Explorando una Familia de Secuencias Numéricas con Convergencia Parametrizada

Miguel Cerdá Bennassar

4 de junio de 2025

1. Introducción

Durante mi exploración personal de secuencias numéricas inspiradas en la famosa Conjetura de Collatz, me he topado con algo que me parece fascinante. Mientras que la secuencia de Collatz clásica usa las mismas reglas para todos los números (dividir por 2 si es par, multiplicar por 3 y sumar 1 si es impar), he descubierto que es posible crear familias de secuencias donde las reglas cambian según el ciclo al que queremos que converjan.

Lo que más me llama la atención es que estas secuencias no solo convergen de manera predecible, sino que además mantienen propiedades aritméticas muy especiales, particularmente en lo que respecta a las raíces digitales de sus términos.

2. Definición de las Funciones

He logrado identificar dos patrones principales para construir estas funciones, dependiendo de si el ciclo objetivo comienza con un número par o impar.

2.1. Para ciclos que inician con número par

Para ciclos como $12 \to 6 \to 3$, $14 \to 8 \to 5$, etc., las funciones toman la forma:

$$f_{\text{par}}(n) = \frac{n}{2} + k \tag{1}$$

$$f_{\text{impar}}(n) = 3n - k' \tag{2}$$

donde las constantes se calculan a partir del primer número del ciclo N_{par}:

$$k = \frac{N_{\text{par}} - 12}{2} \tag{3}$$

$$k' = 2(N_{\text{par}} - 12) - 3 \tag{4}$$

Ejemplo: Para el ciclo $16 \to 10 \to 7$ (donde $N_{\text{par}} = 16$):

$$k = \frac{16 - 12}{2} = 2 \tag{5}$$

$$k' = 2(16 - 12) - 3 = 5 \tag{6}$$

Por tanto: $f_{\text{par}}(n) = \frac{n}{2} + 2$ y $f_{\text{impar}}(n) = 3n - 5$

2.2. Para ciclos que inician con número impar

Para ciclos como $13 \to 7 \to 4$, $15 \to 9 \to 6$, etc., las funciones se definen como:

$$f_{\text{par}}(n) = 3n - k'' \tag{7}$$

$$f_{\text{impar}}(n) = \frac{n + k'''}{2} \tag{8}$$

donde:

$$k'' = 2(N_{\text{impar}} - 13) - 1 \tag{9}$$

$$k''' = (N_{\text{impar}} - 13) + 1 \tag{10}$$

Ejemplo: Para el ciclo $11 \to 5 \to 2$ (donde $N_{\text{impar}} = 11$):

$$k'' = 2(11 - 13) - 1 = -5 \tag{11}$$

$$k''' = (11 - 13) + 1 = -1 \tag{12}$$

Por tanto: $f_{\text{par}}(n) = 3n + 5$ y $f_{\text{impar}}(n) = \frac{n-1}{2}$

3. Tabla de Ciclos Verificados

He verificado la existencia de varios ciclos usando estas reglas. La siguiente tabla resume mis hallazgos:

Ciclo	**Función para pares**	**Función para impares**
$10 \to 4 \to 1$	$\frac{n}{2} - 1$	$3n + 7$
$11 \to 5 \to 2$	$3n + 5$	$\frac{n-1}{2}$
$12 \to 6 \to 3$	$\frac{n}{2}$	$3n + 3$
$13 \to 7 \to 4$	$3n + 1$	$\frac{n+1}{2}$
$14 \to 8 \to 5$	$\frac{n}{2} + 1$	$3n - 1$
$15 \to 9 \to 6$	$3n - 3$	$\frac{n+3}{2}$
$16 \to 10 \to 7$	$\frac{n}{2} + 2$	$3n - 5$
$17 \to 11 \to 8$	$3n - 7$	$\frac{n+5}{2}$
$18 \to 12 \to 9$	$\frac{n}{2} + 3$	$3n - 9$
$19 \to 13 \to 10$	$3n - 11$	$\frac{n+7}{2}$

4. Propiedades de las Raíces Digitales

Una propiedad que me resulta especialmente intrigante es el comportamiento de las raíces digitales. Para cualquier número n, su raíz digital se obtiene sumando repetidamente sus dígitos hasta obtener un solo dígito.

