Compuestos y bloques de primos en la cola de los polinomios de Euler afortunados

Miguel Cerdá Bennassar

Abril de 2026 (revisado en octubre de 2026)

Resumen

Para un primo p, sea $f_p(n) = n^2 + n + p$. Si p es una constante afortunada de Euler, es decir, si $f_p(n)$ es primo para $0 \le n \le p-2$, se determinan exactamente los valores compuestos de f_p en el intervalo $p-1 \le n \le 2p-2$: son los de las posiciones cuadráticas $n_k = (p-1) + k^2$ con $k^2 \le p-1$, donde $f_p(n_k)$ es el producto de los términos consecutivos a_{k-1} y a_k de la sucesión $a_k = p + k(k+1)$. En consecuencia, la cola se descompone en bloques de $2k$ primos consecutivos para $1 \le k \le b-1$, con $b = \lfloor \sqrt{p-1} \rfloor$, seguidos de $p-1-b^2$ primos y del compuesto $f_p(2p-1) = p(4p-1)$. La demostración es elemental y vale para cualquier constante afortunada; los seis casos conocidos ilustran el resultado.

1. Introducción

Euler observó que el polinomio $n^2 + n + 41$ toma valores primos para $n = 0, 1, \ldots, 39$. Más en general, se llama *constante afortunada de Euler* a un primo p tal que $f_p(n) = n^2 + n + p$ es primo para todo $n = 0, 1, \ldots, p-2$. El teorema de Rabinowitsch [4] caracteriza estos primos: p es una constante afortunada si y solo si $4p-1$ es un número de Heegner, es decir, un entero d libre de cuadrados tal que el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ tiene número de clase 1. Por los trabajos de Heegner [2] y Stark [6], los números de Heegner son $1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163$, y los de la forma $4p-1$ con p primo dan exactamente las seis constantes afortunadas

$$p \in \{2, 3, 5, 11, 17, 41\}.$$

Una exposición de estos resultados puede verse en [5] y en [1]; la cuestión análoga para polinomios cuadráticos más generales se estudia en [3].

El valor $f_p(p-1) = p^2$ es compuesto, de modo que el tramo de primos iniciales de una constante afortunada termina en $n = p-2$. En este escrito se estudia lo que ocurre a continuación. Se demuestra que, en el intervalo $p-1 \le n \le 2p-2$, los únicos valores compuestos son los de las posiciones $n_k = (p-1) + k^2$, que se factorizan como producto de dos valores consecutivos de la sucesión $a_k = f_p(k)$ (teorema 1). De ahí se deduce la estructura completa de esa parte de la cola: bloques de primos de longitudes $2, 4, 6, \ldots$, un último tramo de $p-1-b^2$ primos con $b = \lfloor \sqrt{p-1} \rfloor$, y el compuesto $f_p(2p-1) = p(4p-1)$, que es el primero que no está en una posición cuadrática.

2. Notación y factorizaciones elementales

Sea p un primo. Escribimos

$$f_p(n) = n^2 + n + p, \qquad a_k = f_p(k) = p + k(k+1), \qquad n_k = (p-1) + k^2 \qquad (k \geq 0).$$

Los primeros términos de (a_k) son $p,\ p+2,\ p+6,\ p+12,\ p+20, \ldots$, con $a_{k+1} - a_k = 2(k+1)$, y las posiciones cumplen $n_{k+1} - n_k = 2k+1$, de modo que entre n_k y n_{k+1} hay exactamente $2k$ posiciones intermedias.

Lema 1. *Para todos los enteros n y m,*

$$f_p(n) - f_p(m) = (n-m)(n+m+1).$$

En particular, $f_p(-1-n) = f_p(n)$, y si q es un primo que divide $f_p(m)$, entonces q divide $f_p(n)$ para todo $n \equiv m$ o $n \equiv -1-m \pmod{q}$.

