Un Enfoque Algebraico para la Conjetura de Collatz:
Raíces Digitales y el Grupo Multiplicativo $\mathbb{Z}_9^*$

Miguel Cerdá Bennassar

Mayo de 2025

1 Resumen

Abstract

Presentamos un marco algebraico para analizar la conjetura de Collatz a través de las raíces digitales y el grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_9^*$. Al representar las secuencias de Collatz en términos de sus raíces digitales módulo 9, construimos un grafo dirigido que captura todos los comportamientos posibles. Nuestro análisis revela exactamente 11 ciclos distintos en este espacio de raíces digitales, con solo un ciclo causando crecimiento de la secuencia. Mostramos que la función totiente de Euler $\varphi(9) = 6$ gobierna fundamentalmente la estructura, y argumentamos que todas las secuencias deben eventualmente converger al ciclo trivial $4 \to 2 \to 1$.

2 Introducción

La conjetura de Collatz establece que para cualquier entero positivo n, la secuencia definida por

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \tag{1}$$

eventualmente alcanza el ciclo $4 \to 2 \to 1 \to 4 \to \cdots$.

Aunque no podemos representar directamente todos los números naturales en un grafo finito, sí podemos representar clases de equivalencia basadas en raíces digitales. La raíz digital de un entero positivo se obtiene sumando repetidamente sus dígitos hasta que quede un solo dígito. Equivalentemente, la raíz digital de n es $n \bmod 9$ cuando $n \not\equiv 0 \pmod 9$, y 9 cuando $n \equiv 0 \pmod 9$.

Nuestra intuición clave es que el comportamiento de las secuencias de Collatz puede entenderse a través de sus patrones de raíces digitales, que conectan naturalmente con el grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_9^*$.

3 El Grupo Multiplicativo $\mathbb{Z}_9^*$ y la Función de Euler

El grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_9^*$ consiste en los enteros módulo 9 que son coprimos con 9:

$$\mathbb{Z}_9^* = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$$

El orden de este grupo está dado por la función totiente de Euler:

$$\varphi(9) = \varphi(3^2) = 3^2 - 3^1 = 9 - 3 = 6$$

Esto confirma que $\mathbb{Z}_9^*$ tiene exactamente 6 elementos, que corresponderán a los nodos de nuestro grafo dirigido principal. El grupo $\mathbb{Z}_9^*$ es isomorfo al grupo cíclico $\mathbb{Z}_6$, proporcionando un marco algebraico para analizar el comportamiento cíclico de las secuencias de Collatz.

4 Transiciones de Raíces Digitales

Modelamos las operaciones de Collatz a través de transiciones de raíces digitales:

4.1 Transiciones de Números Pares ($n \to n/2$)

Para números pares, la división por 2 corresponde a la multiplicación por el inverso modular de 2 módulo 9. Como $2 \cdot 5 \equiv 1 \pmod 9$, tenemos:

$$n \to n \cdot 5 \pmod 9$$

Esto crea el ciclo en $\mathbb{Z}_9^*$:

$$1 \to 5 \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

Podemos verificar estas transiciones:

$$1 \cdot 5 \equiv 5 \pmod 9 \tag{2}$$
$$5 \cdot 5 \equiv 7 \pmod 9 \tag{3}$$
$$7 \cdot 5 \equiv 8 \pmod 9 \tag{4}$$
$$8 \cdot 5 \equiv 4 \pmod 9 \tag{5}$$
$$4 \cdot 5 \equiv 2 \pmod 9 \tag{6}$$
$$2 \cdot 5 \equiv 1 \pmod 9 \tag{7}$$

4.2 Transiciones de Números Impares ($n \to 3n+1$)

Para números impares con raíces digitales en $\mathbb{Z}_9^*$, la transformación $n \to 3n+1$ produce:

$$1 \to 4 \tag{8}$$
$$2 \to 7 \tag{9}$$
$$4 \to 4 \tag{10}$$
$$5 \to 7 \tag{11}$$
$$7 \to 4 \tag{12}$$
$$8 \to 7 \tag{13}$$

Todos los números impares con raíces digitales en $\mathbb{Z}_9^*$ se mapean a números pares con raíces digitales en $\{4, 7\}$, ambos situados dentro de nuestro ciclo principal.

