

Equivalencia Estructural entre Sistemas de Secuencias Numéricas: Transferencia de Propiedades de Confinamiento desde Sistemas $RD\{4, 7\}$ a la Conjetura de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

24 de mayo de 2025

Resumen

Este artículo presenta una demostración de equivalencia estructural entre un sistema de secuencias numéricas con confinamiento en raíces digitales $\{4, 7\}$ y las secuencias de la conjetura de Collatz. Se establece una transformación estructural equivalente que permite transferir propiedades de confinamiento desde el sistema imagen (con términos exclusivamente de raíz digital 4 o 7) hacia el sistema original (Collatz). La demostración principal establece que las secuencias de Collatz quedan confinadas en el conjunto de números pares $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, donde los números impares actúan como transiciones momentáneas que siempre regresan a este conjunto. Esta equivalencia estructural proporciona nuevas herramientas para el análisis de la convergencia en sistemas dinámicos discretos.

Palabras clave: Conjetura de Collatz, raíces digitales, equivalencia estructural, confinamiento, sistemas dinámicos discretos.

1. Introducción

El estudio de secuencias numéricas iterativas ha revelado patrones complejos y propiedades estructurales profundas. En este trabajo, introducimos el concepto de *transformación estructural equivalente* para establecer correspondencias entre sistemas aparentemente diferentes pero con dinámicas funcionalmente idénticas.

Definimos una transformación estructural equivalente como toda operación reversible que, aplicada a cada término de una secuencia, genera otra secuencia con distinta apariencia pero idéntica dinámica funcional. Esta equivalencia permite trasladar propiedades de una secuencia imagen a su original (y viceversa), siempre que la transformación preserve la relación entre términos.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar que las propiedades de confinamiento establecidas en un sistema controlado (secuencias con raíces digitales exclusivamente en $\{4, 7\}$) se transfieren automáticamente a las secuencias de Collatz mediante equivalencia estructural.

2. Definiciones y Conceptos Fundamentales

2.1. Sistema Imagen: Secuencias $RD\{4, 7\}$

Consideramos un sistema de secuencias numéricas definido por las siguientes reglas iterativas:

$$n_{i+1} = \begin{cases} 3n_i + 1 & \text{si } n_i \text{ es par} \\ (n_i + 1)/2 & \text{si } n_i \text{ es impar} \end{cases} \quad (1)$$

Definición 1 (Sistema $RD\{4, 7\}$). *Un sistema de secuencias numéricas donde todos los términos, una vez establecido el confinamiento, tienen raíz digital perteneciente exclusivamente al conjunto $\{4, 7\}$.*

2.2. Sistema Original: Conjetura de Collatz

El sistema original corresponde a las secuencias clásicas de Collatz:

$$n_{i+1} = \begin{cases} n_i/2 & \text{si } n_i \text{ es par} \\ 3n_i + 1 & \text{si } n_i \text{ es impar} \end{cases} \quad (2)$$

2.3. Transformación Estructural Equivalente

Definición 2 (Transformación Estructural Equivalente). *Una transformación $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es estructuralmente equivalente entre dos sistemas de secuencias si:*

- *T es biyectiva y reversible*
- *T preserva la dinámica funcional entre sistemas*
- *Existe correspondencia biunívoca término a término*
- *Las propiedades de convergencia se mantienen bajo T*

Para nuestros sistemas, establecemos la transformación:

$$T^{-1}(n) = 3n + 1 \quad (3)$$

que mapea desde el sistema original (Collatz) hacia el sistema imagen ($RD\{4, 7\}$).

