Función generadora de secuencias que convergen al ciclo 12-6-3, con términos de raíces digitales 3 y 6

Miguel Cerdá Bennassar

Junio 2025

Resumen

Este escrito presenta el análisis de una variante de la conjetura de Collatz que genera secuencias siempre convergentes al ciclo $12 \to 6 \to 3$. Se demuestra que, a partir del primer elemento con raíz digital 9 (en caso de existir), todos los elementos subsiguientes de la secuencia tienen raíces digitales exclusivamente en el conjunto $\{3,\ 6\}$. La demostración se basa en propiedades modulares y el comportamiento de las raíces digitales bajo las transformaciones definidas.

1. Introducción

La conjetura de Collatz, formulada en 1937, permanece como uno de los problemas abiertos más famosos en matemáticas. La función clásica de Collatz se define como:

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

En este trabajo exploramos una variante que modifica *únicamente* la transformación para números impares, reemplazando $3n+1$ por $3n+3$. Esta pequeña modificación introduce propiedades estructurales que permiten una demostración completa de convergencia.

2. Definición formal

Definición 1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por:

$$f(n) = \begin{cases} 3n+3 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Esta función genera secuencias iterativas $n_0, n_1, n_2, \ldots$ donde $n_{k+1} = f(n_k)$ para todo $k \geq 0$.

3. Análisis modular y raíces digitales

Definición 2. La raíz digital $R(n)$ de un número natural n se define como:

$$R(n) = \begin{cases} 9 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 9 \text{ y } n > 0 \\ n \mod 9 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

3.1. Comportamiento bajo transformaciones

3.1.1. Transformación impar

Para cualquier número impar n, se tiene:

$$3n + 3 = 3(n + 1)$$

Como n es impar, $n + 1$ es par, y por tanto $3(n + 1)$ es múltiplo de 6, lo que implica:

$$R(3n + 3) \in \{3, 6, 9\}$$

Proposición 1. Si n es impar, entonces $R(f(n)) \in \{3, 6, 9\}$.

Observación. Aunque la raíz digital 9 puede aparecer tras aplicar la transformación impar (ya que $3n + 3$ es múltiplo de 3), su presencia en las secuencias es transitoria. Una vez se alcanza un término con raíz digital 3 o 6, las transformaciones siguientes —especialmente en los términos pares— eliminan la posibilidad de que vuelva a aparecer. Así, el comportamiento dinámico a largo plazo queda confinado exclusivamente a las raíces digitales 3 y 6.

3.1.2. Transformación par

Para números pares, la transformación $n/2$ preserva ciertas propiedades modulares:

Proposición 2. Si $n \equiv 0 \pmod 6$, entonces $R(n/2) \in \{3, 6, 9\}$.

Demostración. Si $n = 6k$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $n/2 = 3k$, que es múltiplo de 3.

4. Teorema principal

Teorema 1 (Confinamiento modular). Una vez que una secuencia generada por f alcanza un número con raíz digital en {3, 6, 9}, ninguna transformación posterior permite escapar de este conjunto.

Demostración. Sea n un término de la secuencia con $R(n) \in \{3, 6, 9\}$. Consideramos dos casos:

- **Caso 1:** n es impar. Por la Proposición 1, $R(f(n)) = R(3n + 3) \in \{3, 6, 9\}$.
- **Caso 2:** n es par. Si n es múltiplo de 6, entonces por la Proposición 2, $R(n/2) \in \{3, 6, 9\}$.

  Si n es par pero no múltiplo de 6, entonces $n = 2k$ donde k es impar. Aplicando la transformación: $f(n) = k$. Luego: $f(k) = 3k + 3 = 3(k + 1)$, que es múltiplo de 3, por lo tanto $R(f(k)) \in \{3, 6, 9\}$.

5. Convergencia al ciclo final

Teorema 2 (Convergencia universal). Toda secuencia generada por la función f converge eventualmente al ciclo $12 \to 6 \to 3 \to 12$.

Demostración. Del Teorema 1, sabemos que toda secuencia eventualmente queda confinada en números con raíces digitales {3, 6, 9}.

