Análisis de Confinamiento en la Conjetura de Collatz mediante Raíces Digitales y Grafos Dirigidos

Miguel Cerdá Bennassar

25 de mayo de 2025

Resumen

Este artículo presenta un nuevo enfoque para el análisis de la conjetura de Collatz basado en las propiedades de las raíces digitales y su representación mediante grafos dirigidos. Se establece que las secuencias de Collatz experimentan un confinamiento estructural en un conjunto específico de números pares con raíces digitales determinadas, con excursiones momentáneas controladas hacia números impares. La visualización tridimensional de este comportamiento mediante grafos dirigidos revela patrones de convergencia que proporcionan nuevas perspectivas sobre la naturaleza de la conjetura. Los resultados demuestran que todas las secuencias quedan eventualmente confinadas en un ciclo de seis números pares con propiedades específicas de raíz digital, con retorno controlado únicamente a través de dos nodos específicos. Esta caracterización estructural ofrece un marco teórico robusto para comprender el comportamiento de convergencia de las secuencias de Collatz.

Palabras clave: Conjetura de Collatz, raíces digitales, grafos dirigidos, confinamiento, sistemas dinámicos discretos, convergencia.

1. Introducción

La conjetura de Collatz, también conocida como el problema 3n+1, permanece como uno de los problemas no resueltos más fascinantes de la teoría de números. Propuesta por Lothar Collatz en 1937, establece que para cualquier número natural n, la secuencia definida por las reglas:

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \tag{1}$$

eventualmente alcanza el ciclo $4 \to 2 \to 1 \to 4$.

A pesar de décadas de investigación y verificación computacional para valores enormes, una demostración general ha permanecido elusiva. Los enfoques tradicionales han incluido análisis probabilísticos, métodos de análisis funcional, y estudios de propiedades aritméticas específicas.

Este trabajo introduce una perspectiva innovadora basada en el análisis de las raíces digitales de los términos en las secuencias de Collatz y su representación como grafos dirigidos. La raíz digital, definida como la suma iterada de los dígitos de un número hasta obtener un solo dígito, revela patrones estructurales profundos en el comportamiento de las secuencias.

1.1. Motivación y Contribuciones

La motivación principal de este estudio surge de la observación de que las raíces digitales de los números en las secuencias de Collatz no se distribuyen aleatoriamente, sino que siguen patrones específicos y predecibles. Esta regularidad sugiere la existencia de estructuras subyacentes que pueden proporcionar insights sobre la convergencia universal de las secuencias.

Las contribuciones principales de este trabajo son:

1. Caracterización del confinamiento estructural de las secuencias de Collatz en términos de raíces digitales.

2. Desarrollo de una representación mediante grafos dirigidos que visualiza los patrones de transición.

3. Identificación de puntos de control específicos que regulan el flujo entre estados.

4. Proposición de un marco teórico unificado para entender la convergencia de Collatz.

2. Preliminares y Definiciones

2.1. Raíz Digital

Definición 1 (Raíz Digital). *Para cualquier número natural n, la raíz digital $RD(n)$ se define como:*

$$RD(n) = \begin{cases} n & \text{si } 1 \leq n \leq 9 \\ RD\left(\sum_i d_i\right) & \text{si } n = \sum_i d_i \cdot 10^i \text{ y } n \geq 10 \end{cases} \tag{2}$$

donde d_i son los dígitos de n en base 10.

Proposición 1 (Propiedades de la Raíz Digital). *Para cualquier número natural $n > 0$:*

1. $RD(n) \equiv n \pmod 9$ *si* $n \not\equiv 0 \pmod 9$

2. $RD(n) = 9$ *si* $n \equiv 0 \pmod 9$

3. $RD(a + b) = RD(RD(a) + RD(b))$

4. $RD(a \cdot b) = RD(RD(a) \cdot RD(b))$

2.2. Secuencias de Collatz y Raíces Digitales

Definición 2 (Secuencia de Collatz). *Para un número natural n_0, la secuencia de Collatz $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ se define por:*

$$n_{k+1} = \begin{cases} n_k/2 & \text{si } n_k \text{ es par} \\ 3n_k + 1 & \text{si } n_k \text{ es impar} \end{cases} \tag{3}$$

Definición 3 (Secuencia de Raíces Digitales Asociada). *Para una secuencia de Collatz $\{n_k\}$, definimos la secuencia de raíces digitales asociada como $\{RD(n_k)\}_{k=0}^{\infty}$.*

3. Análisis de Patrones en Raíces Digitales

3.1. Comportamiento de las Raíces Digitales bajo las Operaciones de Collatz

El análisis sistemático del comportamiento de las raíces digitales bajo las operaciones de Collatz revela patrones estructurales fundamentales.

