LA CONJETURA DE COLLATZ interpretada con la teoría de grafos

y las propiedades de la raíz digital de los números: un enfoque analítico.

Miguel Cerdá Bennassar – Febrero de 2023

Resumen

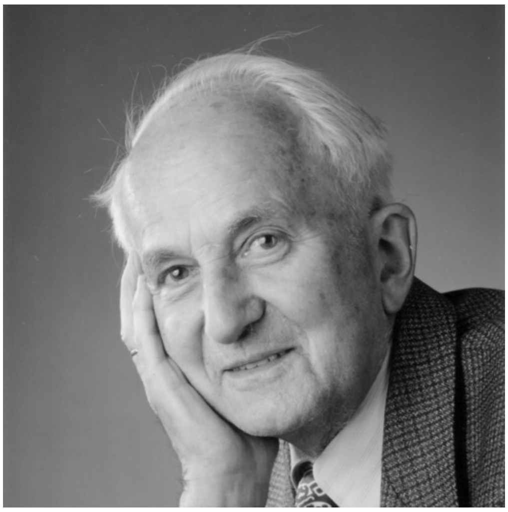
En este escrito presento un estudio del problema de Collatz y su conjetura utilizando la teoría de grafos y las propiedades de la raíz digital de los números naturales.

Palabras clave: Conjetura de Collatz, problema 3n+1, secuencia numérica, sucesión de números, raíz digital, teoría de grafos.

Löthar Collatz *(1910-1990) fue un matemático alemán que investigó principalmente en análisis numérico, con importantes estudios y publicaciones. Estudió en Alemania entre 1928 y 1935 y como era costumbre cursó en diversas universidades: Munich, Göttingen y Berlin.*

La fórmula Collatz-Wielandt para matrices positivas en el teorema de Perron-Frobenius es nombrada en su honor. El artículo de 1957, escrito en conjunto con Ulrich Snogwitz, quien falleciera en el Bombardeo de Darmstadt durante la Segunda Guerra Mundial, creó el campo de la Teoría espectral de grafos.

Desde 1952 hasta su retiro en 1978, Collatz trabajó en la Universidad de Hamburgo, allí fundó el Instituto de Matemática Aplicada en 1953. Luego de su jubilación como profesor emérito, participó activamente en congresos.



Por su gran trabajo le fueron otorgados muchos galardones durante su vida, entre los cuales están:

- *Elegido miembro de la Academia alemana de las ciencias naturales Leopoldina, la Academia de Ciencias del Instituto de Boloña y la Academia de Modena en Italia.*
- *Miembro honorario de la Sociedad Matemática de Hamburgo.*

• Grados honoríficos, otorgados por la Universidad de São Paulo, la Universidad Técnica de Viena, la Universidad de Dundee (Escocia, la Universidad Brunel (Inglaterra), la Universidad de Hannover y la Universidad Politécnica de Dresde.

Lothar Collatz murió inesperadamente, de un ataque al corazón en Varna (Bulgaria), el 26 de septiembre de 1990, mientras asistía a un congreso.

Influenciado por sus profesores Landau y Schur, trató de representar las funciones aritméticas por grafos. Para ello unía $n \to m$ cuando $f(n)=m$ y trató de encontrar funciones simples que dieran lugar a ciclos. Para ello debería tenerse números tal que $f(n)<n$ y otros con $f(m)>m$. Fue de este modo que definió la función que hoy llamamos de Collatz.

Definiciones

La conjetura de Collatz Es un problema matemático no resuelto que plantea lo siguiente: para cualquier número natural, siempre se puede reducir a 1 siguiendo una serie de pasos definidos por operaciones matemáticas. Los pasos se definen de la siguiente manera: si el número es par, se divide entre 2; si es impar, se multiplica por 3 y se suma 1. La conjetura sugiere que, independientemente del número inicial, se llegará eventualmente al número 1 después de un número finito de pasos, entrando en un bucle infinito con los números $4 \to 2 \to 1 \to 4$.