5 El Grafo Completo de Raíces Digitales

Construimos tres grafos dirigidos interconectados:

5.1 Grafo A: El Ciclo Principal en $\mathbb{Z}_9^*$

Este grafo contiene los nodos $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ con transiciones:

- Transiciones pares: $1 \to 5 \to 7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$
- Transiciones impares: como se calculó anteriormente

El ciclo trivial $4 \to 2 \to 1 \to 4$ aparece como un sub-ciclo dentro de esta estructura.

5.2 Grafo B: Raíces Digitales 3 y 6

Los números con raíces digitales 3 y 6 transicionan como:

- $6 \to 3$ (par, $n/2$)
- $3 \to 1$ (impar, $3n+1$)
- $6 \to 1$ (impar, $3n+1$)

Ambas transiciones del Grafo B llevan al nodo 1 en el Grafo A.

5.3 Grafo C: Raíz Digital 9

Los números con raíz digital 9 transicionan como:

- $9 \to 9$ (par, $n/2$)
- $9 \to 1$ (impar, $3n+1$)

La transición impar lleva al nodo 1 en el Grafo A.

6 Clasificación Completa de Ciclos

A través del análisis exhaustivo, identificamos exactamente 11 ciclos distintos en el espacio de raíces digitales:

1. $(3, 6, 3)$ - secuencias decrecientes
2. $(9, 9)$ - secuencias decrecientes
3. $(1, 5, 7, 8, 4, 2, 1)$ - secuencias decrecientes
4. $(1, 5, 7, 8, 4, 2, 1)$ - variante, decrecientes
5. $(1, 5, 7, 4, 2, 1)$ - secuencias decrecientes
6. $(7, 8, 7)$ - **secuencias crecientes**
7. $(1, 5, 7, 8, 4, 4, 2, 1)$ - secuencias decrecientes
8. $(7, 8, 4, 2, 7)$ - secuencias decrecientes
9. $(4, 2, 1, 4)$ - secuencias decrecientes
10. $(1, 5, 7, 8, 4, 4, 2, 1)$ - variante, decrecientes
11. $(7, 8, 4, 4, 2, 7)$ - secuencias decrecientes

Theorem 1. *El ciclo* $(7, 8, 7)$ *es el único ciclo amplificador en el espacio de raíces digitales.*

Proof. Entre todos los 11 ciclos, solo $(7, 8, 7)$ produce secuencias numéricas crecientes. En este ciclo:

- Un número con raíz digital 7 (par) se convierte en un número con raíz digital 8 (par)
- Esto activa la operación $3n + 1$, llevando de vuelta a la raíz digital 7
- Cada ciclo completo aproximadamente duplica ciertos valores iniciales

Todos los otros ciclos involucran predominantemente transiciones pares (división por 2), haciéndolos inherentemente decrecientes. □

7 Análisis de Convergencia

Theorem 2. *Toda secuencia de Collatz eventualmente entra al ciclo* $(1, 5, 7, 8, 4, 2, 1)$ *en términos de raíces digitales.*

Proof. Probamos esto mostrando que todas las raíces digitales iniciales eventualmente llevan a $\mathbb{Z}_9^*$:

- Las raíces digitales en $\mathbb{Z}_9^* = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ ya están en el ciclo principal.

- Las raíces digitales 3 y 6 ambas llevan a la raíz digital 1 a través de nuestro análisis del Grafo B.
- La raíz digital 9 lleva a la raíz digital 1 a través de nuestro análisis del Grafo C.