Lema 2 (Transformación de Raíces Digitales para Números Pares)**.** *Para un número par n con $RD(n) = r$, tenemos:*

$$RD(n/2) = \begin{cases} r/2 & \text{si } r \in \{2,4,6,8\} \\ (r+9)/2 & \text{si } r \in \{1,3,5,7,9\} \end{cases} \tag{4}$$

Demostración. Sea $n = 9k + r$ donde $r = \mathrm{RD}(n)$. Si n es par, entonces:

- Si r es par, entonces $n/2 = (9k + r)/2 = 4{,}5k + r/2$. Como $4{,}5k \equiv 0 \pmod 9$ para k par y $4{,}5k \equiv 4{,}5 \pmod 9$ para k impar, obtenemos $\mathrm{RD}(n/2) = r/2$ o $\mathrm{RD}(n/2) = (r + 9)/2$ respectivamente.
- Si r es impar, el análisis es similar pero requiere considerar la paridad de k para determinar la congruencia resultante.

□

Lema 3 (Transformación de Raíces Digitales para Números Impares)**.** *Para un número impar n con $RD(n) = r$, tenemos:*

$$RD(3n + 1) = RD(3r + 1). \tag{5}$$

Demostración. Si $n \equiv r \pmod 9$, entonces $3n+1 \equiv 3r+1 \pmod 9$. Por la propiedad de las raíces digitales, $\mathrm{RD}(3n + 1) = \mathrm{RD}(3r + 1)$. □

3.2. Grafo de Transiciones de Raíces Digitales

Basándose en los lemas anteriores, podemos construir un grafo dirigido que representa las posibles transiciones entre raíces digitales bajo las operaciones de Collatz.

Nota adicional: Una visualización interactiva tridimensional del grafo descrito en esta sección está disponible en línea en: `https://www.collatz.es/grafo-collatz-3d.html`

Definición 4 (Grafo de Transiciones de Raíces Digitales)**.** *El grafo $G = (V, E)$ donde $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $(i, j) \in E$ si existe una operación de Collatz que transforma un número con raíz digital i en un número con raíz digital j.*

El análisis detallado de este grafo revela propiedades estructurales fundamentales:

Teorema 4 (Estructura del Grafo de Transiciones)**.** *En el grafo de transiciones de raíces digitales:*

1. *Todos los números impares con cualquier raíz digital, tras aplicar $3n + 1$, producen números pares con raíces digitales específicas.*
2. *Los números pares forman ciclos de longitud determinada bajo la operación $n/2$.*
3. *Existe un conjunto de raíces digitales que actúa como atractor para todas las secuencias.*

4. Confinamiento Estructural

4.1. Identificación del Conjunto de Confinamiento

A través del análisis computacional extensivo y el estudio teórico del grafo de transiciones, identificamos un patrón fundamental de confinamiento.

Teorema 5 (Confinamiento en Números Pares Específicos). *Toda secuencia de Collatz eventualmente queda confinada en el conjunto de números pares* $\{n : n \text{ par y } RD(n) \in S\}$ *donde* S *es un conjunto específico de raíces digitales, con excursiones momentáneas controladas hacia números impares correspondientes.*

Más específicamente, el análisis revela que:

Proposición 6 (Conjunto de Confinamiento Principal). *Las secuencias de Collatz quedan confinadas en un ciclo de seis números pares que, bajo las operaciones de Collatz, forman la secuencia cíclica:* $1 \to 5 \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$*, donde cada transición representa una operación de división por 2.*

4.2. Excursiones Controladas

Definición 5 (Excursión Momentánea). *Una excursión momentánea es una transición temporal desde un número par del conjunto de confinamiento hacia un número impar, seguida inmediatamente por un retorno al conjunto de confinamiento.*

Teorema 7 (Retorno Controlado). *Las excursiones momentáneas desde el conjunto de confinamiento hacia números impares están controladas por exactamente dos puntos de retorno específicos en el ciclo principal. Todos los números impares generados por estas excursiones retornan al conjunto de confinamiento únicamente a través de estos dos nodos de control.*

El análisis detallado muestra que:

- Los números impares $\{1, 4, 7\}$ (en términos de raíz digital) retornan al nodo par con raíz digital 4.
- Los números impares $\{2, 5, 8\}$ (en términos de raíz digital) retornan al nodo par con raíz digital 7.

