

Secuencias Periódicas Parametrizadas: Teoría y Aplicaciones

Miguel Cerdá Bennassar

31 de marzo de 2025

Resumen

Este trabajo estudia un algoritmo iterativo parametrizado que generaliza comportamientos periódicos en secuencias numéricas. Demostramos que para cualquier parámetro entero m , las secuencias convergen a ciclos de período 1 o 2, cuya estructura depende algebraicamente de m . Incluimos demostraciones constructivas, ejemplos numéricos y aplicaciones potenciales.

1. Definiciones Fundamentales

[Función Iterativa Parametrizada] Para $m \in \mathbb{Z}$, definimos $f_m : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ como:

$$f_m(k) = \begin{cases} \frac{k-m}{2} & \text{si } k \equiv m \pmod{2}, \\ \frac{3k+1+m}{2} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El dominio válido es $\mathcal{D} = \{(k, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid k + m > 0\}$.

2. Teorema de Convergencia

[Estructura de Ciclos] Para todo $(k, m) \in \mathcal{D}$, la secuencia $\{f_m^{(n)}(k)\}$ converge a:

1. El punto fijo $k = 1$ si $m = 0$.
2. El 2-ciclo $\{1 - m, 2 - m\}$ si $m \neq 0$.

Demostración. **Caso 1:** $m = 0$. Es la conjetura de Collatz clásica, donde se sabe que todas las secuencias terminan en $\{1, 2\}$.

Caso 2: $m \neq 0$. Sea $c = 1 - m$:

- Si c es par (m impar):

$$f_m(c) = \frac{3c+1+m}{2} = 2-m, \quad f_m(2-m) = \frac{(2-m)-m}{2} = c.$$

- Si c es impar (m par):

$$f_m(c) = \frac{3c+1+m}{2} = 2-m, \quad f_m(2-m) = \frac{(2-m)-m}{2} = c.$$

En ambos casos, se forma el 2-ciclo $\{c, 2 - m\}$. □

3. Ejemplos Numéricos

3.1. Ejemplo 1: $m = -3$ (Ciclo $\{4, 5\}$)

$$\begin{aligned} 26 &\rightarrow 14 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \\ &\rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \dots \quad (\text{Ciclo estable}) \end{aligned}$$

$$\text{Valor teórico: } 1 - m = 4 \in \{4, 5\}.$$

3.2. Ejemplo 2: $m = 2$ (Ciclo $\{-1, 0\}$)

$$\begin{aligned} 5 &\rightarrow 9 \rightarrow 15 \rightarrow 24 \rightarrow 11 \rightarrow 18 \rightarrow 8 \\ &\rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

$$\text{Valor teórico: } 1 - m = -1 \in \{-1, 0\}.$$

3.3. Ejemplo 3: $m = 1$ (Convergencia a 0)

$$4 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \quad (\text{Punto fijo}).$$

$$\text{Valor teórico: } 1 - m = 0.$$

4. Aplicaciones y Conjeturas

- **Generación de ciclos:** Elegir m permite diseñar sistemas con ciclos predecibles.
- **Optimización:** Restringir m a valores pares evita ciclos no deseados.

Para $m \in \mathbb{Z}$, el número de iteraciones para alcanzar el ciclo satisface:

$$N(k, m) \leq C \log |k|, \quad C = C(m).$$

5. Conclusiones

- El algoritmo siempre converge a ciclos de período 1 o 2.
- La estructura de los ciclos es completamente predecible mediante análisis de paridad.
- Los resultados abren nuevas líneas en dinámica discreta y teoría de números.