La raíz digital Es un concepto matemático que consiste en sumar los dígitos de un número y luego volver a sumar los dígitos del resultado, y así sucesivamente, hasta obtener un solo dígito. Este último número es la raíz digital del número original. Por ejemplo, el número 123 tiene una raíz digital de 6 (1 + 2 + 3 = 6). Para el número 12345, su raíz digital es 6 (1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, y 1 + 5 = 6).
En la teoría de números, la raíz digital se utiliza para describir la estructura de los números y para investigar sus propiedades. La clasificación de números basada en sus raíces digitales se hace separando los números en diferentes grupos dependiendo de la suma de sus dígitos.
Simplificación: La raíz digital reduce un número a un solo dígito, lo que facilita su comparación y análisis con otros números.
Clasificación: La raíz digital permite clasificar los números en grupos según sus propiedades, lo que facilita la identificación de patrones y relaciones entre ellos.
Modularidad: La raíz digital está estrechamente relacionada con el cálculo módulo 9, lo que permite investigar la estructura de los números y encontrar relaciones y propiedades matemáticas utilizando técnicas de teoría de números.

La teoría de grafos Es una rama de las matemáticas que estudia la relación entre objetos y las conexiones que existen entre ellos. Los objetos se representan como vértices (nodos) y las conexiones se representan como aristas (enlaces) que los conectan.
La teoría de grafos se utiliza en una amplia variedad de campos, incluyendo la informática, la ingeniería, la física, la biología, la sociología, la economía y muchas otras disciplinas.
Algunos de los problemas más importantes que se han resuelto con la teoría de grafos son los siguientes:
El problema del emparejamiento máximo. El problema del viajante de comercio. El problema de flujo máximo. El problema de coloreo de grafos. El problema de la máxima clique.
Estos son solo algunos ejemplos de los problemas que se han resuelto con la teoría de grafos. En general, esta teoría ha sido aplicada en una amplia variedad de campos, incluyendo la informática, la ingeniería, la física, la biología y la economía, entre otros.
En términos más precisos, un grafo es una estructura abstracta que consta de un conjunto de vértices (nodos) y un conjunto de aristas (enlaces) que conectan algunos o todos los vértices. Los grafos se pueden utilizar para representar una amplia variedad de situaciones en la vida real, como redes sociales, mapas de carreteras, circuitos eléctricos, redes de transporte, relaciones entre conjuntos de datos, y mucho más.

Introducción

Conjetura . *Aplicando de forma iterativa la función de Collatz* C *a un número cualquiera llegaremos al número* 1.

$$C(n) \begin{cases} n/2, \text{ si } n \text{ es par} \\ 3n+1, \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Un ejemplo de una secuencia empezada con el número 212:

212, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Si se continúa la secuencia, el 1 itera al 4 y éste al 2 y al 1, entrando en un bucle infinito con estos números.

La misma secuencia, en la que se han sustituido los números por el valor de sus raíces digitales: 5, 7, 8, 7, 8, 4, 2, 1, 5, 7, 8, 4, 2, 1.

Diagrama del desarrollo posible de cualquier secuencia generada por la función de la conjetura de Collatz. Los números naturales se distribuyen en los vértices según su raíz digital y las aristas indican la trayectoria que siguen en sus iteraciones a otros números. (Figura 1)