Demostración. Basta desarrollar:

$$n^2 - m^2 + n - m = (n-m)(n+m) + (n-m) = (n-m)(n+m+1). \qquad \square$$

Con $m = n-1$ se obtiene $f_p(n) - f_p(n-1) = 2n$: las diferencias entre valores consecutivos de f_p crecen de dos en dos, dentro y fuera de los bloques que se describirán.

Lema 2. *Para todo $k \geq 1$,*

$$f_p(n_k) = a_{k-1}\, a_k,$$

y además $f_p(n_0) = f_p(p-1) = p^2$. En particular, $f_p(n_k)$ es compuesto para todo $k \geq 0$.

Demostración. Desarrollando,

$$\begin{aligned} f_p(n_k) &= \big((p-1) + k^2\big)^2 + (p-1) + k^2 + p = p^2 + (2p-1)k^2 + k^4 \\ &= \big(p + k(k-1)\big)\big(p + k(k+1)\big), \end{aligned}$$

y $p + k(k-1) = a_{k-1}$, $p + k(k+1) = a_k$. Para $k = 0$ la misma cuenta da p^2. Los dos factores son mayores que 1. $\square$

Equivalentemente, por el lema 1, el término a_j divide $f_p(n)$ cuando $n \equiv j$ o $n \equiv -1-j \pmod{a_j}$, y las dos primeras soluciones mayores que j son

$$a_j - 1 - j = n_j \qquad \text{y} \qquad a_j + j = n_{j+1}. \tag{1}$$

Así, cada a_j aparece como factor en las dos posiciones cuadráticas consecutivas n_j y n_{j+1}.

Lema 3. *El primo p divide $f_p(n)$ si y solo si $n \equiv 0$ o $n \equiv -1 \pmod{p}$. Las primeras posiciones con $n \geq 0$ son $0,\ p-1,\ p,\ 2p-1,\ 2p$, y*

$$f_p(p-1) = p^2, \quad f_p(p) = p(p+2), \quad f_p(2p-1) = p(4p-1), \quad f_p(2p) = p(4p+3).$$

Demostración. Módulo p, $f_p(n) \equiv n(n+1)$. Los valores se obtienen desarrollando; por ejemplo, $f_p(2p-1) = 4p^2 - 4p + 1 + 2p - 1 + p = 4p^2 - p$. $\square$

El factor $4p - 1 = |1 - 4p|$ es el valor absoluto del discriminante de f_p; para las constantes afortunadas es el número de Heegner correspondiente.

3. Los compuestos de la cola hasta $2p-1$

Lema 4. *Si p es una constante afortunada, ningún primo $q < p$ divide un valor $f_p(n)$ con $n \geq 0$.*

Demostración. Sea $q < p$ primo y r el resto de n módulo q. Entonces $f_p(n) \equiv f_p(r) \pmod{q}$ y $0 \leq r \leq q-1 \leq p-2$, luego $f_p(r)$ es primo y $f_p(r) \geq p > q$. Por tanto $q \nmid f_p(r)$, y $q \nmid f_p(n)$. □

Este lema es la parte elemental de las demostraciones habituales del teorema de Rabinowitsch; véase [5].

Teorema 1. *Sea p una constante afortunada de Euler y sea n un entero con $p-1 \leq n \leq 2p-2$. Entonces $f_p(n)$ es compuesto si y solo si $n = n_k$ para algún $k \geq 0$ con $k^2 \leq p-1$.*

Demostración. Si $n = n_k$, el valor es compuesto por el lema 2, y $n_k \leq 2p-2$ equivale a $k^2 \leq p-1$.

