudes de los lados ni un área geométrica. Las identidades aritméticas empleadas, como $n^3 \equiv n \pmod 6$ o el pequeño teorema de Fermat, son clásicas.

2. Fila, posición y vuelta

Definición 1. Para un entero x y un entero $m \geq 1$, escribimos $[x]_m$ para el único elemento de $\{0, \ldots, m-1\}$ congruente con x módulo m.

Proposición 2. *Todo entero $n \geq 0$ admite una única expresión con $q, s, r \in \mathbb{Z}$:*

$$\boxed{n = 30q + 6s + r}, \qquad q \geq 0, \quad 0 \leq s \leq 4, \quad 0 \leq r \leq 5. \tag{1}$$

En ella r es la fila, s es la posición del pentágono y q es la vuelta o bloque de treinta números.

Demostración. La división euclídea de n por 6 da, de manera única, $n = 6k + r$, con $0 \leq r < 6$. A su vez, la división euclídea de k por 5 da $k = 5q + s$, con $0 \leq s < 5$. Sustituyendo se obtiene (1); la unicidad se deduce de las dos divisiones euclídeas. □

El pentágono registra s, no q. En una misma dirección se sitúan los tramos $s, s+5, s+10, \ldots$, y, fijada la fila, los números

$$6s + r, \quad 30 + 6s + r, \quad 60 + 6s + r, \quad \ldots.$$

Una fila y una posición determinan, por tanto, una clase módulo 30, pero no un entero concreto.

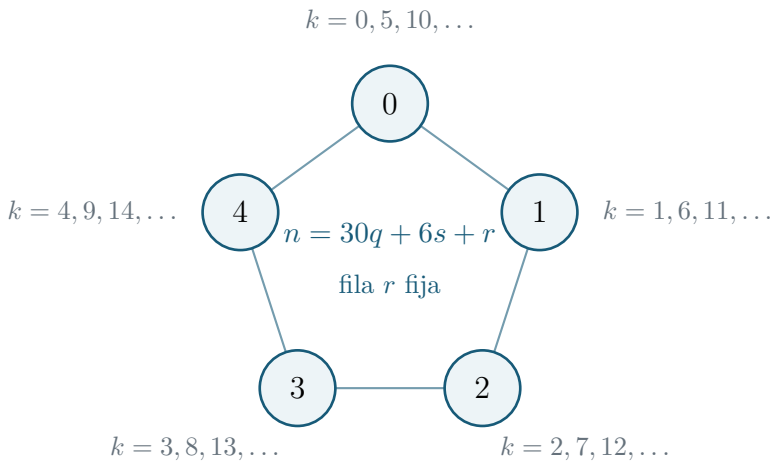


Figura 1: Pentágono de los tramos. Los vértices se numeran en sentido horario. Dar una vuelta en el índice k aumenta n en 30; la vuelta q es una coordenada aritmética, no una distancia en el dibujo.

Ejemplo 3. En la fila $r = 1$, la posición $s = 2$ representa $13, 43, 73, \ldots$. El número 73 tiene coordenadas $(q, s, r) = (2, 2, 1)$ y pertenece al tramo $k = 12 = 5 \cdot 2 + 2$. No debe confundirse la posición $s = 2$ con el tramo $k = 12$.

3. La acción del cubo sobre el pentágono

La operación estudiada no es $n \mapsto n^3$ sobre todos los enteros conservando su magnitud, sino su acción sobre las clases módulo 30. El cubo puede cambiar enormemente la vuelta; aquí conservamos solo la fila y la posición.

Lema 4. *Para todo entero n, se cumple $n^3 \equiv n \pmod 6$. En consecuencia, elevar al cubo conserva la fila.*

Demostración. El producto $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ contiene un factor par y un factor divisible por 3, por ser producto de tres enteros consecutivos. Por tanto, es divisible por 6. □

Escribamos $n^3 = 30Q + 6t + r$, donde se ha usado que la fila se conserva. La nueva posición t puede calcularse sin conocer Q.

Proposición 5. *En la fila r, elevar al cubo induce la aplicación*

$$\boxed{\sigma_r(s) = \Big[(s+r)^3 - r\Big]_5 .} \tag{2}$$

Es decir, si n tiene posición s, su cubo tiene posición $t = \sigma_r(s)$.

