

Un Árbol Genealógico de Secuencias Tipo Collatz: Explorando la Contención en las Secuencias Doseña

Miguel Cerdá Bennassar

Marzo 2025

1. Introducción: La Familia Collatz y sus Descendientes Doseña

La secuencia de Collatz, con su definición aparentemente simple pero comportamiento intrincado, puede considerarse el progenitor de una familia de secuencias matemáticas que exploran transformaciones similares sobre los números. En este estudio, nos centramos en tres de estas secuencias relacionadas, a las que denominamos Secuencias Doseña (Doseña 1, Doseña 2 y Doseña 3), y analizamos su conexión con Collatz a través de la lente de la contención de los elementos que generan. Proponemos la analogía de un árbol genealógico, donde Collatz representa el ancestro, y las Secuencias Doseña sus descendientes, heredando y modificando las propiedades de la secuencia original.

La característica clave que exploraremos es la observación de que los conjuntos de valores generados por estas secuencias parecen estar anidados: los elementos de Doseña 1 incluyen los elementos impares de Collatz, los elementos de Doseña 2 se encuentran dentro del conjunto de elementos de Doseña 1, y los elementos de Doseña 3, a su vez, están contenidos dentro de los de Doseña 2. Esta contención sugiere una profunda relación subyacente en la dinámica de estas secuencias.

2. Definición de las Secuencias: Herencia y Modificación de Reglas

Recordemos la secuencia de Collatz ($C(n)$) y las Secuencias Doseña ($D_1(n)$, $D_2(n)$, $D_3(n)$) con la función $\text{esSemientero}(n) \iff (2n \bmod 2) \neq 0$:

2.1. El Progenitor: Secuencia de Collatz ($C(n)$)

$$C(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Objetivo: Ciclo 1-4-2-1.

2.2. El Primogénito: Secuencia Dosena 1 ($D_1(n)$) - Una Fuerte Conexión Impar

$$D_1(n) = \begin{cases} 6n + 2 & \text{si } n \text{ es semientero} \\ 3n + 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ (n - 1)/4 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Objetivo: Convergencia a 0. Contiene todos los elementos impares de Collatz.

2.3. El Hijo Mediano: Secuencia Dosena 2 ($D_2(n)$) - Here dando un Subconjunto

$$D_2(n) = \begin{cases} (6n + 1)/4 & \text{si } n \text{ es semientero} \\ 3n/4 & \text{si } n \text{ es par} \\ (n - 1)/4 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Objetivo: Convergencia a 0. Sus elementos se encuentran dentro del conjunto de elementos de $D_1(n)$.

2.4. El Benjamín: Secuencia Dosena 3 ($D_3(n)$) - Una Herencia Filtrada

$$D_3(n) = \begin{cases} (2n - 1)/4 & \text{si } n \text{ es semientero} \\ 3n/4 & \text{si } n \text{ es par} \\ (n - 1)/4 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Objetivo: Convergencia a 0. Sus elementos se encuentran dentro del conjunto de elementos de $D_2(n)$.

3. La Contención de Elementos: Un Rasgo Familiar (Revisado)

La aparente contención de los elementos generados por las Secuencias Dosena dentro del conjunto de elementos de la secuencia de Collatz y entre las propias

Secuencias Doseña es una característica crucial de su relación. Sin embargo, esta contención está condicionada por la paridad del número inicial:

* **Número Inicial Impar:** Si el número inicial es impar, la secuencia Doseña 1 contiene *todos* los elementos impares de la secuencia de Collatz generada a partir del mismo número inicial.

* **Número Inicial Par:** Si el número inicial es par, para que las secuencias Doseña 1, 2 y 3 contengan términos de la secuencia de Collatz, deben comenzar con el *primer número impar* que aparece en la secuencia de Collatz generada a partir del número par inicial.

Esta condición es fundamental para comprender cómo se "heredan" los elementos a medida que "descendemos" el árbol genealógico de las secuencias. Las modificaciones en las reglas de transformación reconfiguran la forma en que se alcanzan y se transita entre un conjunto de números, pero este conjunto está limitado por la paridad del número inicial y cómo se utiliza para iniciar las secuencias Doseña.

