XII. LA CONJETURA DE COLLATZ.
Orden y armonía en los números de las secuencias.

Miguel Cerdá Bennassar – Mayo 2021.

Aplicando 3n+1 a los números pares y (n+1)/2 a los impares, todas las secuencias llegarán al número 4 y entrarán en un bucle infinito con los números 13, 7 y 4.

Como ejemplo, la secuencia empezada con el número 27 y sus cálculos:

27 || 14 || 43 || 22 || 67 || 34 || 103 || 52 || 157 || 79 || 40 || 121 || 61 || 31 || 16 || 49 || 25 || 13 || 7 || 4 ||

CALCULOS:

(27 + 1) / 2 = 14
14 x 3 +1 = 43
(43 + 1) / 2 = 22
22 x 3 +1 = 67
(67 + 1) / 2 = 34
34 x 3 +1 = 103
(103 + 1) / 2 = 52
52 x 3 +1 = 157
(157 + 1) / 2 = 79
(79 + 1) / 2 = 40
40 x 3 +1 = 121
(121 + 1) / 2 = 61
(61 + 1) / 2 = 31
(31 + 1) / 2 = 16
16 x 3 +1 = 49
(49 + 1) / 2 = 25
(25 + 1) / 2 = 13
(13 + 1) / 2 = 7
(7 + 1) / 2 = 4

A continuación, los valores de la raíz digital de los términos de la secuencia:

9, 5, 7, 4, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4.

La secuencia empezada con el número 2541 y los valores de la raíz digital de sus términos:

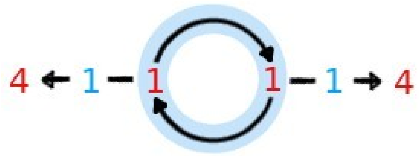
2541 || 1271 || 636 || 1909 || 955 || 478 || 1435 || 718 || 2155 || 1078 || 3235 || 1618 || 4855 || 2428 || 7285 || 3643 || 1822 || 5467 || 2734 || 8203 || 4102 || 12307 || 6154 || 18463 || 9232 || 27697 || 13849 || 6925 || 3463 || 1732 || 5197 || 2599 || 1300 || 3901 || 1951 || 976 || 2929 || 1465 || 733 || 367 || 184 || 553 || 277 || 139 || 70 || 211 || 106 || 319 || 160 || 481 || 241 || 121 || 61 || 31 || 16 || 49 || 25 || 13 || 7 || 4 ||

3, 2, 6, 1, 1, 1, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 4, 7, 4, 4, 7, 4, 4, 7, 4, 7, 4, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4, 7, 4.

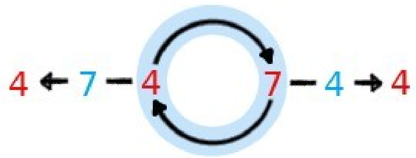
Los valores en color rojo corresponden a los términos impares y los valores en negro a los términos pares.

Los valores de las raíces digitales de los términos de las dos secuencias anteriores acaban siendo todos ellos 4 y 7. Esto sucede porque los números, en sus iteraciones, entran en un ciclo infinito sin salida, iterando según los gráficos siguientes, en los que los valores en color rojo corresponden a los números impares y los valores en azul a los números pares:

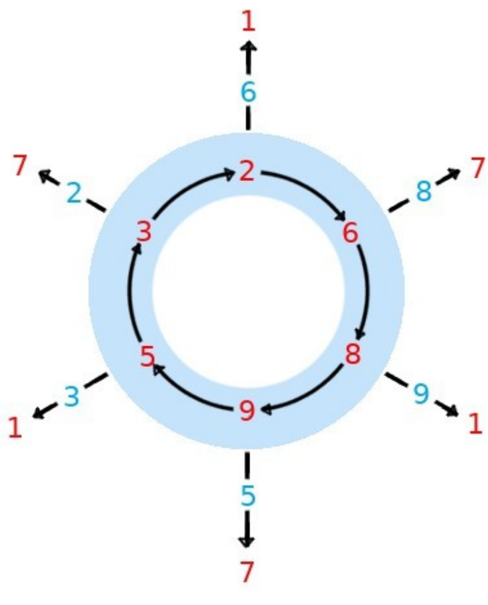
Iteraciones de los números pares e impares con raíz digital 1:



Iteraciones de los números pares e impares con raíz digital 4 y 7:



Los demás números iteran según el gráfico siguiente:



En estos gráficos comprobamos que todos los números, pares e impares, acaban iterando a números con raíz digital 4 y 7, momento en que las secuencias entran en el ciclo del segundo gráfico, del que ya nunca saldrán. Las divisiones entre 2 a las que son sometidos todos los números impares, llevarán a las secuencias hasta el menor de los números impares con raíz digital 4, el 13, entrando en un bucle infinito con el 7 y el 4 y esto lo harán todas las secuencias empezadas con cualquier número natural.