Demostración. De (1), reduciendo módulo 5, resulta $n \equiv s + r$ (mód 5). Por otro lado, $n^3 = 30Q + 6t + r \equiv t + r$ (mód 5). Se obtiene $t + r \equiv (s + r)^3$ (mód 5), que determina el único $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dado por (2). □

Teorema 6 (El intercambio pentagonal)**.** *En cada fila r, la aplicación σ_r intercambia las posiciones*

$$a_r = [2 - r]_5 , \qquad b_r = [3 - r]_5 ,$$

y deja fijas las otras tres. Las posiciones intercambiadas son vecinas en el orden cíclico del pentágono.

Demostración. La elevación al cubo sobre los cinco restos módulo 5 es

x	0	1	2	3	4
$[x^3]_5$	0	1	3	2	4.

Solo se intercambian los restos 2 y 3. En la fila r, estos corresponden a las posiciones $s = [2 - r]_5$ y $s = [3 - r]_5$. Al restar r después de cubar, como exige (2), se intercambian precisamente esas dos posiciones. Los otros tres restos, y por tanto sus posiciones, quedan fijos. Finalmente $b_r - a_r \equiv 1$ (mód 5), de modo que son vecinos, incluido el caso del par $\{4, 0\}$. □

La tabla siguiente expresa la misma regla de dos maneras. Los números de la última columna son representantes módulo 30, no igualdades entre un entero y su cubo.

Fila r	Posiciones intercambiadas	Representantes intercambiados
0	$2 \longleftrightarrow 3$	$12 \longleftrightarrow 18$
1	$1 \longleftrightarrow 2$	$7 \longleftrightarrow 13$
2	$0 \longleftrightarrow 1$	$2 \longleftrightarrow 8$
3	$4 \longleftrightarrow 0$	$27 \longleftrightarrow 3$
4	$3 \longleftrightarrow 4$	$22 \longleftrightarrow 28$
5	$2 \longleftrightarrow 3$	$17 \longleftrightarrow 23$

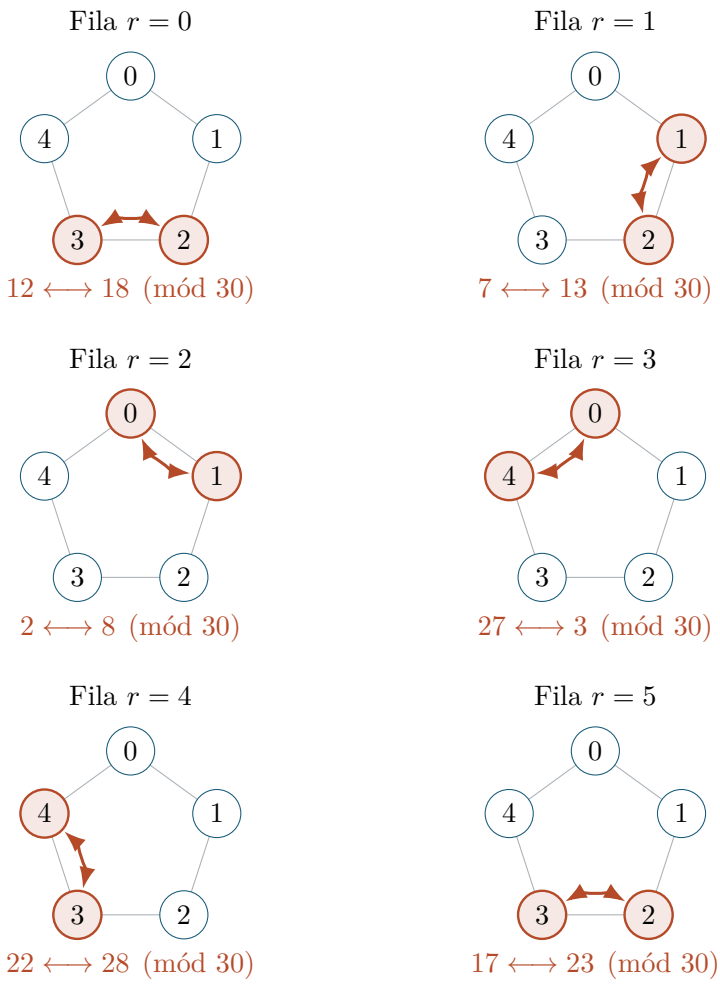


Figura 2: Los seis pentágonos del cubo. Los vértices muestran posiciones s, no los números de la última línea de cada panel. La flecha doble señala el único intercambio; los tres vértices no destacados permanecen fijos. La transformación no es una rotación ni una reflexión rígida del pentágono completo.

