Algoritmo Generador de Secuencias Eventualmente Periódicas: Una Extensión a la Conjetura de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar y Claude AI

Mayo de 2025

Resumen

Este estudio analiza la conjetura de Collatz mediante una función de dos variables (k, m) generadora de secuencias eventualmente periódicas, con ciclos configurables y punto de partida en cualquier número entero. Se identifican patrones relacionados con la paridad y la estructura de los ciclos, demostrando propiedades fundamentales que caracterizan el comportamiento de estas secuencias.

Palabras clave

Secuencias eventualmente periódicas, generador de secuencias, conjetura de Collatz, ciclos de secuencias numéricas.

1. Descripción

Todas las secuencias generadas con esta función serán eventualmente periódicas, cuyo ciclo podremos elegir asignando un valor a m.

Sean $(k, m) \in \mathbb{Z}$, se define este algoritmo como la función $f(k)$, tal que:

$$f(k) = \begin{cases} \frac{k-m}{2}, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad,} \\ \frac{3k+1+m}{2}, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases} \tag{1}$$

Dom $f(k) = \{k \in \mathbb{Z} \mid (k+m) > 0\}$.

Para $\forall (k, m) \in \mathbb{Z}$, en un número finito de iteraciones, $k(n) = 1 - m$.

2. Propiedades

2.1. Periodicidad eventual

Todas las sucesiones generadas serán eventualmente periódicas, de período 2, con $p_1 = 2 - m$ y $p_2 = 1 - m$.

2.2. Invarianza bajo $k+m$ constante

Las secuencias con el mismo valor de $k+m$ tendrán igual número de elementos y la misma distancia entre ellos, que será igual a la distancia entre los valores de m.

$$k(n) - k_1(n) = m - m_1 \iff k + m = k_1 + m_1 \tag{2}$$

2.3. Diferencia entre primer y último elemento

En todas las secuencias, la diferencia entre el primer elemento k y el último $k(n)$ es igual a $k+m-1$.

$$k - k(n) = k + m - 1 \tag{3}$$

3. Matrices $M(n)$

Con los valores de k y de m, formamos matrices con dos filas e infinitas columnas:

- En la primera fila, los números enteros escritos ordenadamente, con los números positivos a la derecha del cero, que representan los posibles valores de k.
- En la segunda fila, los números enteros escritos ordenadamente, con los números positivos a la izquierda del cero, que representan los valores de m.

Por ejemplo, la matriz $M(1)$ donde $k+m=1$ en cada columna:

k	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
m	...	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	...

Y la matriz $M(16)$ donde $k+m=16$ en cada columna:

k	...	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	...
m	...	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	...

Los elementos de las dos matrices son los mismos, pero en la matriz $M(16)$ se ha desplazado la primera fila hasta coincidir $k(16)$ con $m(0)$, para visualizar que en todas las columnas $k+m=16$.

4. Conjuntos $C(n)$

Todas las secuencias generadas con los valores de k y de m de cada columna de la matriz $M(n)$ tienen el mismo número de elementos y la misma distancia entre ellos.

Al conjunto de estas secuencias lo llamamos $C(n)$, donde $n=k+m$.

4.1. Ejemplo: Conjunto $C(16)$

Con los valores de las columnas de la matriz $M(16)$, la función generará infinitas secuencias que formarán el conjunto $C(16)$:

$$C(16) = \begin{pmatrix} \vdots \\ (10, 2, -2, -4, -5); \\ (11, 3, -1, -3, -4); \\ (12, 4, 0, -2, -3); \\ (13, 5, 1, -1, -2); \\ (14, 6, 2, 0, -1); \\ (15, 7, 3, 1, 0); \\ (16, 8, 4, 2, 1); \\ (17, 9, 5, 3, 2); \\ (18, 10, 6, 4, 3); \\ (19, 11, 7, 5, 4); \\ (20, 12, 8, 6, 5); \\ (21, 13, 9, 7, 6); \\ (22, 14, 10, 8, 7); \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{4}$$

5. Ejemplos ilustrativos

5.1. Secuencias con $k + m = 65$

$k(37) + m(28) = 65$:
$37, 70, 21, 46, 9, 28, 0, -14, -21, -17, -11, -2, -15, -8, -18, -23, -20, -24, -26, -27.$
$k(243) + m(-178) = 65$:
$243, 276, 227, 252, 215, 234, 206, 192, 185, 189, 195, 204, 191, 198, 188, 183, 186, 182, 180, 179.$
$k(65) + m(0) = 65$:
$65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14, 7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.$
Las tres secuencias tienen 20 elementos.

5.2. Secuencia que termina en 45

Si queremos formar una secuencia que termine en 45, asignaremos a m el valor de -44 y aplicaremos la siguiente función:

$$f(k) = \begin{cases} \frac{k+44}{2}, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad,} \\ \frac{3k-43}{2}, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases} \tag{5}$$

Dominio: $(k + m) > 0 \rightarrow k \geq 45$.
Secuencia empezada con $k = 74, m = -44$:
$74, 59, 67, 79, 97, 124, 84, 64, 54, 49, 52, 48, 46, 45, 46, 45, \ldots$

5.3. Secuencia que termina en -100

Si queremos que la secuencia acabe en -100, asignaremos a m el valor de 101:

$$f(k) = \begin{cases} \frac{k-101}{2}, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad,} \\ \frac{3k+102}{2}, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases} \tag{6}$$

Dominio: $(k+m) > 0 \to k \geq -100$.

Secuencia empezada con $k = 21, m = 101$:

$21, -40, -9, -55, -78, -66, -48, -21, -61, -81, -91, -96, -93, -97, -99, -100, -99, -100, \ldots$

6. Conclusión

Cualquier número entero $k \in \mathbb{Z}$ del dominio, sometido a la transformación de la función de manera iterada, acabará siempre en $k(n) = 1 - m$.

Con esta función podemos determinar el número entero al que llegará cada secuencia, después de un número finito de iteraciones, en función del valor que asignemos a $m \in \mathbb{Z}$ del dominio.

La conjetura de Collatz se cumplirá para todo valor de k, porque en todos los conjuntos $C(n)$ existe una secuencia generada con el valor de $m = 0$ que acabará en $k(n) = 1 - m$, o sea 1.