Admisibilidad y clasificación exacta de las cribas finitas para ocho formas lineales asociadas a primos consecutivos

Miguel Cerdá Bennassar

Noviembre de 2026

Resumen

Estudiamos las ocho formas lineales $L_i(n) = p_i n + p_{i+1}$, $1 \le i \le 8$, donde p_i denota el i-ésimo primo, relacionadas con la sucesión OEIS A379427. Clasificamos exactamente las raíces prohibidas módulo cada primo y demostramos que el sistema es admisible. Para cualquier módulo positivo M obtenemos una fórmula multiplicativa exacta para el número de clases que superan la criba local. Estudiamos la obstrucción módulo 3 que aparece al añadir una novena forma. Finalmente, analizamos la serie singular, una cota superior incondicional de criba y la predicción conjetural de Bateman–Horn, con una enumeración computacional hasta $X = 10^{13}$ y una comparación numérica en siete escalas.

1. Introducción

Sea $(p_i)_{i\ge1} = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots)$ la sucesión de primos. Consideramos

$$(L_1, \ldots, L_8) = (2n+3,\ 3n+5,\ 5n+7,\ 7n+11,\ 11n+13,\ 13n+17,\ 17n+19,\ 19n+23). \quad (1)$$

La sucesión OEIS A379427, propuesta por Jason Yuen [1], recoge los enteros positivos n para los cuales las ocho expresiones son primas. La imposibilidad de que las nueve primeras formas $p_k n + p_{k+1}$ sean primas simultáneamente figura ya en los comentarios de OEIS, con remisión a A108117 [3]; la sección 4 presenta una demostración autocontenida de ese hecho conocido. Las sucesiones A108110 y A108117 recogen los casos análogos con las seis y las siete primeras formas, respectivamente [2, 3]. Nuestro objetivo no es demostrar la infinitud de tales enteros, sino describir por completo las restricciones que cualquier criba finita impone sobre n.

Escribimos $F(n) = \prod_{i=1}^{8} L_i(n)$ y, para cada primo q,

$$R(q) = \{r \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} : F(r) \equiv 0 \pmod q\}, \qquad \nu(q) = \#R(q).$$

La admisibilidad equivale a $\nu(q) < q$ para todo primo q.

2. Raíces y determinantes

Lema 2.1. *Para $L_i(n) = a_i n + b_i$, con $(a_i, b_i) = (p_i, p_{i+1})$, si $q \neq a_i$ su única raíz módulo q es $r_i \equiv -b_i a_i^{-1} \pmod q$. Si $q = a_i$, la forma no tiene raíces módulo q. Cuando $q \nmid a_i a_j$, las raíces r_i y r_j coinciden si y solo si q divide*

$$\Delta_{ij} = a_i b_j - a_j b_i.$$

Demostración. La primera afirmación resulta de invertir a_i módulo q. Si $q = a_i$, entonces $b_i = p_{i+1} \neq q$ y $L_i(n) \equiv b_i \not\equiv 0 \pmod{q}$. Para la última equivalencia, multiplicamos $-b_i/a_i = -b_j/a_j$ por $a_i a_j$, que es invertible módulo q. □

Proposición 2.2. *Para las ocho formas de (1), los valores de $\nu(q)$ son*

q	2	3	5	7	11	13	17	19	$q \geq 23$
$\nu(q)$	1	2	4	4	6	5	7	7	8

En consecuencia, $\nu(q) < q$ para todo primo q.

Demostración. Los coeficientes a_i son los ocho primos $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$. Los 28 determinantes, enumerados en el apéndice en orden lexicográfico de (i, j), son no nulos y sus factores primos pertenecen a $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Por el lema 2.1, si $q \geq 23$ todos los coeficientes son invertibles y las ocho raíces son distintas, luego $\nu(q) = 8$. Para los ocho primos restantes, el cálculo directo de las raíces se recoge en la tabla siguiente. En todos los casos $\nu(q) < q$. □

q	$R(q)$
2	$\{1\}$
3	$\{0, 1\}$
5	$\{0, 1, 2, 3\}$
7	$\{0, 1, 2, 3\}$
11	$\{0, 2, 3, 4, 6, 8\}$
13	$\{0, 4, 5, 7, 9\}$
17	$\{0, 2, 4, 5, 7, 13, 14\}$
19	$\{0, 4, 6, 8, 10, 11, 12\}$

Observación 2.3. El criterio de determinantes reduce la clasificación global a una verificación aritmética finita. La lista completa de los 28 determinantes aparece explícitamente en el apéndice A; la tabla de raíces permite asimismo comprobar directamente los ocho casos excepcionales.

