

Estudio de los tramos de las secuencias inversas simplificadas de Collatz

Miguel Cerdá Bennassar

Abril 2025

1 Introducción

El objetivo fue desarrollar un programa en PHP para calcular las inversas de ramas del árbol de secuencias simplificadas de Collatz, basadas en un método que define *tramos* directos e inversos. El método utiliza una regla directa $\frac{3n_i+1}{2}$ y una regla inversa $\frac{2n_i-1}{3}$, generando secuencias a partir de un número par n_0 o valores n y m . Este documento resume el método, los problemas resueltos, y el cálculo de secuencias inversas.

2 Definición del método

El método define *tramos* directos que:

- Comienzan con un número impar $k = 2^n \cdot (2m - 1)$, donde:
 - n : Exponente que escala el tramo.
 - m : Índice que genera un impar base $2m - 1$.
- Usan la regla directa:

$$n_{i+1} = \frac{3n_i + 1}{2}, \quad \text{si } 3n_i + 1 \text{ es divisible por } 2$$

- Terminan en el primer número par o cuando el resultado no es entero.
- Según una aportación, cada tramo iniciado con $k = 2^n \cdot (2m - 1)$ tiene:
 - $n + 1$ números impares.
 - 1 número par.
 - Longitud total: $n + 2$ términos.

La secuencia inversa comienza desde el número par final del tramo directo y usa:

$$n_{i+1} = \frac{2n_i - 1}{3}, \quad \text{si } 2n_i - 1 \text{ es divisible por } 3$$

Se detiene cuando $\frac{2n_i-1}{3}$ no es entero.

3 Ejemplo de cálculo: $n_0 = 2186$

Para $n_0 = 2186$, la secuencia inversa se calcula directamente:

- $2186 \rightarrow \frac{2 \cdot 2186 - 1}{3} = \frac{4371}{3} = 1457$
- $1457 \rightarrow \frac{2 \cdot 1457 - 1}{3} = \frac{2913}{3} = 971$
- $971 \rightarrow 647 \rightarrow 431 \rightarrow 287 \rightarrow 191 \rightarrow 127$
- $127 \rightarrow \frac{2 \cdot 127 - 1}{3} = \frac{253}{3} \approx 84.333$ (no entero)

Secuencia inversa:

$$[2186, 1457, 971, 647, 431, 287, 191, 127]$$

- Número de pasos: 8 (7 transiciones).

Tramo directo desde 127:

$$127 \rightarrow \frac{3 \cdot 127 + 1}{2} = 191 \rightarrow 287 \rightarrow 431 \rightarrow 647 \rightarrow 971 \rightarrow 1457 \rightarrow 2186$$

4 Cálculo con n y m

El método permite calcular secuencias inversas introduciendo n y m :

1. **Cálculo de k :**

$$k = 2^n \cdot (2m - 1)$$

Representa el número impar inicial del tramo directo.

2. **Tramo directo:** Desde $n_{\text{start}} = k$, aplica:

$$n_{i+1} = \frac{3n_i + 1}{2}$$

Continúa hasta el primer número par o hasta que el resultado no sea entero.

3. **Secuencia inversa:** Desde el número par final n_0 , aplica:

$$n_{i+1} = \frac{2n_i - 1}{3}$$

Detiene cuando $\frac{2n_i - 1}{3}$ no es entero.

4. **Salida:**

- Secuencia directa (tramo).
- Número de pasos (directa).
- Secuencia inversa.
- Número de pasos (inversa).
- Funciones directa e inversa.

4.1 Ejemplo: $n = 0, m = 96$

1. **Cálculo de k :**

$$k = 2^0 \cdot (2 \cdot 96 - 1) = 1 \cdot 191 = 191$$

2. **Tramo directo:**

$$191 \rightarrow \frac{3 \cdot 191 + 1}{2} = 287 \rightarrow 431 \rightarrow 647 \rightarrow 971 \rightarrow 1457 \rightarrow 2186$$

Secuencia directa : $[191, 287, 431, 647, 971, 1457, 2186]$

- Impares: 6.
- Par: 1.
- Pasos: 7.

3. **Secuencia inversa:** Desde $n_0 = 2186$:

$$2186 \rightarrow 1457 \rightarrow 971 \rightarrow 647 \rightarrow 431 \rightarrow 287 \rightarrow 191 \rightarrow 127$$

Secuencia inversa : $[2186, 1457, 971, 647, 431, 287, 191, 127]$

- Pasos: 8.

5 Estructura de los tramos

Cada tramo iniciado con $k = 2^n \cdot (2m - 1)$ tiene:

Longitud = $n + 2$ términos (teóricamente $n + 1$ impares + 1 par)

Ejemplo para $n = 5, m = 1$:

$$k = 2^5 \cdot (2 \cdot 1 - 1) = 32$$

Tramo directo:

$$32 \rightarrow \frac{3 \cdot 32 + 1}{2} = \frac{97}{2} = 48.5 \quad (\text{no entero})$$

Esto indica que algunos valores de k generan tramos cortos, dependiendo de m .

6 Problemas resueltos

- **Término extra en 2186:** Inicialmente, se pensó que 127 no debía estar en $[2186, 1457, 971, 647, 431, 287, 191, 127]$. Se aclaró que 127 ($k = 64, 2k - 1 = 127$) es correcto, generando el tramo directo completo hasta 2186.
- **Secuencia corta para 14762:** Se esperaba una secuencia larga $([14762, 9842, \dots, 256])$, pero se confirmó que $[14762, 9841]$ es correcto con $\frac{2n_i-1}{3}$.
- **Fórmula del tramo:** La fórmula $a_{n+1} = a_n + k \left(\frac{3}{2}\right)^n$ no coincidió con $\frac{3n_i+1}{2}$, pero los resultados usaron las reglas estándar.

7 Código PHP

El código final implementa:

- **Opción 1: Número par directo:**

- Ingresa n_0 (par, 2 a 1,000,000).
- Calcula la secuencia inversa con $\frac{2n_i-1}{3}$.
- Ejemplo: $n_0 = 512$:

[512, 341, 227, 151], 4 pasos

- **Opción 2: n, m :**

- Ingresa n (0 a 20), m (1 a 100).
- Calcula $k = 2^n \cdot (2m - 1)$.
- Genera el tramo directo hasta el primer par.
- Calcula la secuencia inversa desde el par.
- Ejemplo: $n = 0, m = 96$:

Directa : [191, 287, 431, 647, 971, 1457, 2186], 7 pasos

Inversa : [2186, 1457, 971, 647, 431, 287, 191, 127], 8 pasos

- **Límite:** 100 términos.
- **Validaciones:** n_0 par, $n \leq 20, m \leq 100$.

8 Conclusión

El método genera tramos directos desde $k = 2^n \cdot (2m - 1)$, con una estructura de impares y un par final, y secuencias inversas que retroceden desde el par. El código PHP calcula estas secuencias correctamente, resolviendo confusiones sobre términos finales y longitudes. La colaboración aclaró que [2186, ..., 127] y [14762, 9841] son válidos, alineándose con las reglas directa e inversa.