He observado que en cada secuencia generada, todos los términos tienen raíces digitales que coinciden únicamente con las de los dos últimos términos del ciclo objetivo.

Ejemplo: Para el ciclo $16 \to 10 \to 7$:

- Raíz digital de 16: $1 + 6 = 7$
- Raíz digital de 10: $1 + 0 = 1$
- Raíz digital de 7: 7

Por tanto, todos los términos de cualquier secuencia que converja a este ciclo tendrán raíz digital 1 o 7 exclusivamente.

5. El Caso Especial del Ciclo $4 \to 2 \to 5$

Un hallazgo particularmente interesante surgió al intentar aplicar mis fórmulas al ciclo clásico de Collatz $4 \to 2 \to 1$. Las fórmulas predicen:

Para $N_{\text{par}} = 4$:

$$k = \frac{4 - 12}{2} = -4 \tag{13}$$

$$k' = 2(4 - 12) - 3 = -19 \tag{14}$$

Esto genera las funciones:

$$f_{\text{par}}(n) = \frac{n}{2} - 4 \tag{15}$$

$$f_{\text{impar}}(n) = 3n + 19 \tag{16}$$

Curiosamente, estas funciones NO generan el ciclo $4 \to 2 \to 1$, sino que convergen a un ciclo diferente: $4 \to -2 \to -5 \to 4$.

Este es el único ciclo en mi familia que incluye números negativos, lo que lo convierte en un caso especial único.

Ejemplos de convergencia:

- Desde 8: $8 \to 0 \to -4 \to -6 \to -7 \to -2 \to -5 \to 4 \to -2 \to \dots$
- Desde 12: $12 \to 2 \to -3 \to 10 \to 1 \to 22 \to 7 \to 40 \to 16 \to 4 \to -2 \to -5 \to 4 \to \dots$

6. Verificación Modular

Para verificar la consistencia interna de estos ciclos, he empleado aritmética modular, particularmente módulo 9.

Ejemplo para el ciclo $12 \to 6 \to 3$:

Con funciones $f_{\text{par}}(n) = \frac{n}{2}$ y $f_{\text{impar}}(n) = 3n + 3$:

1. Desde 12: $12 \equiv 3 \pmod 9$. Aplicamos $f_{\text{par}}(12) = 6$. $6 \equiv 6 \pmod 9$.
2. Desde 6: $6 \equiv 6 \pmod 9$. Aplicamos $f_{\text{par}}(6) = 3$. $3 \equiv 3 \pmod 9$.
3. Desde 3: $3 \equiv 3 \pmod 9$. Aplicamos $f_{\text{impar}}(3) = 12$. $12 \equiv 3 \pmod 9$.

El patrón modular $3 \to 6 \to 3 \to 3$ es consistente, confirmando la validez interna del ciclo.

7. Reflexiones Finales

Estas secuencias representan una familia de sistemas dinámicos discretos donde la convergencia está garantizada por construcción, a diferencia de la Conjetura de Collatz clásica que sigue sin demostrarse.

El hecho de que el ciclo clásico $4 \to 2 \to 1$ no encaje en estos patrones sugiere que opera bajo principios fundamentalmente diferentes, lo que podría explicar parcialmente por qué ha resultado tan elusivo para los matemáticos.

Con estas secuencias podemos estudiar convergencia, propiedades modulares y comportamiento de raíces digitales en sistemas iterativos, proporcionando insights que podrían ser relevantes para comprender mejor la naturaleza de las secuencias numéricas en general.

El caso único del ciclo $4 \to -2 \to -5$ con elementos negativos sugiere que incluso dentro de familias "bien comportadas", pueden surgir comportamientos inesperados que enriquecen la estructura matemática del sistema.