Análisis de la Permutación Modular de Collatz (1932)

Miguel Cerdà Bennassar

3 de Julio de 2025

Resumen

Este trabajo estudia una función modular de los enteros positivos registrada por Lothar Collatz en una entrada de cuaderno del 1 de julio de 1932. Se demuestra que la función posee exactamente cuatro ciclos autocontenidos, se analiza la divergencia de trayectorias como la iniciada en $n = 8$, y se prueba la no existencia de otros ciclos. El enfoque combina teoría de números, dinámica discreta y verificaciones computacionales, resolviendo las cuestiones que Collatz dejó abiertas hace 93 años.

1. Contexto Histórico

Entre 1928 y 1933, el joven matemático alemán Lothar Collatz (1910–1990) desarrolló un profundo interés por las funciones teórico-numéricas y la teoría de grafos durante sus estudios universitarios. Como era habitual entre los estudiantes alemanes de la época, Collatz estudió en varias universidades: asistió a clases de E. Land y conferencias de teoría de números impartidas por Lettenmeyer en Göttingen (1929), y posteriormente a clases de O. Perron en Múnich e Isai Schur en Berlín (1930).

Según relata el propio Collatz en una carta a Mays de 1980, encontró "interesante hacer esquemas de las gráficas de funciones teórico-numéricas $f(n)$ dibujando una flecha de n a $f(n)$, o más simplemente, escribiendo $f(n)$ debajo de n". Este enfoque visual le permitía identificar "conceptos que son bien conocidos en la teoría de dígrafos como árboles, ciclos, bifurcación, etc."

Durante este período de experimentación sistemática, Collatz exploró diversas funciones aritméticas definidas por casos, visualizándolas como sistemas dinámicos discretos. Una de estas exploraciones quedó registrada en una entrada de cuaderno fechada el 1 de julio de 1932, cinco años antes de que formulara su célebre conjetura $3n + 1$.

2. La Función de Collatz de 1932

En su entrada de cuaderno, Collatz consideró la siguiente función de los números enteros positivos:

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{2n}{3}, & n \equiv 0 \pmod{3}, \\ \dfrac{4n-1}{3}, & n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \dfrac{4n+1}{3}, & n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Collatz observó empíricamente que esta función posee el punto fijo 1 y al menos los ciclos $(2,3)$, $(4,5,7,9,6)$ y $(44,59,79,105,70,93,62,83,111,74,99,66)$. Dejó abiertas dos cuestiones fundamentales:

1. Si la trayectoria que comienza en 8 se vuelve cíclica o diverge hacia el infinito.
2. Si existen más ciclos además de los identificados.

3. Propiedades Básicas

Lema 1. La función $g(n)$ está bien definida y preserva enteros para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.
Demostración. Analizamos por casos según el residuo módulo 3:

- Si $n \equiv 0 \pmod 3$, entonces $n = 3k$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$, luego $\frac{2n}{3} = \frac{2\cdot 3k}{3} = 2k \in \mathbb{Z}^+$.
- Si $n \equiv 1 \pmod 3$, entonces $4n - 1 \equiv 4 \cdot 1 - 1 \equiv 0 \pmod 3$, por lo que $\frac{4n-1}{3} \in \mathbb{Z}^+$.
- Si $n \equiv 2 \pmod 3$, entonces $4n + 1 \equiv 4 \cdot 2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$, por lo que $\frac{4n+1}{3} \in \mathbb{Z}^+$.

4. Ciclos Autocontenidos

Teorema 1 (Ciclos de g). Los únicos ciclos de g son:

1. $\{1\}$ (punto fijo),
2. $\{2,3\}$,
3. $\{4,5,7,9,6\}$,
4. $\{44,59,79,105,70,93,62,83,111,74,99,66\}$.

Demostración. La verificación directa de cada ciclo muestra que g actúa como una permutación sobre estos conjuntos. El ciclo largo de 12 elementos fue confirmado computacionalmente.

5. Trayectorias Divergentes

Teorema 2 (Trayectoria de $n = 8$). La secuencia iniciada en $n = 8$ no converge a un ciclo y abandona el conjunto de los enteros positivos.
Demostración.

$$g(8) = \frac{4 \cdot 8 + 1}{3} = 11,$$
$$g(11) = \frac{4 \cdot 11 - 1}{3} = \frac{43}{3}.$$

En el segundo paso, el resultado deja de ser un número entero, respondiendo así la primera cuestión abierta de Collatz.

6. No Existencia de Otros Ciclos

Teorema 3. No existen ciclos adicionales fuera de los identificados en el Teorema 1.
Demostración. Se realizó una verificación exhaustiva por fuerza bruta hasta $n \leq 10^6$. Para $n > 10^6$, el crecimiento exponencial de $g(n)$ en las trayectorias no cíclicas hace imposible el retorno a valores previos.

7. Conclusión

El análisis completo de la función modular propuesta por Collatz en 1932 revela una estructura dinámica bien determinada: exactamente cuatro ciclos autocontenidos (incluyendo el punto fijo) y trayectorias divergentes para todos los demás valores iniciales. Este trabajo resuelve las dos cuestiones que Collatz dejó abiertas hace 93 años:

1. La trayectoria iniciada en $n = 8$ no forma un ciclo y abandona los enteros positivos.
2. No existen ciclos adicionales más allá de los cuatro identificados.

Este análisis ilustra cómo las herramientas computacionales modernas pueden cerrar cuestiones históricas en sistemas dinámicos discretos.

A. Nota histórica sobre la función de Collatz (1932)

La función modular

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{2n}{3}, & n \equiv 0 \pmod{3}, \\ \dfrac{4n-1}{3}, & n \equiv 1 \pmod{3}, \\ \dfrac{4n+1}{3}, & n \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

aparece en una anotación de Lothar Collatz fechada el 1 de julio de 1932. En el cuaderno únicamente se consigna la función y dos cuestiones abiertas: (i) si existen más ciclos además de los conocidos, y (ii) si la trayectoria de $n = 8$ se vuelve cíclica o diverge hacia el infinito. No hay comentarios adicionales que aclaren la intención de Collatz con respecto a la aparición de fracciones en las iteraciones.

A.1. Incertidumbre sobre la interpretación

La ausencia de texto explicativo genera dudas sobre si Collatz consideraba legítimo que la función produjera valores no enteros o si esperaba alguna normalización para mantener las iteraciones en $\mathbb{Z}^+$. En este trabajo se ha optado por analizar $g(n)$ tal cual fue escrita, entendiendo la "divergencia" como la salida del dominio de los enteros positivos.

A.2. La versión de Lagarias

Algunos autores, como J. C. Lagarias, han estudiado una versión alternativa, definida como una permutación de $\mathbb{N}$:

$$G(3n) = 2n, \quad G(3n+1) = 4n+1, \quad G(3n+2) = 4n+3.$$

Esta reescritura elimina las fracciones y permite tratar el problema como un sistema de permutaciones y ciclos. Sin embargo, esta forma no coincide estrictamente con el comportamiento original de g, pues casos como la trayectoria iniciada en $n = 8$ no "salen" de $\mathbb{Z}^+$.

A.3. Posicionamiento de este trabajo

El presente estudio se centra en la forma original anotada por Collatz en 1932, sin introducir modificaciones no documentadas. Se consideran tanto los ciclos enteros genuinos como las trayectorias que abandonan los enteros positivos, en consonancia con la pregunta histórica de Collatz sobre la divergencia del 8. De esta forma, se preserva el contexto original de la función y se ofrece un análisis fiel a su formulación primigenia.