3. Clasificación de cualquier criba finita

Para $M \geq 1$, definimos

$$A(M) = \#\{n \pmod{M} : \gcd(F(n), M) = 1\}.$$

Teorema 3.1. *Si $M = \prod_{q \mid M} q^{e_q}$, entonces*

$$\boxed{A(M) = \prod_{q \mid M} q^{e_q - 1}(q - \nu(q)).} \tag{2}$$

En particular, $A(M) > 0$ para todo $M \geq 1$ y la densidad exacta de clases admitidas módulo M es

$$\frac{A(M)}{M} = \prod_{q \mid M} \left(1 - \frac{\nu(q)}{q}\right).$$

Demostración. La condición $q \nmid F(n)$ depende solo de n mód q. Hay exactamente $q - \nu(q)$ clases admisibles módulo q, cada una con $q^{e_q - 1}$ levantamientos módulo q^{e_q}. El teorema chino

del resto establece una biyección entre las elecciones independientes para cada potencia prima y las clases módulo M. Multiplicando las cantidades obtenemos (2). Todos los factores son positivos por la proposición 2.2. □

Observación 3.2. El teorema demuestra que ninguna colección *finita* de restricciones por divisibilidad elimina todos los enteros n. No demuestra que existan enteros positivos para los que todas las formas sean primas. La compatibilidad local en todos los módulos puede interpretarse en los enteros profinitos, pero no debe confundirse con una solución prima simultánea en los enteros ordinarios.

Proposición 3.3 (Corolarios de la criba)**.** *Todo entero positivo n para el que las ocho formas son primas satisface $n \equiv 14 \pmod{30}$. Además, para la rueda de los ocho primeros primos,*

$$A(9\,699\,690) = (2-1)(3-2)(5-4)(7-4)(11-6)(13-5)(17-7)(19-7) = 14\,400.$$

Demostración. Si $n \geq 1$ y $q \in \{2, 3, 5\}$ divide alguna $L_i(n)$, esa forma no es prima salvo que valga q. Como $L_i(n) \geq 2n + 3 \geq 5$, esto solo puede ocurrir para $q = 5$ con $L_1(1) = 5$, y en ese caso $L_2(1) = 8$ no es primo. Por tanto n no pertenece a ninguna clase de $R(2)$, $R(3)$ ni $R(5)$, y la tabla de raíces deja únicamente $n \equiv 0 \pmod 2$, $n \equiv 2 \pmod 3$ y $n \equiv 4 \pmod 5$. El teorema chino del resto da $n \equiv 14 \pmod{30}$. La segunda identidad sigue del teorema 3.1 y de $9\,699\,690 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. □

4. La frontera entre ocho y nueve formas

Añadimos $L_9(n) = 23n + 29$. Módulo 3 aparecen las siguientes raíces: $L_1(n) = 2n + 3$ se anula para $n \equiv 0$; $L_3(n) = 5n + 7$ se anula para $n \equiv 1$; y $L_9(n) = 23n + 29$ se anula para $n \equiv 2$. Por consiguiente,

$$R_9(3) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Proposición 4.1. *El sistema de las primeras ocho formas es admisible, pero el de las primeras nueve no lo es. De hecho, no existe ningún entero positivo n para el que las nueve formas sean simultáneamente primas.*

Demostración. La primera afirmación sigue de la proposición 2.2. Para nueve formas, en cada clase n mód 3 al menos una expresión es divisible por 3. Si todas las expresiones fueran primas, alguna de ellas tendría que valer exactamente 3. Sin embargo, para $n \geq 1$ se tiene $L_i(n) \geq 2n + 3 \geq 5$ para las nueve formas. Por tanto ninguna puede valer 3 y es imposible que las nueve sean primas a la vez. □

Observación 4.2. Esta exclusión es un hecho previamente recogido en OEIS A379427 y A108117 [1, 3]; se reproduce aquí para hacer explícita la frontera modular del sistema, sin reivindicar novedad.