La observación clave que fundamenta la analogía del árbol genealógico es la aparente contención de los elementos generados por estas secuencias, teniendo en cuenta la condición de paridad del número inicial. Si bien una demostración formal de esta contención para todos los números iniciales requeriría un análisis exhaustivo de las reglas de transición, los ejemplos y la estructura de las funciones sugieren esta propiedad:

* **Si el número inicial es impar (n impar):** * $Elementos(D_1(n)) \supseteq \{Elementos\ Impares\ de\ C(n)\}$ (para el mismo n)

* **Si el número inicial es par (n par):** * Sea n' el primer número impar en $C(n)$. * $Elementos(D_1(n')) \supseteq \{Elementos\ Impares\ de\ C(n')\}$ * $Elementos(D_2(n')) \subseteq Elementos(D_1(n'))$ * $Elementos(D_3(n')) \subseteq Elementos(D_2(n'))$

Esta contención (condicionada por la paridad) implica que, a medida que "descendemos" esta familia de secuencias, las transformaciones aplicadas tienden a mantener los valores dentro de un rango o conjunto previamente explorado por sus "ancestros" (o un subconjunto de ellos), aunque la forma de alcanzar esos valores y la dinámica general de la secuencia puedan cambiar significativamente.

Podríamos hipotetizar algunas razones para esta contención:

* **Factores Comunes en las Reglas:** A pesar de las diferencias, existen algunos factores numéricos comunes en las reglas (como los múltiplos de 3 y las divisiones por potencias de 2, aunque modificados). Estas similitudes parciales podrían restringir la generación de valores completamente ajenos. * **El Papel de la Paridad y la Propiedad de ser Semientero:** Las reglas de todas las secuencias dependen de propiedades fundamentales de los números (paridad y ser semientero). Es posible que estas clasificaciones, aunque aplicadas de manera diferente, canalicen la evolución de las secuencias dentro de ciertos límites numéricos. * **La Tendencia a la Reducción:** Las divisiones por 2 y por 4 presentes en las reglas de todas las secuencias introducen una fuerte tendencia a la reducción de la magnitud de los números, lo que podría evitar una divergencia explosiva hacia valores completamente nuevos y no relacionados.

Un análisis formal de la contención requeriría un estudio detallado de cómo cada regla transforma los diferentes tipos de números y cómo los rangos de

salida de una transformación se superponen con los posibles valores de entrada para las siguientes etapas en las otras secuencias.

4. Características y Propiedades de la Familia Dosena

A pesar de la contención de elementos, cada "descendiente.^{en} la familia Dosena exhibe características y propiedades distintas en comparación con el .ancestroCollatz:

* **Objetivo de Convergencia:** La característica más distintiva es el cambio en el objetivo de convergencia. Mientras Collatz busca el ciclo 1-4-2-1, las Secuencias Dosena están diseñadas para converger a 0. Este cambio fundamental en el atractor influye drásticamente en el comportamiento a largo plazo de las secuencias.

* **Oscilaciones:** La motivación inicial para explorar las Secuencias Dosena fue la observación de una aparente reducción o eliminación de las oscilaciones pronunciadas ("números granizo") características de Collatz. Si los gráficos confirman esta tendencia, podría indicar que las modificaciones en las reglas de transformación (especialmente la introducción de la propiedad de ser semientero y las divisiones por 4) tienen un efecto .amortiguador.^{en} el crecimiento de los números.

* **Eficiencia de Convergencia:** Los ejemplos sugieren que las Secuencias Dosena pueden alcanzar su objetivo (0) en un número menor de pasos para ciertos números iniciales en comparación con el número de pasos que Collatz tarda en llegar al ciclo 1-4-2-1. Esto podría ser una consecuencia directa de las reglas que favorecen una reducción más rápida.

* **Ciclos:** Aunque el objetivo es 0, la posibilidad de entrar en ciclos no triviales (aparte del ciclo 0 o el 0-1 en D1 después de alcanzar 0) sigue siendo una propiedad a investigar. La estructura de las reglas podría favorecer o inhibir la formación de bucles en el espacio de los números reales.

5. El Impacto de las Reglas Específicas en la Dinámica de las Secuencias

Las secuencias Dosena se diferencian de la secuencia de Collatz principalmente en dos aspectos clave: la introducción de la propiedad de "ser semientero" y las modificaciones en las reglas de transformación, particularmente las divisiones por 4. Analizaremos cómo estos cambios influyen en la dinámica de las secuencias.