Dentro de este conjunto, los números se comportan según las siguientes reglas:

- Si $R(n) = 9$ y n es impar: $f(n) = 3n + 3$ tiene $R(f(n)) = 3$
- Si $R(n) = 3$ y n es impar: $f(n) = 3n + 3$ donde $R(f(n)) = 6$
- Si $R(n) = 6$ y n es impar: $f(n) = 3n + 3$ donde $R(f(n)) = 9$

Para números pares, la división por 2 eventualmente produce números impares que entran en el patrón anterior. El ciclo estable es $12 \to 6 \to 3 \to 12$, al que toda secuencia termina por incorporarse.

6. Ejemplos ilustrativos

- **Ejemplo 1:** Desde $n = 9$
  Secuencia: $9 \to 30 \to 15 \to 48 \to 24 \to 12 \to 6 \to 3 \to 12 \to \cdots$
  Raíces digitales: $9 \to 3 \to 6 \to 3 \to 6 \to 3 \to 6 \to 3 \to 3 \to \cdots$

- **Ejemplo 2:** Desde $n = 11$
  Secuencia: $11 \to 36 \to 18 \to 9 \to 30 \to 15 \to \cdots$
  Raíces digitales: $2 \to 9 \to 9 \to 9 \to 3 \to 6 \to 3 \to \cdots$

- **Ejemplo 3:** Desde $n = 13$
  Secuencia: $13 \to 42 \to 21 \to 66 \to 33 \to 102 \to 51 \to 156 \to 78 \to 39 \to 120 \to \cdots$
  Se observa una convergencia progresiva hacia múltiplos de 3.

Comentario sobre la raíz digital 9 y el ciclo final. Las secuencias generadas por esta función pueden presentar, en sus primeros términos, raíces digitales pertenecientes al conjunto $\mathbb{Z}_9^* = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$. Esto ocurre incluso si el número inicial no es una potencia de 2. Por ejemplo, la secuencia iniciada en $n = 352$ comienza como:

$$352 \to 176 \to 88 \to 44 \to 22 \to 11 \to 36 \to 18 \to 9 \to 30 \to 15 \to \cdots$$

Las raíces digitales correspondientes son: $1 \to 5 \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 9 \to 3 \to 3 \to 3 \to 6 \to \cdots$ Una vez alcanzada la raíz digital 3 o 6, la secuencia queda confinada en oscilaciones entre esos dos valores. La raíz digital 9 puede aparecer como parte de un tramo transitorio, pero no persiste en la secuencia.

Por otro lado, el ciclo final observado es siempre $12 \to 6 \to 3 \to 12$, aunque no todas las trayectorias pasen por el 12 en los primeros pasos. Una vez se alcanza el 3, la función obliga a entrar en el ciclo completo, dado que $f(3) = 12$, $f(12) = 6$ y $f(6) = 3$. Por tanto, toda secuencia converge necesariamente a ese ciclo, independientemente del camino recorrido.

7. Comparación con Collatz clásico

La modificación $3n + 1 \mapsto 3n + 3$ introduce una estructura algebraica que:

- Garantiza que todo número impar se transforme en múltiplo de 3
- Genera un confinamiento modular estable
- Elimina la posibilidad de crecimiento indefinido o ciclos alternativos

Esta comparación sugiere que la dificultad del problema original puede deberse a la falta de una estructura de este tipo.

8. Conclusiones

Los resultados presentados en este trabajo se limitan al análisis de una función iterativa concreta: $f(n) = 3n+3$ para impares y $f(n) = n/2$ para pares. Aunque se ha demostrado la convergencia universal al ciclo $12 \to 6 \to 3 \to 12$ dentro de este sistema, no se afirma que resultados análogos se extiendan a otras variantes funcionales. El análisis modular y el estudio de raíces digitales se aplican aquí como herramientas exploratorias, sin pretender generalidad más allá del caso tratado.

Hemos demostrado que la función variante $f(n) = 3n + 3$ (impar) / $n/2$ (par) genera secuencias que:

- Quedan eventualmente confinadas en el conjunto de raíces digitales $\{3, 6, 9\}$
- Convergen universalmente al ciclo $12 \to 6 \to 3 \to 12$
- Exhiben un comportamiento estructurado y predecible

El análisis modular y el estudio de raíces digitales permiten observar patrones recurrentes en ciertas funciones iterativas. Estos patrones pueden ofrecer caminos alternativos para comprender el comportamiento de algunas variantes funcionales del tipo Collatz.