Observación 7 (Extensión a potencias impares). La transformación pentagonal descrita para el cubo se extiende a cualquier potencia de exponente impar positivo. En efecto, para todo entero n y todo $e \geq 1$ impar,

$$n^e \equiv \begin{cases} n \pmod{30}, & e \equiv 1 \pmod 4, \\ n^3 \pmod{30}, & e \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Para demostrarlo, observemos primero que $n^e \equiv n \pmod 6$: la congruencia se cumple módulo 2, y módulo 3 todo resto es 0, 1 o -1, que una potencia impar conserva. Si $5 \nmid n$, los restos no nulos módulo 5 satisfacen $n^4 \equiv 1 \pmod 5$; por tanto, n^e es congruente con n o con n^3, según el resto de e módulo 4. Si $5 \mid n$, ambas congruencias son inmediatas. Como 6 y 5 son coprimos, las congruencias anteriores dan el resultado módulo 30.

En consecuencia, para todo entero $h \geq 0$, las potencias $4h + 1$ dejan fijas las cinco posiciones de cada pentágono, mientras que las potencias $4h + 3$ producen exactamente el mismo intercambio de dos posiciones vecinas que el cubo. No aparecen, por tanto, nuevas permutaciones pentagonales al variar el exponente impar. Todas estas aplicaciones son, además, involutivas.

Esta extensión no modifica el procedimiento desarrollado a continuación, cuyo objetivo específico es recuperar la clase de una raíz cúbica entera.

4. Reversibilidad y clases fijas

Corolario 8. *Para cada fila r, se cumple $\sigma_r \circ \sigma_r = \mathrm{id}$. En particular, la operación*

$$C : \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}, \qquad C([n]) = [n^3]$$

es una biyección y su propia inversa:

$$\boxed{n^9 \equiv n \pmod{30}.} \tag{3}$$

Demostración. Cada σ_r es un único intercambio y tres posiciones fijas. Aplicarlo dos veces devuelve cualquier posición a sí misma. La fila también se conserva por el lema 4. Como fila y posición determinan la clase módulo 30, cubar dos veces devuelve la clase inicial. Esto prueba simultáneamente la identidad y la biyectividad. □

Proposición 9. *De las treinta clases módulo 30, dieciocho permanecen fijas al cubar; las otras doce forman los seis pares de la tabla anterior. Una clase es fija si y solo si*

$$n \equiv 0,\ 1 \ o\ 4 \pmod{5}.$$

Demostración. Por el lema 4, $n^3 - n$ siempre es divisible por 6. Será divisible por 30 si y solo si también lo es por 5. Como 5 es primo, esto equivale a que uno de $n-1, n, n+1$ sea divisible por 5. En cada fila hay tres posiciones fijas y un par intercambiado; el recuento es $6 \cdot 3 = 18$ clases fijas y $6 \cdot 2 = 12$ no fijas. □

Observación 10. La reversibilidad se refiere a clases, no al cubo como operación involutiva sobre los enteros. Por ejemplo, $7^3 = 343 \equiv 13 \pmod{30}$ y $13^3 = 2197 \equiv 7 \pmod{30}$, pero $(7^3)^3$ no es el entero 7.

5. Cómo leer la clase de una raíz

Supongamos que se conoce $N = n^3$ para algún entero $n \geq 0$. La siguiente lectura usa únicamente restos pequeños.

1. Calcular $b = [N]_{30}$.
2. Descomponer $b = 6t + r$, con $0 \leq r \leq 5$ y $0 \leq t \leq 4$. Estos son la fila y la posición del cubo.
3. En el pentágono de la fila r, aplicar el intercambio: $s = \sigma_r(t)$.
4. Formar $a = 6s + r$. Entonces $n \equiv a \pmod{30}$, y los candidatos no negativos son $a, a+30, a+60, \ldots$.

El paso tercero emplea la misma regla en sentido inverso, gracias al corolario 8. De manera equivalente,

$$\boxed{a = \left[N^3\right]_{30} = \left[b^3\right]_{30}.} \tag{4}$$

No hace falta cubar el número grande N: basta el resto $b < 30$, o directamente el intercambio del dibujo.

