XIV. LA CONJETURA DE COLLATZ.
Orden y armonía en los números de las secuencias.

Miguel Cerdá Bennassar – Junio 2021.

La raíz digital de un número es el valor que resulta de sumar todos los dígitos del número y los resultados sucesivos, hasta obtener un solo dígito. Por lo que las raíces digitales de los números en base 10 son los valores del 1 hasta el 9.

Como ejemplo, para calcular la raíz digital del número 458:
La suma de sus dígitos es 4+5+8=17 y 1+7=8. La raíz digital del número 458 es 8.

Propiedades de la raíz digital:

- Multiplicando cualquier número por 9, la raíz digital siempre será 9.
- Sumando 9 a cualquier número, no cambiará su raíz digital.
- Dividiendo cualquier número entre 9, la raíz digital del número será el resto.

Cuando sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos, las raíces digitales de los números también son sumadas, restadas, multiplicadas y divididas, respectivamente y la raíz digital puede ser utilizada para comprobar el resultado de la operación.

Ejemplos:

Sumando 456+786+34=1276 → raíz digital 6+3+7=16, 1+6=7 y la raíz digital de 1276 es 7.
Restando 3465-670=2795 → raíz digital 9-4=5 y la raíz digital de 2795 es 5.
Multiplicando 879x52=45708 → raíz digital 6x7=42, 4+2=6 y la raíz digital de 45708 es 6.
Dividiendo 89408:22=4064 → raíz digital 2:4=0.5, 0+5=5 y la raíz digital de 4064 es 5.

También con operaciones mixtas:

Sumando y restando 675+57-14=718 → raíz digital 9+3-5=7 y la raíz digital de 718 es 7.
Multiplicando y sumando 52x37+17=1941 → raíz digital 7x1+8=6 y raíz digital de 1941 es 6.
Multiplicando, sumando y dividiendo (3x153+1)/2=230 → (3x9+1)/2=5

La prueba del 9, para la verificación del producto de dos números, se basa en la raíz digital y consiste en la afirmación que la raíz digital del producto de dos números es la misma que el producto de las raíces digitales de los dos números. Ejemplo: 356x27=9612. Las raíces digitales: 3+5+6=14, 1+4=5 y 2+7=9. El producto es 5x9=45 y 4+5=9 y 9 es la raíz digital de 9612.

En esta tabla, los números naturales colocados en filas, según su raíz digital:

1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154	163	172	181	190	199	208	217	226	235	244	253	262	271	280	289	298	307	316	325	334	343	352	. . .
2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173	182	191	200	209	218	227	236	245	254	263	272	281	290	299	308	317	326	335	344	353	. . .
3	12	21	30	39	48	57	66	75	84	93	102	111	120	129	138	147	156	165	174	183	192	201	210	219	228	237	246	255	264	273	282	291	300	309	318	327	336	345	354	. . .
4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	229	238	247	256	265	274	283	292	301	310	319	328	337	346	355	. . .
5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	185	194	203	212	221	230	239	248	257	266	275	284	293	302	311	320	329	338	347	356	. . .
6	15	24	33	42	51	60	69	78	87	96	105	114	123	132	141	150	159	168	177	186	195	204	213	222	231	240	249	258	267	276	285	294	303	312	321	330	339	348	357	. . .
7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205	214	223	232	241	250	259	268	277	286	295	304	313	322	331	340	349	358	. . .
8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	188	197	206	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296	305	314	323	332	341	350	359	. . .
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270	279	288	297	306	315	324	333	342	351	360	. . .

Los números naturales en el conjunto A, con nueve subconjuntos divididos en tres grupos, a, b y c. Los elementos de los subconjuntos están agrupados según el valor de su raíz digital, rd(n).

A = {rd(9),rd(3),rd(6),rd(5),rd(7),rd(8),rd(4),rd(2),rd(1)}

Grupo a: rd(9) = {9,18,27,36,45, …}

Grupo b: rd(3) = {3,12,21,30,39, …}
rd(6) = {6,15,24,33,42, …}

Grupo c: rd(5) = {5,14,23,32,41, …}
rd(7) = {7,16,25,34,43, …}
rd(8) = {8,17,26,35,44, …}
rd(4) = {4,13,22,31,40, …}
rd(2) = {2,11,20,29,38, …}
rd(1) = {1,10,19,28,37, …}

Si a cualquier elemento de los 9 subconjuntos le aplicamos una o más de las operaciones básicas de la aritmética, el resultado es un elemento de otro subconjunto y si a cada nuevo elemento le aplicamos la misma operación, formamos una sucesión que será infinita o acotada, según las operaciones aplicadas.
El nuevo elemento obtenido puede pertenecer al mismo subconjunto, pero solo si la operación aplicada es sumar un múltiplo de 9 o si el elemento es del subconjunto rd(9).