Cambiando el algoritmo de la conjetura de Collatz y aplicando 3n+1 a los números pares, las secuencias también quedan atrapadas en un bucle infinito con tres números: 13, 7 y 4. (3n+1 a los números 4, 2, 1).

A continuación reproduzco mi escrito n.º VI, de Agosto de 2020, que plantea las iteraciones de los números de las secuencias formadas con el algoritmo de la conjetura de Collatz, según el valor de su raíz digital.

VI. LA CONJETURA DE COLLATZ
Orden y armonía en los números de la secuencia

por Miguel Cerdá Bennassar – Agosto de 2020.

Todas las secuencias formadas con la función de Collatz llegan siempre al número 16, y es después de 4 iteraciones más, que llegan al número 1. ¿Porqué todas las secuencias llegan hasta el número 16? Este número puede resultar del número 32 o del número 5. Los dos son números de la forma 9n+5 y ambos tienen la misma raíz digital dr(5). El número 16 es de la forma 9n+7 y su raíz digital es dr(7).

En la siguiente tabla, los números clasificados en filas, según el valor de su raíz digital (columna 0).

n		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	. . .	
9n+8		8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	188	197	206	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296	305	314	323	332	341	350	359	. . .	
9n+6		6	15	24	33	42	51	60	69	78	87	96	105	114	123	132	141	150	159	168	177	186	195	204	213	222	231	240	249	258	267	276	285	294	303	312	321	330	339	348	357	. . .	
9n+4		4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	229	238	247	256	265	274	283	292	301	310	319	328	337	346	355	. . .	
9n+2		2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173	182	191	200	209	218	227	236	245	254	263	272	281	290	299	308	317	326	335	344	353	. . .	
9n+1		1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154	163	172	181	190	199	208	217	226	235	244	253	262	271	280	289	298	307	316	325	334	343	352	. . .	
9n+3		3	12	21	30	39	48	57	66	75	84	93	102	111	120	129	138	147	156	165	174	183	192	201	210	219	228	237	246	255	264	273	282	291	300	309	318	327	336	345	354	. . .	
9n+5		5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	185	194	203	212	221	230	239	248	257	266	275	284	293	302	311	320	329	338	347	356	. . .	
9n+7		7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205	214	223	232	241	250	259	268	277	286	295	304	313	322	331	340	349	358	. . .	
9n+9		9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270	279	288	297	306	315	324	333	342	351	360	. . .	

En la siguiente tabla, los números pares, clasificados de igual forma.

Números pares con raíz digital 7	2(9n+8)		16	34	52	70	88	106	124	142	160	178	196	214	232	250	268	286	304	322	340	358	. . .
Números pares con raíz digital 3	2(9n+6)		12	30	48	66	84	102	120	138	156	174	192	210	228	246	264	282	300	318	336	354	. . .
Números pares con raíz digital 8	2(9n+4)		8	26	44	62	80	98	116	134	152	170	188	206	224	242	260	278	296	314	332	350	. . .
Números pares con raíz digital 4	2(9n+2)		4	22	40	58	76	94	112	130	148	166	184	202	220	238	256	274	292	310	328	346	. . .
Números pares con raíz digital 2	2(9n+1)		2	20	38	56	74	92	110	128	146	164	182	200	218	236	254	272	290	308	326	344	. . .
Números pares con raíz digital 6	2(9n+3)		6	24	42	60	78	96	114	132	150	168	186	204	222	240	258	276	294	312	330	348	. . .
Números pares con raíz digital 1	2(9n+5)		10	28	46	64	82	100	118	136	154	172	190	208	226	244	262	280	298	316	334	352	. . .
Números pares con raíz digital 5	2(9n+7)		14	32	50	68	86	104	122	140	158	176	194	212	230	248	266	284	302	320	338	356	. . .
Números pares con raíz digital 9	2(9n+9)		18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	. . .