Recíprocamente, supongamos que $N = f_p(n)$ es compuesto y sea q su menor factor primo. Entonces $q^2 \leq N \leq f_p(2p-2) = 4p^2 - 5p + 2 < 4p^2$, luego $q < 2p$, y por el lema 4, $q \geq p$. Sea r el resto de n módulo q. Por el lema 1, q divide $f_p(r)$ y $f_p(q-1-r)$; sea $j = \min(r, q-1-r)$, de modo que $j \leq (q-1)/2 \leq p-1$. Si fuera $j = p-1$, sería $q = 2p-1$ y $q \mid f_p(p-1) = p^2$, lo cual es imposible. Por tanto $j \leq p-2$, y $a_j = f_p(j)$ es un primo divisible por q, es decir, $q = a_j$. Así, $n \equiv j$ o $n \equiv -1-j \pmod{a_j}$. Como $j \leq p-2 < n$ y $a_j \geq p$, las soluciones posibles son $n = a_j + j = n_{j+1}$, $n = a_j - 1 - j = n_j$, o bien otras mayores o iguales que $\min(2a_j + j,\ 2a_j - 1 - j) \geq 2p-1$, que quedan fuera del intervalo. Luego n es una posición cuadrática. □

Sea

$$b = \lfloor \sqrt{p-1} \rfloor.$$

Las posiciones cuadráticas del intervalo $[p-1,\ 2p-2]$ son $n_0 < n_1 < \ldots < n_b$. Como p es primo, $(b+1)^2 \neq p$, y de $(b+1)^2 > p-1$ se sigue $(b+1)^2 > p$, es decir, $n_{b+1} > 2p-1$.

Corolario 1. *Sea p una constante afortunada y $b = \lfloor \sqrt{p-1} \rfloor$.*

1. *Para $1 \leq k \leq b-1$, los $2k$ valores $f_p(n)$ con $n_k < n < n_{k+1}$ son primos.*
2. *Los $p-1-b^2$ valores $f_p(n)$ con $n_b < n \leq 2p-2$ son primos.*
3. *El valor $f_p(2p-1) = p(4p-1)$ es compuesto, y es el primer valor compuesto de la cola que no ocupa una posición cuadrática; además, $n_b < 2p-1 < n_{b+1}$.*

En total, la cola contiene $b(b-1) + (p-1-b^2) = p-1-b$ primos en el intervalo $[p-1,\ 2p-2]$.

Demostración. Los apartados 1 y 2 son el teorema 1; el apartado 3 es el lema 3 junto con las desigualdades anteriores. La suma $\sum_{k=1}^{b-1} 2k = b(b-1)$ da el total. □

El total $p-1-b$ también puede verse directamente: el intervalo $[p-1,\ 2p-2]$ tiene p posiciones, de las que $b+1$ son cuadráticas.

4. Los seis casos

La tabla siguiente recoge, para cada constante afortunada, el valor de b, las posiciones cuadráticas del intervalo $[p-1,\ 2p-2]$, las longitudes de los bloques de primos entre ellas, el número de primos que siguen a n_b y el compuesto $f_p(2p-1)$.

p	b	$n_0, \ldots, n_b$	bloques	$p-1-b^2$	$f_p(2p-1)$
2	1	$1, 2$	—	0	$14 = 2 \cdot 7$
3	1	$2, 3$	—	1	$33 = 3 \cdot 11$
5	2	$4, 5, 8$	2	0	$95 = 5 \cdot 19$
11	3	$10, 11, 14, 19$	$2, 4$	1	$473 = 11 \cdot 43$
17	4	$16, 17, 20, 25, 32$	$2, 4, 6$	0	$1139 = 17 \cdot 67$
41	6	$40, 41, 44, 49, 56, 65, 76$	$2, 4, 6, 8, 10$	4	$6683 = 41 \cdot 163$

Para $p = 41$, por ejemplo, las factorizaciones del lema 2 son

$$1681 = 41^2, \quad 1763 = 41 \cdot 43, \quad 2021 = 43 \cdot 47, \quad 2491 = 47 \cdot 53,$$
$$3233 = 53 \cdot 61, \quad 4331 = 61 \cdot 71, \quad 5893 = 71 \cdot 83;$$

entre ellas aparecen bloques de $2, 4, 6, 8$ y 10 primos, y después de $n_6 = 76$ siguen los primos $f_{41}(77) = 6047$, $f_{41}(78) = 6203$, $f_{41}(79) = 6361$ y $f_{41}(80) = 6521$, antes de $f_{41}(81) = 41 \cdot 163$. La figura 1 muestra el comienzo de la cola en los seis casos.