5.1. Lectura mediante raíz digital y última cifra

Para $x > 0$, su raíz digital es el entero de $\{1, \ldots, 9\}$ obtenido al sumar reiteradamente las cifras decimales. Es congruente con x módulo 9 y, por tanto, módulo 3. Si $x = 0$, fijamos su raíz digital en 0.

La raíz digital de N da n mód 3, porque $n^3 \equiv n \pmod 3$. La última cifra de N da también la paridad de n; ambas cosas determinan la fila $r = n$ mód 6. Además, si $d = [N]_{10}$, la última cifra de la raíz es

$$u = \left[d^3\right]_{10}.$$

En efecto, $x^9 \equiv x \pmod{10}$: es inmediato módulo 2; módulo 5, la tabla de cubos usada en el teorema 6 es involutiva. Como 2 y 5 son coprimos, la congruencia vale módulo 10.

Conocidos r y u, la posición de la raíz se obtiene por

$$\boxed{s = [u - r]_5\,, \qquad a = 6s + r.}$$

Esto se deduce de $n \equiv s + r \pmod 5$. La paridad ya fijada garantiza también que a tiene la terminación u módulo 10. Por consiguiente, para un cubo perfecto estas dos señales determinan exactamente su raíz módulo 30, pero no la vuelta.

Observación 11. La raíz digital de un cubo positivo solo puede ser 1, 8 o 9, como se comprueba cubando los nueve restos módulo 9. Este descarte no debe confundirse con la transformación módulo 30: esta última admite todas las clases y no permite, por sí sola, rechazar un entero por no ser cubo.

6. Ejemplos de lectura

Ejemplo 12 (Una posición intercambiada)**.** Para $N = 2197$ se tiene $b = 7 = 6 \cdot 1 + 1$. El cubo está en la fila $r = 1$, posición $t = 1$. En ese pentágono se intercambian las posiciones 1 y 2; por tanto $s = 2$ y $n \equiv 6 \cdot 2 + 1 = 13 \pmod{30}$. El valor 13 es una raíz efectiva porque $13^3 = 2197$.

Ejemplo 13 (Un intercambio que atraviesa el cierre del pentágono)**.** Para $N = 185193$ se tiene $b = 3 = 6 \cdot 0 + 3$. En la fila $r = 3$ se intercambian las posiciones 0 y 4. La raíz está, por tanto, en $s = 4$, y $n \equiv 27 \pmod{30}$. Los candidatos comienzan en $27, 57, 87, \ldots$; en este caso $57^3 = 185193$.

Ejemplo 14 (Una posición fija y una selección por magnitud)**.** Para $N = 704969$ se tiene $b = 29 = 6 \cdot 4 + 5$. En la fila $r = 5$ solo se intercambian las posiciones 2 y 3. La posición 4 permanece fija, de modo que

$$n \equiv 29 \pmod{30}.$$

Los primeros candidatos son $29, 59, 89, 119, \ldots$. La raíz digital 8 y la terminación 9 del cubo conducen a la misma clase. Para elegir un entero se usa información adicional:

$$80^3 = 512000 < 704969 < 729000 = 90^3.$$

La única posibilidad de la clase obtenida en $[80, 90)$ es 89. La comprobación $89^3 = 704969$ confirma el resultado.

7. Alcance de la representación

Proposición 15. *Sea $[A, B)$ un intervalo real con $A < B$ y $B - A \leq 30$. En él hay a lo sumo un entero de una clase dada módulo 30.*

Demostración. Dos enteros distintos de la misma clase distan al menos 30. Si $x < y$ pertenecieran a $[A, B)$, entonces $y - x < B - A \leq 30$, contradicción. □

El pentágono aporta la clase; un intervalo suficientemente estrecho puede aportar la unicidad. La proposición no garantiza que haya un candidato en el intervalo ni que un candidato sea una raíz: la existencia y la igualdad $n^3 = N$ deben establecerse aparte. En [1] se determina la vuelta de dos maneras: mediante una búsqueda ordenada sobre la progresión de paso 30 que proporciona el pentágono, y mediante el grupo inicial de cifras de N junto con restos módulo otros primos, que dejan un único candidato.

Los tres niveles de lectura deben mantenerse separados:

- **Representación:** cinco posiciones y seis filas codifican las treinta clases, sin reproducir una tabla extensa.
- **Transformación:** cubar conserva la fila e intercambia un par de posiciones; la regla es reversible sobre las clases.
- **Recuperación del entero:** hace falta determinar la vuelta y confirmar el cubo, o disponer de un argumento equivalente.