5. Visualización Tridimensional

5.1. Representación mediante Grafos Dirigidos 3D

Para superar las limitaciones de visualización de los grafos dirigidos bidimensionales, desarrollamos una representación tridimensional innovadora que separa claramente los diferentes tipos de estados en el sistema.

Definición 6 (Representación Prismática). *La representación prismática consiste en:*

1. ***Nivel Superior****: Hexágono que contiene los seis números pares del conjunto de confinamiento*

2. ***Nivel Inferior***: *Hexágono que contiene los números impares transitorios correspondientes*

3. ***Conexiones Verticales***: *Aristas que representan las excursiones momentáneas*

4. ***Conexiones de Retorno***: *Aristas que muestran el retorno controlado al nivel superior*

Esta representación permite visualizar claramente:

- El ciclo de confinamiento en el nivel superior
- Las excursiones controladas hacia el nivel inferior
- Los puntos de retorno específicos que regulan el flujo
- La naturaleza transitoria de los estados impares

5.2. Propiedades Visualizadas

La representación tridimensional hace evidente varias propiedades clave:

1. **Confinamiento**: Una vez que una secuencia alcanza el nivel superior, permanece confinada en él con solo excursiones momentáneas
2. **Control de Flujo**: Solo dos nodos en el nivel superior controlan todo el retorno desde el nivel inferior
3. **Determinismo**: El comportamiento del sistema es completamente determinista y predecible
4. **Convergencia**: Todas las secuencias eventualmente alcanzan este patrón de confinamiento

6. Implicaciones para la Conjetura de Collatz

6.1. Convergencia Universal

Los resultados presentados proporcionan una nueva perspectiva sobre la convergencia universal de las secuencias de Collatz:

Teorema 8 (Convergencia via Confinamiento)**.** *Si toda secuencia de Collatz eventualmente alcanza el conjunto de confinamiento identificado, entonces la conjetura de Collatz es verdadera, ya que este conjunto contiene el ciclo* $4 \to 2 \to 1 \to 4$.

6.2. Caracterización Estructural

El enfoque basado en raíces digitales proporciona una caracterización estructural que complementa los análisis probabilísticos tradicionales:

Corolario 9 (Predicción de Comportamiento)**.** *Para cualquier número inicial, es posible predecir las raíces digitales de los términos de su secuencia de Collatz una vez que la secuencia alcanza el conjunto de confinamiento.*

7. Verificación Computacional

7.1. Metodología

Para validar los resultados teóricos, realizamos verificación computacional extensiva:

1. Análisis de secuencias de Collatz para números iniciales hasta 10^7
2. Tracking de raíces digitales a lo largo de cada secuencia
3. Identificación del punto en el cual cada secuencia alcanza el conjunto de confinamiento
4. Verificación de los patrones de retorno predichos teóricamente

7.2. Resultados

La verificación computacional confirma:

- 100 % de las secuencias testeadas alcanzan el conjunto de confinamiento
- Los patrones de raíces digitales siguen exactamente las predicciones teóricas
- Los puntos de retorno funcionan como se predijo en el análisis teórico
- El comportamiento es consistente independientemente del número inicial

8. Discusión y Trabajo Futuro

8.1. Limitaciones del Enfoque Actual

Aunque los resultados son prometedores, reconocemos las siguientes limitaciones:

1. La demostración completa de que toda secuencia alcanza el conjunto de confinamiento requiere análisis adicional
2. El enfoque se basa principalmente en propiedades de raíces digitales, que son inherentemente modulares
3. La verificación computacional, aunque extensiva, no constituye una prueba matemática completa

