Patrones y Propiedades de las Diferencias entre Potencias Consecutivas.

Miguel Cerdá Bennassar.

Este estudio examina los patrones que emergen al analizar las diferencias entre potencias consecutivas de números naturales. A través de la observación de secuencias numéricas y el desarrollo algebraico, identificamos fórmulas generales que describen estas diferencias y exploramos sus propiedades matemáticas.

Diferencias entre Números Consecutivos

n		0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		55
			1		1		1		1		1		1		1		1		1		1			10

Para números naturales consecutivos, la diferencia siempre es constante: (n + 1) − n = 1
Esto establece el caso base para nuestro estudio y representa la diferencia de primer orden.

Diferencias entre Cuadrados Consecutivos

n				1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		55
n^2				1		4		9		16		25		36		49		64		81		100		385
			1		3		5		7		9		11		13		15		17		19			100
		2		2		2		2		2		2		2		2		2		2				20

Al analizar la diferencia entre cuadrados de números consecutivos:
$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
Observamos que la diferencia sigue un patrón lineal que depende de n. Esta secuencia genera los números impares: 3, 5, 7, 9, 11, ...

$$(n+1)^2 = n^2 + (2n-1) + 2$$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

Diferencias entre Cubos Consecutivos

n				1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
n^3				1		8		27		64		125		216		343		512		729		1000	
			1		7		19		37		61		91		127		169		217		271		
		0		6		12		18		24		30		36		42		48		54			
	6		6		6		6		6		6		6		6		6		6				

Para potencias de orden 3 (cubos):
(n + 1)3 − n3 = n3 + 3n2 + 3n + 1 − n3 = 3n2 + 3n + 1
La diferencia es ahora un polinomio cuadrático en términos de n.

$(n+1)^3 \;=\; n^3 + [(n^3 - (n-1)^3] + 6(n-1) + 6$

$(n+1)^3 \;=\; n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$(n+1)^3 - n^3 \;=\; 3n^2 + 3n +1$

0		0																	
			1																
1		1		6															
			7		6														
2		8		12		0													
			19		6		0												
3		27		18		0		0											
			37		6		0		0										
4		64		24		0		0		0									
			61		6		0		0		0								
5		125		30		0		0		0		0							
			91		6		0		0		0								
6		216		36		0		0		0									
			127		6		0		0										
7		343		42		0		0											
			169		6		0												
8		512		48		0													
			217		6														
9		729		54															
			271																
10		1000																	

El cubo de un número impar siempre es impar. El cubo de un número par siempre es par. La diferencia entre cubos consecutivos siempre es impar.

Diferencias entre Potencias de Orden 4

n				1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		
n^4				1		16		81		256		625		1296		2401		4096		6561		10000		25333
			1		15		65		175		369		671		1105		1695		2465		3439			10000
		2		14		50		110		194		302		434		590		770		974				3440
	-12		12		36		60		84		108		132		156		180		204					960
24		24		24		24		24		24		24		24		24		24						240

Continuando con potencias de orden 4:
(n + 1)4 − n4 = 4n3 + 6n2 + 4n + 1
Ahora la diferencia es un polinomio cúbico.

$n^4 = (n-1)^4 + [(n-1)^4-(n-2)^4] + [(n-1)^4-(n-2)^4-(n-2)^4-(n-3)^4] + 12(n-2)^2 - 12(n-3)^2 + 24$

$n^4 = 3(n-1)^4 - 3(n-2)^4 + (n-3)^4 + 12(n-2)^2 - 12(n-3)^2 + 24$

$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n$ $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$