El bloque básico de la representación contiene treinta números, distribuidos en seis filas y cinco posiciones.

8. Conclusión

El pentágono representa la parte periódica de una fila infinita. Con la fila r y la posición s se obtiene una clase módulo 30; la vuelta q distingue sus representantes. La acción del cubo se reduce en cada fila a un intercambio de dos vecinos, lo que hace visible su reversibilidad modular.

El valor de esta construcción está en reunir representación, cálculo y explicación en una figura pequeña. No elimina la información de magnitud necesaria para recuperar una raíz entera, pero muestra con precisión qué puede saberse de su posición antes de determinarla.

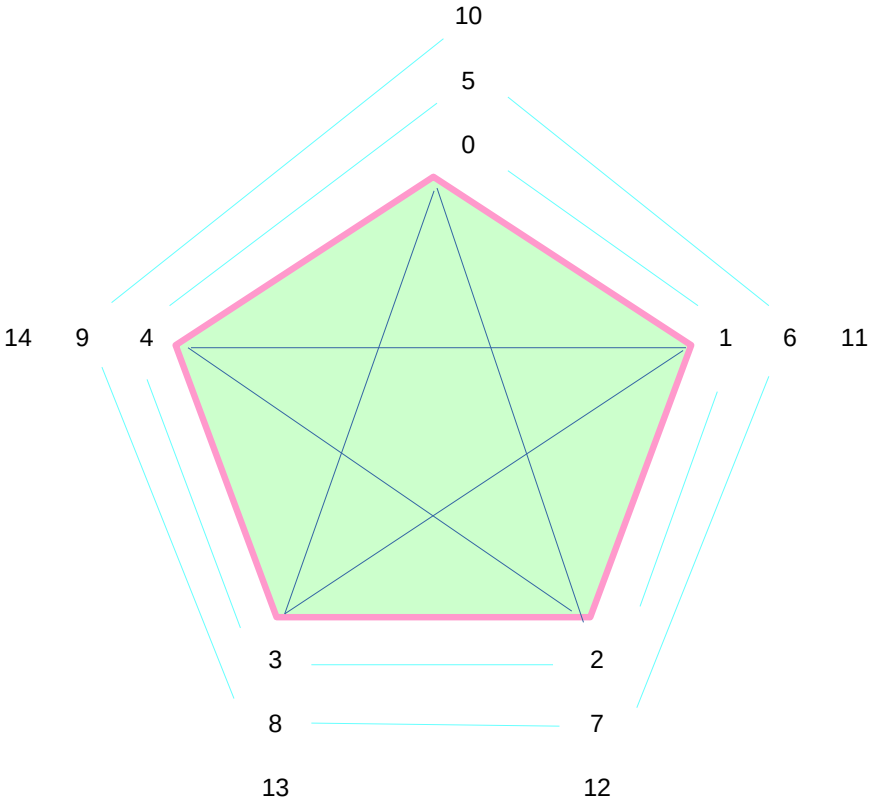
Referencias

[1] M. Cerdá Bennassar, *Extracción de raíces cúbicas enteras mediante congruencias. Reconstrucción y desarrollo de una nota de 2014*, octubre de 2026. Disponible en `https://www.collatz.es/articulos/seccionE_7/Extraccion_de_raices_cubicas_enteras.pdf`.

A. La nota de 2014

Se reproduce la nota tal como se conserva, sin corregir su contenido. Además del pentágono de los tramos, contiene un pentagrama inscrito, cuyo sentido no se explica en ella, y tres líneas de texto.

Aclaración actual. El texto de la nota emplea la palabra «tramo» con un sentido distinto del de este escrito: atribuye a cada tramo cinco columnas de seis números y cuenta 150 números en cinco tramos. En este escrito, cada tramo es una columna de seis números y cinco tramos consecutivos forman una vuelta de 30 números; con ese significado, los rótulos de los vértices de la figura coinciden con los de la figura 1. La discrepancia se señala aquí, fuera de la imagen, sin corregir el original.



5 columnas de 6 números en cada tramo 6 x 5 = 30

Por lo que cada 5 tramos o ciclo hay 150 números.

El número dividido por 30 es igual al número de tramo que ocupa en la tabla.