Podemos formar una secuencia infinita, multiplicando por 2 a un primer elemento y sucesivamente a cada resultado obtenido. Un ejemplo empezando con el número 13: 2*13=26, 2*26=52, 2*52=104, 2*104=208, 2*208=416, . . . Si sustituimos los elementos por la raíz digital de cada uno de ellos, la sucesión es: 4, 8, 7, 5, 1, 2, . .

Si la operación que vamos a aplicar es sumar 6 al primer elemento:
6+13=19, 6+19=25, 6+25=31, 6+31=37, 6+37=43, . . .
y la sucesión de las raíces digitales de los elementos es: 4, 1, 7, 4, 1, 7, . . .

Aplicando a los elementos una operación de sustracción o división, las secuencias serán acotadas.

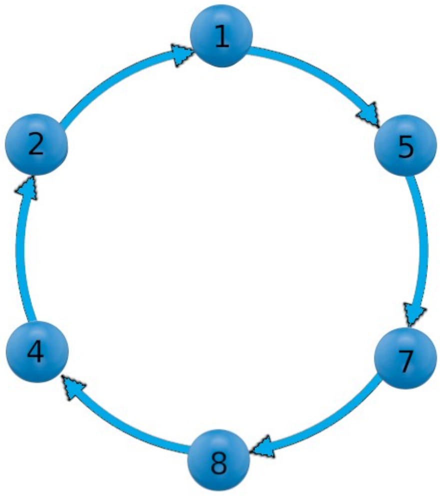
Si dividimos entre 2 a los elementos pares y multiplicamos por 2 a los elementos impares, una sucesión empezada con el elemento 34 sería: 34/2=17, 2*17=34, 34/2=17, . . . Los elementos 34 y 17 se repiten de manera infinita. Las raíces digitales: 7, 8, 7, 8, . . .

Si a los elementos impares, además de multiplicarlos por 2, le sumamos 1 al resultado, la misma secuencia sería: 34/2=17, 2*17+1=35, 2*35+1=71, 2*71+1=143, . . . una progresión infinita de elementos impares. Las raíces digitales: 7, 8, 8, 8, 8, . . .

Si dividimos entre 2 a los elementos pares y a los impares los multiplicamos por 3 y le sumamos 1 al resultado, la secuencia obtenida es:
34/2=17, 3*17+1=52, 52/2=26, 26/2=13, 3*13+1=40, 40/2=20, 20/2=10, 10/2=5, 3*5+1=16, 16/2=8, 8/2=4, 4/2=2, 2/2=1, 3*1+1=4, 4/2=2, 2/2=1, . . .
La sucesión de sus raíces digitales: 7, 8, 7, 8, 4, 4, 2, 1, 5, 7, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, .. . los últimos elementos 4, 2, 1 se repiten de manera infinita.
Según la Conjetura de Collatz, esto ocurre con cualquier sucesión obtenida con estas dos operaciones.

La conjetura de Collatz y la raíz digital de los números de las secuencias.

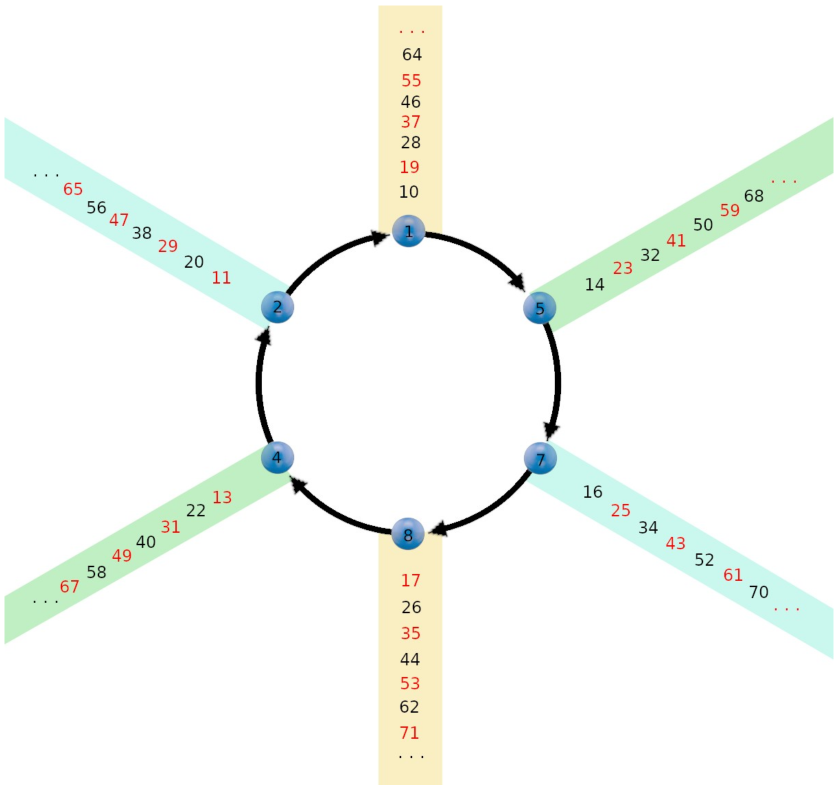
El siguiente anagrama representa los valores de las raíces digitales de los números de los grupos 1, 4, 7 y 2, 5, 8 y sus transformaciones al ser divididos entre 2.