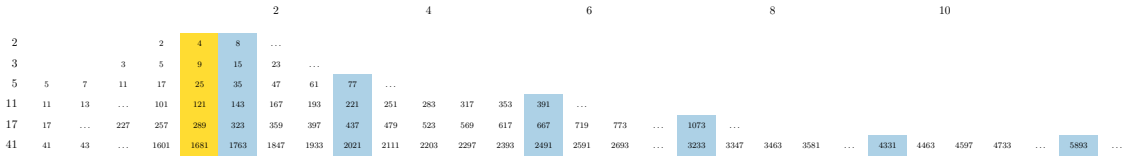

Figura 1: Valores de $f_p(n) = n^2 + n + p$ para las seis constantes afortunadas, desde $n = 0$. Amarillo: $f_p(p-1) = p^2$. Azul: compuestos $f_p(n_k) = a_{k-1}a_k$ en las posiciones $n_k = (p-1) + k^2$, $k \geq 1$. Los valores sin resaltar son primos; los puntos suspensivos indican valores omitidos. Los números de la cabecera son las longitudes de los bloques de primos de la cola en el caso $p = 41$.

Como la lista de constantes afortunadas es finita, los valores de b son exactamente $1, 1, 2, 3, 4, 6$. El valor $b = 5$ exigiría una constante afortunada entre 26 y 36, y los únicos primos de ese intervalo, 29 y 31, no lo son.

5. Conclusiones y cuestiones abiertas

Para una constante afortunada p, los valores de f_p en el intervalo $p-1 \leq n \leq 2p-2$ quedan completamente descritos: son compuestos exactamente en las posiciones $n_k = (p-1) + k^2$ con $k^2 \leq p-1$, donde $f_p(n_k) = a_{k-1}a_k$, y primos en las demás. El argumento solo usa que los primos menores que p no dividen ningún valor de f_p y que todo factor primo pequeño de un valor de la cola tiene que ser uno de los términos a_j del tramo inicial. El primer valor compuesto fuera de las posiciones

cuadráticas es $f_p(2p-1) = p(4p-1)$, donde $4p-1$ es el número de Heegner asociado a p.

A partir de $n = 2p-1$ la descripción deja de ser tan simple. Aparecen de nuevo los múltiplos de p (lema 3), los términos a_j vuelven a dividir valores de f_p en las posiciones $2a_j - 1 - j$ y $2a_j + j$, y pueden intervenir primos mayores que no son valores de f_p en el tramo inicial, como el propio $4p-1$ cuando es primo. Describir los compuestos de la cola más allá de $2p-1$, y en particular determinar hasta dónde se mantiene una descripción en términos de la sucesión (a_k), queda como cuestión abierta.

Referencias

[1] J. H. Conway, R. K. Guy, *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, 1996, pp. 224–226.

[2] K. Heegner, *Diophantische Analysis und Modulfunktionen*, Math. Z. **56** (1952), 227–253.

[3] R. A. Mollin, *Quadratic Polynomials Producing Consecutive Distinct Primes and Class Groups of Complex Quadratic Fields*, Acta Arith. **74** (1996), 17–30.

[4] G. Rabinowitz, *Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfaktoren in quadratischen Zahlkörpern*, Proc. Fifth Int. Congress Math., Cambridge, 1913, pp. 418–421.

[5] P. Ribenboim, *Euler's famous prime generating polynomial and the class number of imaginary quadratic fields*, L'Enseignement Math. **34** (1988), 23–42.

[6] H. M. Stark, *A complete determination of the complex quadratic fields of class-number one*, Michigan Math. J. **14** (1967), 1–27.