5.1. El Papel de la Propiedad de "Ser Semientero"

La secuencia de Collatz se basa únicamente en la paridad de los números (par o impar). Las secuencias Dosena introducen una nueva clasificación: los

números semienteros. Esta propiedad adicional, que divide aún más el conjunto de los números reales, influye en las reglas de transformación de la siguiente manera:

* **Mayor Diversidad de Trayectorias:** La propiedad de ser semientero permite una mayor diversidad de trayectorias en las secuencias Dosena. Para un mismo número inicial, la secuencia puede evolucionar de manera diferente dependiendo de si encuentra números semienteros en su camino, lo que no ocurre en Collatz. * **Posible Regularización del Comportamiento:** La regla para semienteros en las secuencias Dosena podría tener un efecto regularizador.^{en} el comportamiento de la secuencia. En Collatz, la regla $3n + 1$ para números impares puede generar aumentos abruptos en el valor del número, lo que contribuye a las oscilaciones. Las reglas para semienteros en las secuencias Dosena, aunque algunas también implican multiplicación, se combinan con divisiones, lo que podría amortiguar este crecimiento y llevar a una trayectoria más suave.

5.2. El Impacto de las Divisiones por 4

Otra diferencia crucial es la presencia de divisiones por 4 en las reglas de las secuencias Dosena para números impares y, en algunos casos, para números semienteros y pares. En Collatz, la única división es por 2 para números pares. El impacto de las divisiones por 4 es el siguiente:

* **Mayor Tasa de Decrecimiento:** Las divisiones por 4 introducen una mayor tasa de decrecimiento en las secuencias Dosena en comparación con Collatz. Mientras que la división por 2 en Collatz reduce el valor del número a la mitad, la división por 4 lo reduce a la cuarta parte. Esto podría explicar por qué las secuencias Dosena tienden a converger a 0 más rápidamente y con menos oscilaciones. * **Supresión de Oscilaciones Pronunciadas:** La mayor tasa de decrecimiento podría ser responsable de la supresión de las oscilaciones pronunciadas observadas en Collatz. Las divisiones por 4 actúan como un fuerte "freno" ^{en} el crecimiento del número, contrarrestando el efecto de las reglas que implican multiplicación. Esto podría llevar a una trayectoria más suave y predecible.

5.3. Interacción entre la Propiedad de Semientero y las Divisiones por 4

La interacción entre la propiedad de ser semientero y las divisiones por 4 es crucial para comprender el comportamiento de las secuencias Dosena:

* **Equilibrio entre Aumento y Decrecimiento:** La combinación de reglas para semienteros (que a veces implican multiplicación) y las divisiones por 4 establece un equilibrio diferente entre las operaciones que tienden a aumentar el valor del número y las que tienden a disminuirlo, en comparación con Collatz. Este nuevo equilibrio podría favorecer una convergencia más rápida y una reducción de las oscilaciones. * **Control del Crecimiento:** Las reglas para semienteros, al aplicarse repetidamente, podrían llevar a un crecimiento del

número. Sin embargo, las divisiones por 4, que se aplican a otros tipos de números, controlan este crecimiento y evitan que los valores alcancen magnitudes muy grandes, como ocurre en Collatz.

5.4. Implicaciones para la Contención de Elementos

Las modificaciones en las reglas, especialmente las divisiones por 4, podrían estar directamente relacionadas con la contención de elementos que observamos:

* **Limitación del Espacio de Valores:** Las divisiones por 4 podrían limitar el espacio de valores que las secuencias Dosena pueden alcanzar. Al reducir rápidamente la magnitud de los números, las secuencias tienden a explorar un conjunto de valores más pequeño y acotado, que está contenido dentro del conjunto de valores explorado por Collatz, que tiene una dinámica más "libre".^{en} términos de crecimiento.

6. Análisis Comparativo de las Secuencias (Sin Gráficos)

Para ilustrar las diferencias en el comportamiento de las cuatro secuencias, analizamos las secuencias generadas para dos números iniciales diferentes: 23 y 33.

6.1. Número Inicial: 23

* **Secuencia de Collatz (C(23)):** 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1



Figura 1: Gráfico comparativo de las secuencias

* Observamos oscilaciones significativas con valores que aumentan considerablemente (hasta 160) antes de disminuir hacia el ciclo 1-4-2-1. * **Secuencia Dosena 1 (D1(23)):** 23, 5, 1, 0

* La secuencia Dosena 1 converge rápidamente a 0, mostrando una disminución constante sin oscilaciones. * **Secuencia Dosena 2 (D2(23)):** 23, 5, 1, 0

* Similar a Dosena 1, la secuencia Dosena 2 también converge rápidamente a 0 sin oscilaciones. * **Secuencia Dosena 3 (D3(23)):** 23, 5, 1, 0

* La secuencia Dosena 3 converge a 0 en solo tres pasos, mostrando un decrecimiento muy rápido.

6.2. Número Inicial: 33

* **Secuencia de Collatz (C(33)):** 33, 100, 50, 25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1



Figura 2: Gráfico comparativo de las secuencias