5. Serie singular y evaluación certificada

En el contexto de la conjetura de Bateman–Horn [6], definimos la serie singular (cuyo valor es la constante singular)

$$\mathfrak{S} = \prod_{q \text{ primo}} \frac{1 - \nu(q)/q}{(1 - 1/q)^8}. \tag{3}$$

Proposición 5.1. *El producto* (3) *converge a un número real estrictamente positivo.*

Demostración. Los factores correspondientes a $q \le 19$ son positivos. Para $q \ge 23$, $\nu(q) = 8$ y

$$\log\left(\frac{1-8/q}{(1-1/q)^8}\right) = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{8^k - 8}{k q^k}.$$

Más precisamente, para $f(q) = (1-8/q)/(1-1/q)^8$ se cumple

$$0 < -\log f(q) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{8^k - 8}{k q^k} < \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{8}{q}\right)^k = \frac{32}{q(q-8)}.$$

La desigualdad estricta se sigue de $8^k - 8 < 8^k$ y $1/k \le 1/2$ para $k \ge 2$. Como

$$\sum_{q \ge 23} \frac{1}{q(q-8)} < \infty,$$

la serie de valores absolutos de estos logaritmos converge. Así, el producto converge a un límite finito y positivo. □

Para $Q \ge 23$, sea $\mathfrak{S}(Q)$ el producto restringido a los primos $q \le Q$ y sea $P_Q(k) = \sum_{q > Q} q^{-k}$. Entonces

$$\log \mathfrak{S} = \log \mathfrak{S}(Q) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{8^k - 8}{k} P_Q(k). \tag{4}$$

La evaluación de $P_Q(k)$ puede hacerse por inversión de Möbius:

$$P_Q(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \log \zeta_Q(mk), \qquad \zeta_Q(s) = \zeta(s) \prod_{q \le Q} (1 - q^{-s}).$$

El suplemento de certificación adjunto [7] emplea $Q = 1000$, aritmética de bolas Arb y cotas explícitas para ambas colas de las series. Según dicho certificado, se obtiene

$$\boxed{\mathfrak{S} = 1440.50064158822178097261242894690471229835152234482\ldots.} \tag{5}$$

El procedimiento a 1200 bits proporciona, según el certificado adjunto, un intervalo final de radio inferior a 3.5×10^{-233}; las cifras de (5) son una presentación abreviada de ese resultado. El procedimiento utiliza aritmética de intervalos de Arb [4], a través de `python-flint` 0.9.0, y cotas explícitas de truncamiento. La certificación utiliza el código aportado y la biblioteca Arb; se adjuntan el código y el suplemento explicativo. El código permite repetir el cálculo a distintas precisiones; el suplemento documenta los parámetros y las cotas utilizadas.

6. Cota incondicional y predicción de Bateman–Horn

Sea

$$N(X) = \#\{1 \le n \le X : L_1(n), \ldots, L_8(n) \text{ son todos primos}\}.$$

Una cota superior clásica de criba (Brun–Selberg; véase [5, teorema 2.2] para una formulación de la cota de criba superior), aplicable a ocho formas lineales fijas, primitivas y no proporcionales, da incondicionalmente

$$N(X) \ll \frac{X}{(\log X)^8} \qquad (X \ge 3). \tag{6}$$

En particular, $N(X)/X \to 0$ sin hipótesis de Bateman–Horn. La conjetura de Bateman–Horn [6] predice la afirmación mucho más precisa

$$N(X) \sim \mathfrak{S} \int_2^X \frac{dt}{\prod_{i=1}^{8} \log L_i(t)} \sim \mathfrak{S} \frac{X}{(\log X)^8}. \tag{7}$$

La constante $\mathfrak{S} > 1$ expresa una ventaja *relativa* respecto del modelo ingenuo de ocho pruebas independientes de primalidad; no supone que las soluciones sean frecuentes en términos absolutos. La densidad natural nula se deduce ya de (6); lo conjetural es la equivalencia asintótica (7), que implicaría $N(X) \to \infty$. La admisibilidad por sí sola no demuestra infinitud.