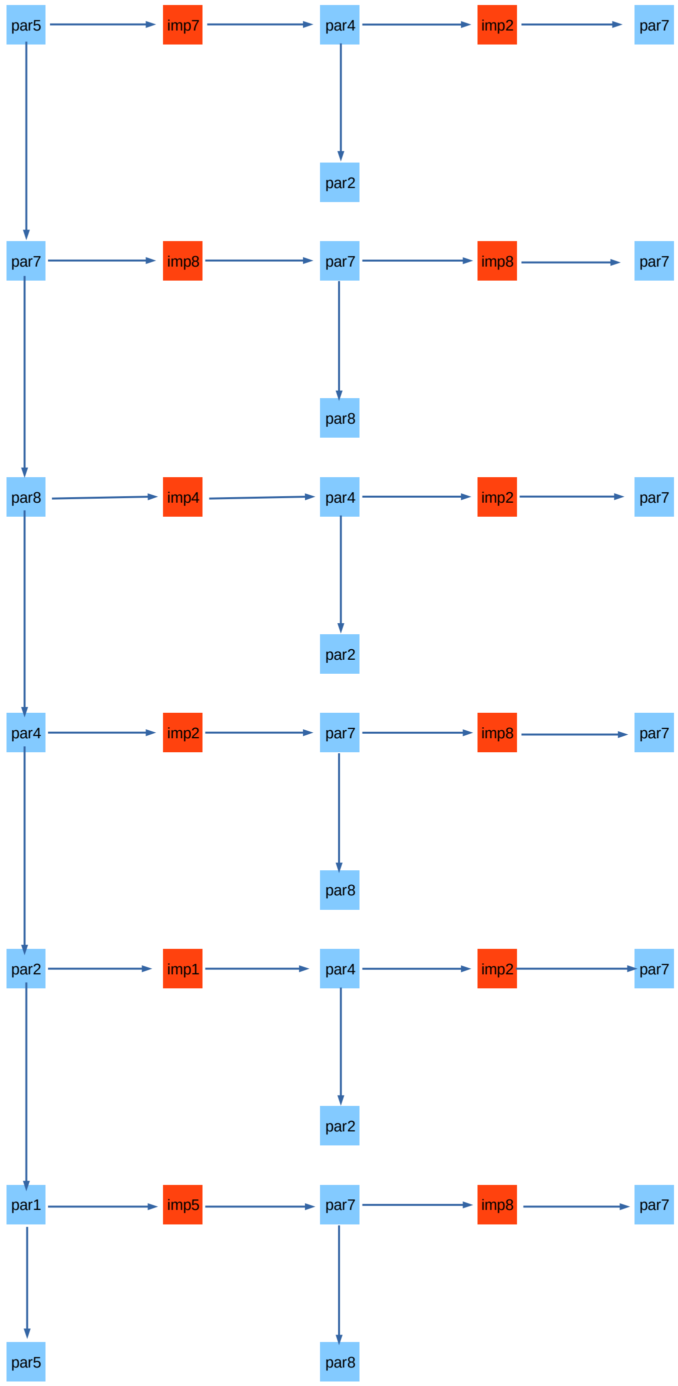
Los números pares de la forma 9n+8, dr(8) llegan a los números de la forma 9n+4, dr(4)
Los números pares de la forma 9n+3, dr(3) llegan a los números de la forma 9n+6, dr(6)
Los números pares de la forma 9n+4, dr(4) llegan a los números de la forma 9n+2, dr(2)
Los números pares de la forma 9n+2, dr(2) llegan a los números de la forma 9n+1, dr(1)
Los números pares de la forma 9n+6, dr(6) llegan a los números de la forma 9n+3, dr(3)
Los números pares de la forma 9n+1, dr(1) llegan a los números de la forma 9n+5, dr(5)
Los números pares de la forma 9n+5, dr(5) llegan a los números de la forma 9n+7, dr(7)
Los números pares de la forma 9n+7, dr(7) llegan a los números de la forma 9n+8, dr(8)
Los números pares de la forma 9n+9, dr(9) llegan a los números de la forma 9n+9, dr(9)

Los números impares de la forma 9n+8, dr(8) llegan a los números de la forma 9n+7, dr(7)
Los números impares de la forma 9n+4, dr(4) llegan a los números de la forma 9n+4, dr(4)
Etc, etc, etc.

A partir de ahora y para simplificar el texto, serán sustituidas las formas de los números por el valor de su raíz digital dr(n).

El siguiente gráfico representa la transformación de los números en cada iteración, según el valor de su raíz digital. Las flechas indican el sentido de las iteraciones.

(par5) en color azul, que representa a todos los números pares con raíz digital dr(5), es el primer valor del gráfico, pero podría ser cualquier otro, porque los números se transforman iterando en un ciclo cerrado en el que los últimos números empiezan un nuevo ciclo. Por ejemplo, el valor (par1), en el último ciclo del gráfico, se transforma en (impar5), pero también en (par5), volviendo al principio.