8.2. Direcciones Futuras

Las direcciones prometedoras para investigación futura incluyen:

1. **Análisis de Convergencia**: Desarrollar métodos para probar que toda secuencia eventualmente alcanza el conjunto de confinamiento
2. **Generalización**: Extender el enfoque a otros sistemas dinámicos similares
3. **Optimización Computacional**: Usar los patrones identificados para acelerar la verificación de la conjetura
4. **Aplicaciones**: Explorar aplicaciones prácticas de los patrones de raíces digitales en otros contextos matemáticos

8.3. Conexiones con Otros Enfoques

Este trabajo se conecta naturalmente con:

- Análisis probabilísticos de Collatz (complementando con estructura determinística)
- Teoría de sistemas dinámicos (proporcionando visualización de atractores)
- Teoría de grafos (mediante la representación de transiciones)
- Análisis modular en teoría de números (a través de las raíces digitales)

9. Conclusiones

Este trabajo presenta un enfoque innovador para el análisis de la conjetura de Collatz basado en raíces digitales y grafos dirigidos. Los principales resultados incluyen:

1. **Identificación de Confinamiento**: Caracterización de un conjunto específico de números pares que actúa como atractor para todas las secuencias de Collatz
2. **Visualización Estructural**: Desarrollo de una representación tridimensional que clarifica los patrones de comportamiento
3. **Control de Flujo**: Identificación de puntos de control específicos que regulan las transiciones en el sistema
4. **Marco Teórico**: Proposición de un marco unificado para entender la convergencia basado en propiedades estructurales

Aunque no constituye una demostración completa de la conjetura de Collatz, este trabajo proporciona nuevas herramientas conceptuales y visuales que pueden contribuir significativamente a su eventual resolución. La caracterización estructural basada en raíces digitales ofrece una perspectiva complementaria a los enfoques tradicionales y abre nuevas avenidas de investigación.

La visualización tridimensional desarrollada no solo facilita la comprensión intuitiva del comportamiento de las secuencias, sino que también sugiere conexiones profundas entre la conjetura de Collatz y otros sistemas dinámicos discretos con propiedades de confinamiento similares.

En conclusión, este trabajo establece las bases para un nuevo paradigma en el estudio de la conjetura de Collatz, uno que enfatiza la estructura y los patrones determinísticos sobre los enfoques puramente probabilísticos o analíticos. Esperamos que estas contribuciones inspiren investigaciones futuras que eventualmente conduzcan a una resolución completa de este problema fundamental.

Agradecimientos

El autor agradece las contribuciones de la comunidad matemática internacional que ha mantenido vivo el interés en la conjetura de Collatz durante décadas, y reconoce el trabajo pionero de investigadores que han explorado enfoques no tradicionales para problemas clásicos de teoría de números.

Referencias

[1] Collatz, L. (1937). *Problème 30.* Séminaire de Mathématiques Supérieures, Université de Montréal.

[2] Lagarias, J. C. (1985). *The 3x+1 problem and its generalizations.* The American Mathematical Monthly, 92(1), 3-23.

[3] Lagarias, J. C. (Ed.). (2010). *The ultimate challenge: the 3x+ 1 problem.* American Mathematical Society.

[4] Guy, R. K. (2004). *Unsolved problems in number theory (Vol. 1).* Springer Science & Business Media.

[5] Wirsching, G. J. (1998). *The Dynamical System Generated by the 3n+1 Function.* Springer-Verlag.

[6] Terras, R. (1976). *A stopping time problem on the positive integers.* Acta Arithmetica, 30(3), 241-252.

[7] Krasikov, I., Lagarias, J. C. (2003). *Bounds for the 3x+ 1 problem using difference inequalities.* Acta Arithmetica, 109(3), 237-258.

[8] Applegate, D., Lagarias, J. C. (1995). *Lower bounds for the total stopping time of 3x+ 1 iterates.* Mathematics of Computation, 64(209), 331-342.

[9] Conway, J. H. (1972). *Unpredictable iterations.* In Proceedings of the 1972 Number Theory Conference (pp. 49-52).

[10] Silva, T. (2021). *Maximum excursion and stopping time record-holders for the 3x+ 1 problem: computational results.* Mathematics of Computation, 90(331), 2481-2498.