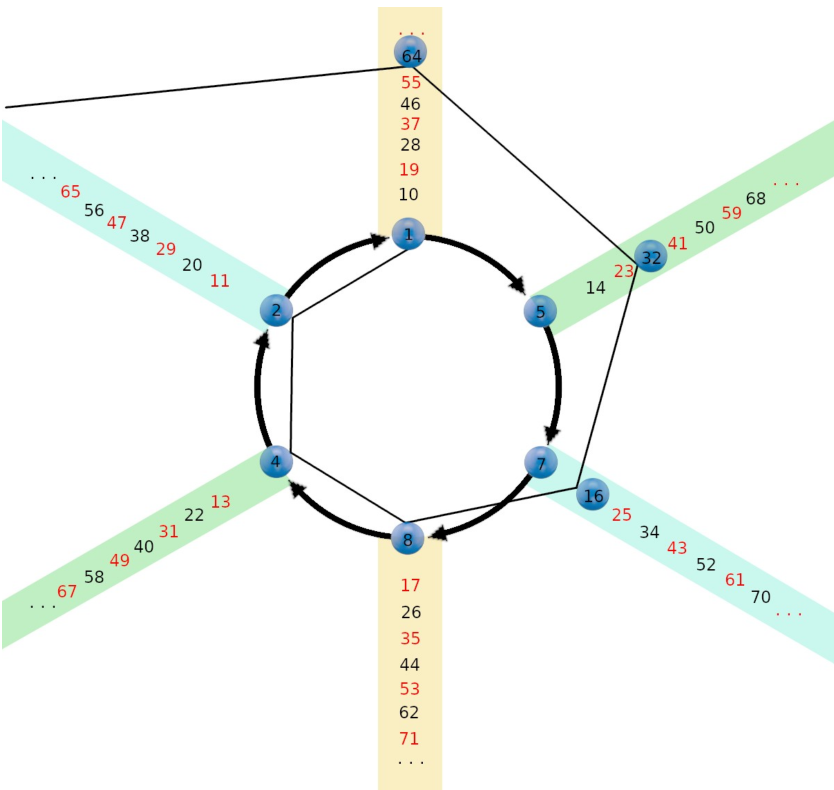
Ejemplo:

10000 : 2 = 5000	raíz digital 1 : 2 = 0.5 = 5
5000 : 2 = 2500	raíz digital 5 : 2 = 2.5 = 7
2500 : 2 = 1250	raíz digital 7 : 2 = 3.5 = 8
1250 : 2 = 625	raíz digital 8 : 2 = 4
625 : 2 = 312.5	raíz digital 4 : 2 = 2
312.5 : 2 = 156.25	raíz digital 2 : 2 = 1

El mismo anagrama con algunos de los números de cada grupo:



La trayectoria de los números 2^n al ser sometidos a sucesivas divisiones entre 2. hasta llegar al 1:



En el anagrama anterior, según la tabla de los niveles, el número 64 está en el nivel 8, el número 32 en el nivel 4, el número 16 en el nivel 2 y los números 8, 4, 2 y 1 en el nivel 1.

Según su raíz digital, los números se agrupan en tres grupos con los siguientes valores: (1-4-7), (2-5-8) y (3-6-9).

En la siguiente tabla, los niveles (n) de los números de los grupos (1, 4, 7) y (2, 5, 8), en color negro los pares y en rojo los impares.

		n		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	. . .
9n-1				8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	188	197	206	215	224	. . .
9n-5				4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	. . .
9n-7				2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173	182	191	200	209	218	. . .
9n-8				1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154	163	172	181	190	199	208	217	. . .
9n-4				5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	185	194	203	212	221	. . .
9n-2				7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205	214	223	. . .

Los números del grupo (3, 6, 9) no están en la tabla, porque no intervienen como elementos de las secuencias de Collatz, si bien pueden estar al inicio, hasta que el primer número impar es multiplicado por 3.