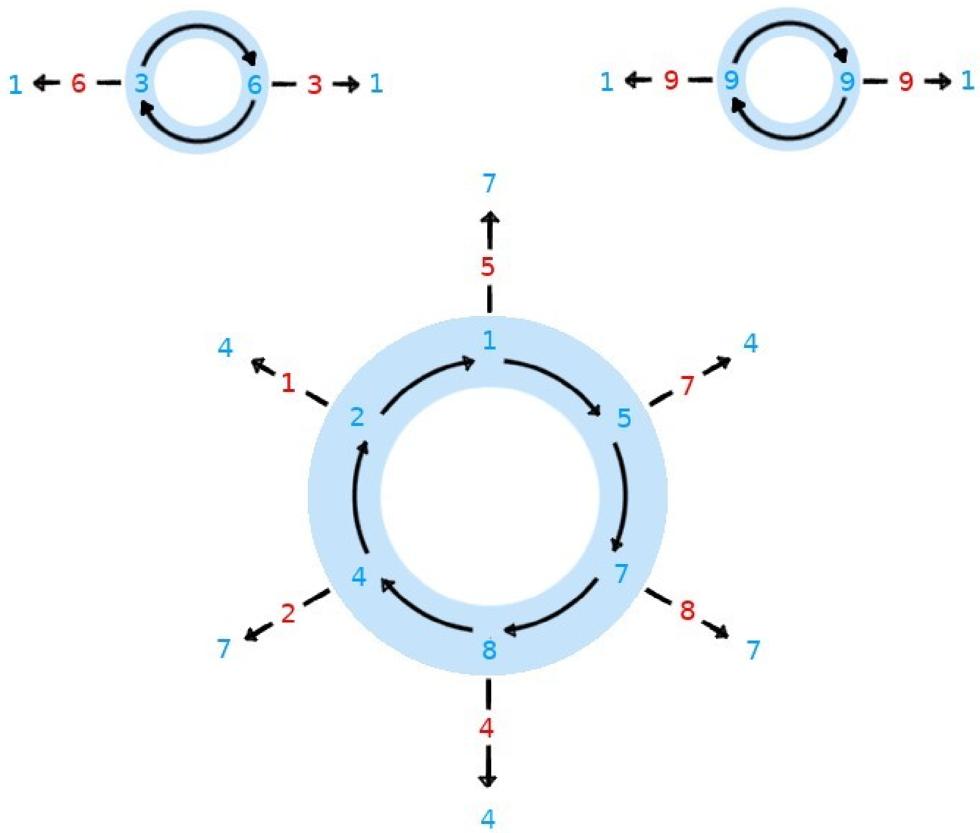
Es básico observar en el gráfico que las transformaciones de los números impares en la primera iteración lo son a números pares dr(4) y dr(7) y en la siguiente iteración los dr(4) son también dr(7). Si esos números pares, dr(4) y dr(7), iteran a un número par, resultan números pares dr(2) y dr(8) y en la siguiente iteración los dr(8) son también dr(2) y esos números iteran hasta que resulta un número par dr(7).

Una singularidad de los números pares con raíz digital dr(7) es que son los únicos números con una sola posibilidad de iterar y lo hacen a un número par dr(8), ya que cuando iteran a un número impar dr(8), éste vuelve a iterar a un número par dr(7). En cambio la iteración de un número par dr(8) es a un número par dr(4), ya que cuando iteran a un número impar dr(4), éste vuelve a iterar a un número par dr(4).

La función de Collatz provoca que todos los números, pares e impares, en sus iteraciones se transformen en números pares con raíz digital dr(7) y éstos iteren a otro número par con raíz digital dr(8) y éstos a un número par con raíz digital dr(4). En este punto la secuencia puede volver a un número par dr(7) si dr(4) itera a un número impar dr(2) o llegar a un impar dr(1) si itera a un número par dr(2).

La respuesta a la pregunta del inicio de este escrito es que todas las secuencias de la función de Collatz llegan al número 16 porque todos los números se transforman en un número par con raíz digital dr(7) y el menor de esos números es el 16.

El siguiente gráfico representa los tres ciclos en los que se mueven los números, según su raíz digital, al aplicarles la función de Collatz.



Los números pares dr(3) y dr(6) forman un ciclo cerrado en el que iteran de uno al otro o a números impares dr(3) y dr(6), que se transforman en números pares dr(1) y entran en el ciclo general.

Los números pares dr(9) iteran en solitario a otro número par dr(9) o a un número impar dr(9), transformándose en un número par dr(1) y entrar en el ciclo general.

En el centro del gráfico se representa el ciclo general donde iteran los números pares e impares dr(1), dr(5), dr(7), dr(8), dr(4) y dr(2).

Todas las iteraciones de una secuencia de Collatz ocurren en un ciclo cerrado sin final, siguiendo el patrón del gráfico. Ciclo cerrado sin final porque la secuencia no acaba al llegar al número 1, sino que itera indefinidamente al 4, 2, 1, 4, 2, 1, . . . La infinitud de ese ciclo se constata en el gráfico, en el que se verifica también la imposibilidad de que pueda existir una secuencia con un período distinto de 4, 2, 1.