7. Comparación numérica

Hemos contado las soluciones hasta $X = 10^{13}$. Por el teorema 3.1, módulo $W = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 9\,699\,690$ hay exactamente

$$A(W) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 = 14\,400$$

clases admisibles, de modo que basta recorrer los $n \le X$ de esas clases. Entre ellos se eliminan por criba los n para los que alguna forma $L_i(n)$ es divisible por un primo auxiliar y, en los restantes, se comprueba la primalidad de las ocho formas. El programa en Python utiliza los primos $23 \le q < 3000$, mientras que las implementaciones en C utilizan los primos $23 \le q \le 100\,000$. Los valores pequeños de n, para los que alguna forma podría coincidir con un primo de la criba, se examinan directamente. Todos los valores $L_i(n)$ con $n \le 10^{13}$ son menores que 2^{64}, y la primalidad de las ocho formas en cada solución se comprueba mediante pruebas deterministas en ese intervalo.

El cálculo se ha realizado con programas que implementan este esquema por vías distintas: el programa en Python, `cuenta_A379427.py`, con NumPy y comprobaciones mediante `gmpy2` y `sympy`, fue utilizado hasta 10^{12} [8]; el programa en C, `count_A379427_original.c`, hasta 10^{13} [9]. El programa Python construye las clases mediante el teorema chino del resto, mientras que los programas en C generan la rueda mediante una comprobación modular directa. El programa C original utiliza Miller–Rabin con doce bases primas y el de auditoría, `count_A379427_auditado.c`, utiliza las siete bases deterministas para enteros de 64 bits. Las dos ejecuciones en C dieron 18 100 soluciones hasta 10^{13} y sus archivos de salida coincidieron byte a byte. Los recuentos del programa Python hasta 10^{12} coinciden con los del programa C en todo el rango común. Las dos variantes en C proporcionan una comprobación adicional de los datos hasta 10^{13}. Los veinticuatro términos de la entrada OEIS A379427 menores que 1.12×10^9 coinciden con los obtenidos [1]. La mayor solución menor que 10^{13} es $n = 9\,999\,999\,214\,454$.

La tabla 1 compara $N(X)$ con la integral de la predicción de Bateman–Horn (7), multiplicada por $\mathfrak{S}$ y evaluada numéricamente, y con la forma simplificada $\mathfrak{S}X/(\log X)^8$. Denotamos por

$$B(X) = \mathfrak{S} \int_2^X \frac{dt}{\prod_{i=1}^{8} \log L_i(t)}$$

el valor de la integral. La evaluación se realizó con `mpmath`, integrando por tramos de escala geométrica mediante `tabla_BH.py` [10]; no se presenta como una certificación por intervalos.

Para $X \le 10^9$ los recuentos son demasiado pequeños para atribuir significado estadístico a los cocientes. A partir de 10^{10} la integral de Bateman–Horn y los valores observados se mantienen próximos: en esas filas, las diferencias absolutas no superan dos veces la raíz cuadrada de $B(X)$.

Cuadro 1: Recuento observado y comparación numérica con la predicción de Bateman–Horn. El cociente es $N(X)/B(X)$; las dos estimaciones son aproximadas.

X	$N(X)$	$B(X)$	$N(X)/B(X)$	$\mathfrak{S}X/(\log X)^8$
10^7	1	3.01	0.33	3.16
10^8	6	8.99	0.67	10.87
10^9	19	33.49	0.57	42.35
10^{10}	132	143.26	0.92	182.30
10^{11}	664	672.81	0.99	850.45
10^{12}	3502	3388.72	1.03	4239.73
10^{13}	18100	18056.99	1.00	22348.13

Esta comparación es solo descriptiva y no presupone un modelo probabilístico demostrado para los errores. La forma simplificada $\mathfrak{S}X/(\log X)^8$, en cambio, excede el recuento aproximadamente entre un 20 % y un 40 % para $10^{10} \le X \le 10^{13}$. En efecto, $\log L_i(t) = \log t + \log p_i + O(1/t)$ cuando $t \to \infty$; sustituir esos logaritmos por $\log t$, y además sustituir la integral por $X/(\log X)^8$, introduce dos aproximaciones cuyos efectos siguen siendo apreciables en este rango. En $X = 10^{13}$ la diferencia entre el recuento y la integral es de aproximadamente 43 soluciones, un 0.24 % del valor previsto. Esta concordancia es compatible con la conjetura, pero no constituye una demostración ni una prueba estadística de ella.