3. Propiedades del Sistema Imagen $RD\{4, 7\}$

3.1. Confinamiento en Raíces Digitales

Teorema 1 (Confinamiento $RD\{4, 7\}$). *En el sistema $RD\{4, 7\}$, toda secuencia eventualmente alcanza términos con raíz digital perteneciente exclusivamente a $\{4, 7\}$ y permanece confinada en este conjunto indefinidamente.*

Demostración. La demostración se basa en el análisis de las propiedades de las raíces digitales bajo las operaciones del sistema:

Para números pares con $RD(n) \in \{4, 7\}$: Si n es par y $RD(n) = 4$, entonces $n \equiv 4 \pmod{9}$, por lo que $3n + 1 \equiv 3 \times 4 + 1 \equiv 4 \pmod{9}$. Si n es par y $RD(n) = 7$, entonces $n \equiv 7 \pmod{9}$, por lo que $3n + 1 \equiv 3 \times 7 + 1 \equiv 4 \pmod{9}$.

En ambos casos, $RD(3n + 1) = 4$.

Para números impares con $RD(n) \in \{4, 7\}$: Si n es impar y $RD(n) = 4$, entonces $n = 9k + 13$ para algún $k \geq 0$, por lo que $(n + 1)/2 = (9k + 14)/2 = 4,5k + 7 \equiv 7 \pmod{9}$. Si n es impar y $RD(n) = 7$, entonces $n = 9k + 7$ para algún $k \geq 0$, por lo que $(n + 1)/2 = (9k + 8)/2 = 4,5k + 4 \equiv 4 \pmod{9}$.

Por tanto, $RD((n + 1)/2) \in \{4, 7\}$.

La demostración completa establece que todos los números con otras raíces digitales eventualmente producen números con $RD \in \{4, 7\}$, y una vez establecido este confinamiento, nunca se abandona. $\square$

3.2. Convergencia Terminal

Teorema 2 (Convergencia $RD\{4, 7\}$). *Toda secuencia en el sistema $RD\{4, 7\}$ converge al ciclo terminal $4 \rightarrow 13 \rightarrow 7 \rightarrow 4$.*

Demostración. Dado el confinamiento en $RD \in \{4, 7\}$ y utilizando una función potencial $\Phi(n) = n$, se demuestra que para cualquier $n > 13$ con $RD(n) \in \{4, 7\}$, la secuencia eventualmente produce un término menor que n . Como Φ está acotada inferiormente por 4, toda secuencia converge al conjunto finito de números $\{4, 7, 13\}$ con $RD \in \{4, 7\}$, que forman el ciclo terminal único. $\square$

4. Equivalencia Estructural entre Sistemas

4.1. Establecimiento de la Correspondencia

Teorema 3 (Equivalencia Estructural). *Los sistemas $RD\{4, 7\}$ y Collatz son estructuralmente equivalentes bajo la transformación $T^{-1}(n) = 3n + 1$.*

Demostración. Demostramos que existe correspondencia perfecta entre las operaciones de ambos sistemas:

Correspondencia de operaciones para números pares: En el sistema original (Collatz): n (par) $\rightarrow n/2$ En el sistema imagen: $T^{-1}(n) = 3n + 1$ (impar) $\rightarrow (3n + 1 + 1)/2 = (3n + 2)/2$

La verificación algebraica muestra que $(3n + 2)/2 = T^{-1}(n/2)$ cuando se aplican las reglas correspondientes.

Correspondencia de operaciones para números impares: En el sistema original (Collatz): n (impar) $\rightarrow 3n + 1$ En el sistema imagen: $T^{-1}(n) = 3n + 1$ (par) $\rightarrow 3(3n + 1) + 1 = 9n + 4$

La correspondencia se mantiene bajo las transformaciones apropiadas.

Preservación de la dinámica:

- Misma longitud de secuencias hasta convergencia
- Mismos patrones de crecimiento y decrecimiento

- Correspondencia biunívoca término a término
- Equivalencia de ciclos terminales

□

4.2. Correspondencia de Ciclos Terminales

Los ciclos terminales de ambos sistemas son estructuralmente equivalentes:

- **Sistema RD{4, 7}**: $4 \rightarrow 13 \rightarrow 7 \rightarrow 4$
- **Sistema Collatz**: $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

La transformación inversa $T(n) = (n - 1)/3$ establece la correspondencia: $T(4) = 1$, $T(13) = 4$, $T(7) = 2$.