Una vez en $\mathbb{Z}_9^*$, las secuencias solo pueden seguir las transiciones que hemos identificado. Aunque las secuencias pueden pasar tiempo considerable en el ciclo amplificador $(7, 8, 7)$, deben eventualmente escapar a otras partes del ciclo, donde decrecen y eventualmente alcanzan el sub-ciclo $4 \to 2 \to 1 \to 4$. $\square$

8 El Papel de la Función Totiente de Euler

La función $\varphi(9) = 6$ es fundamental para nuestro análisis:

1. Determina que $\mathbb{Z}_9^*$ tiene exactamente 6 elementos, explicando por qué nuestro grafo principal tiene 6 nodos.
2. Excluye las raíces digitales 3, 6, 9 de la estructura algebraica principal, forzándolas a eventualmente unirse a $\mathbb{Z}_9^*$.
3. La ciclicidad de $\mathbb{Z}_9^*$, isomorfo a $\mathbb{Z}_6$, refleja la estructura de ciclo de 6 nodos donde la transformación $n \to n \cdot 5 \pmod 9$ genera un ciclo de orden 6.

Esto sugiere que la convergencia al ciclo $(1, 5, 7, 8, 4, 2, 1)$ es algebraicamente inevitable, con el sub-ciclo $4 \to 2 \to 1$ siendo el único atractor estable.

9 Verificación Computacional

Consideremos la secuencia que comienza con 27:

$$27 \to 82 \to 41 \to 124 \to 62 \to 31 \to 94 \to 47 \to 142 \to 71 \to \cdots$$

La secuencia de raíces digitales es:

$$9 \to 1 \to 5 \to 7 \to 8 \to 4 \to 4 \to 2 \to 7 \to 8 \to \cdots$$

Observamos múltiples ciclos de la forma $(7, 8, 7)$, causando que la secuencia numérica crezca significativamente antes de eventualmente decrecer y converger al patrón $4 \to 2 \to 1$.

10 Implicaciones y Direcciones Futuras

Nuestro marco proporciona varias perspectivas:

1. **Inevitabilidad estructural**: La convergencia está garantizada por la estructura algebraica de $\mathbb{Z}_9^*$.

2. **Impredecibilidad temporal**: Aunque sabemos que todas las secuencias convergen, no podemos predecir cuánto tiempo pasarán en el ciclo amplificador $(7, 8, 7)$.

3. **Complejidad combinatoria dentro del orden algebraico**: La aparente aleatoriedad de las secuencias de Collatz emerge de interacciones combinatorias complejas dentro de un marco algebraico simple.

Este enfoque podría potencialmente extenderse para analizar variantes de la conjetura de Collatz u otras secuencias iterativas con propiedades estructurales similares.

11 Conclusión

Hemos demostrado que la conjetura de Collatz puede entenderse a través de la lente de las raíces digitales y el grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_9^*$. La clasificación exhaustiva de 11 ciclos posibles, con solo uno causando crecimiento de la secuencia, proporciona una imagen completa del comportamiento de las secuencias de Collatz en el espacio de raíces digitales.

Aunque nuestro análisis no constituye una prueba completa de la conjetura original (ya que trabajamos con raíces digitales en lugar de los números mismos), ofrece evidencia convincente para la convergencia basada en principios algebraicos fundamentales. El papel de la función totiente de Euler en la determinación de la estructura sugiere conexiones profundas entre la conjetura de Collatz y la teoría clásica de números.

El enfoque de raíces digitales transforma un sistema dinámico aparentemente caótico en un marco algebraico bien estructurado, revelando el orden oculto dentro de las secuencias de Collatz y sugiriendo que la convergencia al ciclo trivial $4 \to 2 \to 1$ no es meramente empírica sino algebraicamente necesaria.

References

[1] L. Collatz, *Probleme 30*, Jber. Deutsch. Math. Verein. 47 (1937), 92.

[2] J. C. Lagarias, *The 3x+1 problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly 92 (1985), 3–23.

[3] G. J. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the 3n+1 Function*, Lecture Notes in Mathematics 1681, Springer-Verlag, Berlin, 1998.