Los programas, la tabla numérica completa (que incluye también $X = 10^6$) y el suplemento de la constante singular se adjuntan como material reproducible. La coincidencia exacta de los archivos de salida de las dos ejecuciones en C constituye una comprobación adicional del recuento; el listado completo puede generarse con los programas adjuntos. La ejecución de Python hasta 10^{12} duró unos cuatro minutos y la de C hasta 10^{13} menos de un minuto; estos tiempos son orientativos y dependen del equipo.

8. Conclusiones

Se ha obtenido una clasificación completa de las obstrucciones locales para las ocho formas de OEIS A379427 y una fórmula exacta para toda criba finita. El sistema es admisible, y su serie singular converge a un número positivo que ha sido evaluado mediante un procedimiento de intervalos documentado. La obstrucción módulo 3 al añadir una novena forma delimita de manera precisa la frontera local de esta familia. La densidad natural nula se obtiene de forma incondicional mediante criba superior. La enumeración computacional hasta 10^{13} y su comparación con la integral de Bateman–Horn muestran una concordancia cuantitativa en ese punto, junto con oscilaciones de la desviación en escalas menores. La infinitud de valores n con ocho primos simultáneos sigue siendo un problema abierto, previsto por Bateman–Horn pero no demostrado aquí.

Nota sobre herramientas computacionales

Parte del código y de las comprobaciones numéricas se elaboró con asistencia de herramientas de inteligencia artificial. Las demostraciones y los resultados computacionales se presentan junto con sus procedimientos de comprobación y los materiales reproducibles disponibles.

Referencias

[1] OEIS Foundation Inc., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, sucesión A379427, https://oeis.org/A379427.

[2] OEIS Foundation Inc., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, A108110, https://oeis.org/A108110.

[3] OEIS Foundation Inc., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, A108117, https://oeis.org/A108117.

[4] F. Johansson, "Arb: efficient arbitrary-precision midpoint-radius interval arithmetic", *IEEE Transactions on Computers* **66** (2017), 1281–1292.

[5] H. Halberstam y H.-E. Richert, *Sieve Methods*, Academic Press, 1974.

[6] P. T. Bateman y R. A. Horn, "A heuristic asymptotic formula concerning the distribution of prime numbers", *Mathematics of Computation* **16** (1962), 363–367.

[7] *Suplemento matemático: certificación de la constante singular de A379427*, documento `Certificacion_constante_singular.pdf` y programa `certify_S.py`, material suplementario que acompaña a este escrito en Zenodo (2026).

[8] M. Cerdá Bennassar, `cuenta_A379427.py`, enumerador Python, material suplementario que acompaña a este escrito en Zenodo (2026).

[9] M. Cerdá Bennassar, `count_A379427_original.c` y `count_A379427_auditado.c`, enumeradores C, material suplementario que acompaña a este escrito en Zenodo (2026).

[10] M. Cerdá Bennassar, `tabla_BH.py` y `tabla_BH.csv`, cálculo de la integral y tabla numérica, material suplementario que acompaña a este escrito en Zenodo (2026).

A. Los 28 determinantes

En el orden lexicográfico de los pares (i, j), los determinantes $\Delta_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$ son

$$\begin{aligned}
i = 1: &\quad 1, -1, 1, -7, -5, -13, -11, \\
i = 2: &\quad -4, -2, -16, -14, -28, -26, \\
i = 3: &\quad 6, -12, -6, -24, -18, \\
i = 4: &\quad -30, -24, -54, -48, \\
i = 5: &\quad 18, -12, 6, \\
i = 6: &\quad -42, -24, \\
i = 7: &\quad 30.
\end{aligned}$$

Todos son no nulos y ninguno tiene un factor primo mayor que 13.