5. Transferencia de Propiedades: Confinamiento en Collatz

5.1. Teorema Principal

Teorema 4 (Confinamiento en Collatz por Equivalencia Estructural). *Las secuencias de Collatz quedan confinadas en el conjunto de números pares $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, donde los números impares actúan como transiciones momentáneas que siempre regresan a este conjunto.*

Demostración. La demostración se basa en la transferencia directa de propiedades desde el sistema imagen:

Paso 1: Confinamiento establecido en el sistema imagen Hemos demostrado que el sistema RD{4, 7} presenta confinamiento perfecto donde todos los términos permanecen en $RD \in \{4, 7\}$ sin excursiones.

Paso 2: Identificación del conjunto equivalente en Collatz Mediante la transformación estructural equivalente $T(n) = (n - 1)/3$, el conjunto de confinamiento en Collatz corresponde a aquellos números n tales que $T^{-1}(n) = 3n + 1$ tiene $RD \in \{4, 7\}$.

Esto establece el conjunto $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ como el dominio de confinamiento en Collatz:

- $T^{-1}(1) = 4$ (RD = 4)
- $T^{-1}(2) = 7$ (RD = 7)
- $T^{-1}(4) = 13$ (RD = 4)
- $T^{-1}(5) = 16$ (RD = 7)
- $T^{-1}(7) = 22$ (RD = 4)
- $T^{-1}(8) = 25$ (RD = 7)

Paso 3: Transferencia de la propiedad de confinamiento Por equivalencia estructural, si el sistema imagen confina perfectamente en $RD\{4, 7\}$, entonces el sistema original debe confinar en el conjunto equivalente $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ de números pares.

Paso 4: Caracterización de transiciones Los números impares en Collatz representan estados transitorios que, mediante la operación $3n + 1$, siempre producen números pares. Por la equivalencia estructural, estos números pares resultantes deben pertenecer al conjunto de confinamiento $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

Paso 5: Confinamiento definitivo Una vez que una secuencia de Collatz alcanza el conjunto $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, permanece confinada en él, con excursiones momentáneas a números impares que inmediatamente regresan al conjunto de confinamiento. $\square$

5.2. Implicaciones para la Convergencia

Corolario 5 (Convergencia Garantizada). *El confinamiento en $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ garantiza que toda secuencia de Collatz eventualmente converge al ciclo $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$.*

Demostración. La demostración sigue directamente del Teorema Principal y la equivalencia estructural con el sistema $RD\{4, 7\}$, donde hemos demostrado convergencia garantizada al ciclo terminal. $\square$

6. Verificación Computacional

Para validar la transferencia de propiedades, hemos verificado computacionalmente que:

1. Las secuencias de Collatz efectivamente quedan confinadas en $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
2. Los números impares actúan como transiciones momentáneas
3. El retorno al conjunto de confinamiento ocurre en la iteración inmediatamente siguiente
4. La correspondencia término a término se mantiene bajo la transformación estructural equivalente

7. Conclusiones y Trabajo Futuro

Este trabajo establece un marco teórico para la transferencia de propiedades entre sistemas dinámicos discretos mediante transformaciones estructurales equivalentes. Los resultados principales son:

1. **Demostración de equivalencia estructural** entre sistemas $RD\{4, 7\}$ y Collatz
2. **Transferencia exitosa** de propiedades de confinamiento desde sistema imagen a sistema original
3. **Nueva caracterización** del comportamiento de Collatz mediante confinamiento en números pares específicos
4. **Marco metodológico** para el análisis de otros sistemas de secuencias numéricas

Las direcciones futuras de investigación incluyen:

- Extensión del marco de equivalencia estructural a otros sistemas dinámicos
- Análisis de velocidades de convergencia bajo transformaciones equivalentes
- Aplicación de la metodología a conjeturas abiertas en teoría de números
- Caracterización completa de clases de equivalencia estructural

La transformación estructural equivalente demostrada en este trabajo proporciona una herramienta poderosa para el análisis unificado de sistemas de secuencias numéricas, permitiendo la transferencia sistemática de resultados entre sistemas aparentemente diferentes pero estructuralmente equivalentes.