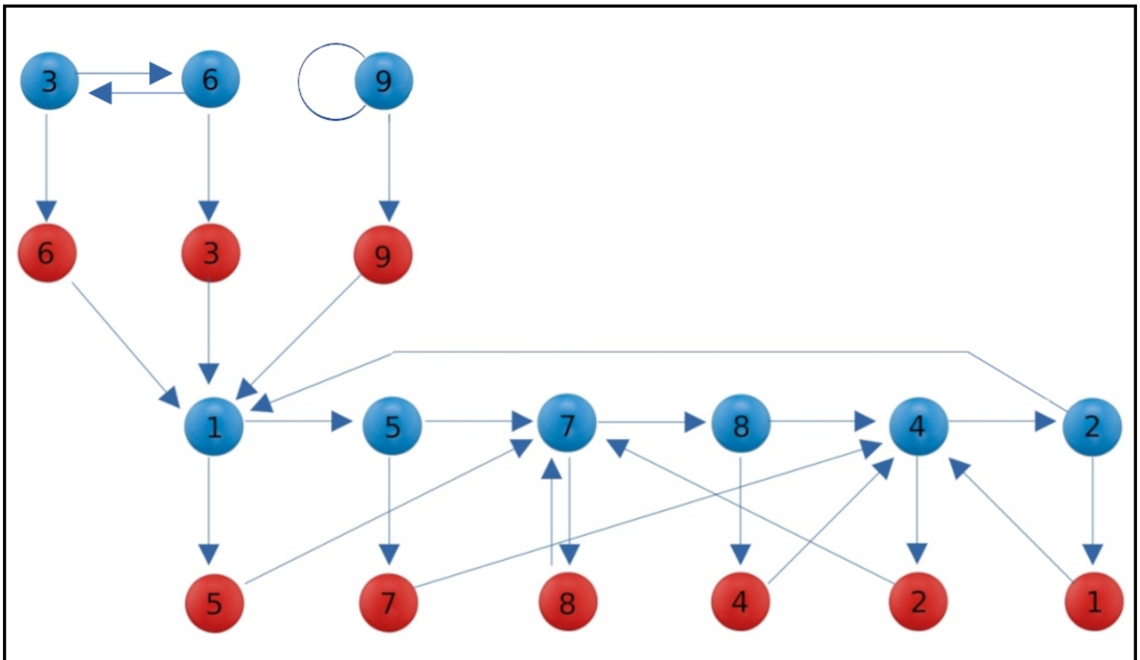


Figura 1

Los números naturales divididos en 9 grupos de números pares (vértices azules) y 9 grupos de números impares (vértices rojos), organizados por el valor de su raíz digital indicado en los vértices.
Las aristas indican el vértice al que pertenece el número obtenido a partir de la iteración del número anterior.

Los números de los vértices 3, 6, 9, 6, 3, 9, después de iterar a números del vértice 1 ya no volverán a salir en la secuencia, por lo que nos enfocaremos en otro diagrama que excluye estos números. (Figura 2)

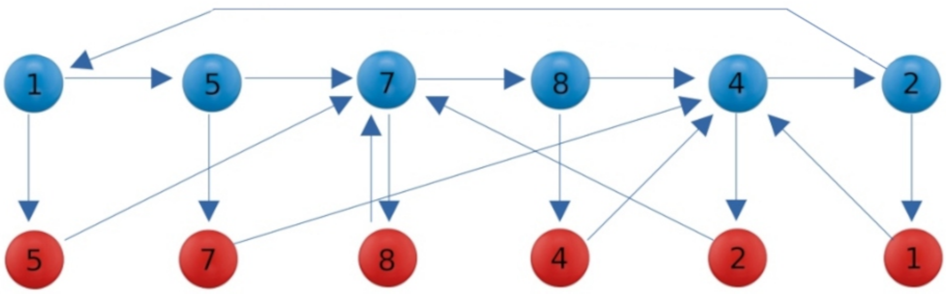


Figura 2

El diagrama presenta una estructura cíclica que inicia y termina en el vértice 1, aunque podría ser cualquier otro vértice (1, 5, 7, 8, 4, 2). Se puede representar el diagrama 3D en la superficie externa de una forma cilíndrica.

Los números de los vértices (5, 7, 8, 4, 2, 1) iteran a números de los vértices (7 y 4), que con un grado de entrada 4 cada uno, salen en las secuencias con mayor frecuencia que los demás números.

En las iteraciones se forman varios ciclos: (7, 8, 7), (7, 8, 4, 2, 7), (4, 2, 1, 4), (4, 2, 7, 8, 4, 4), entre otros posibles, pero el ciclo principal que conduce las secuencias hasta el número 1, es el de los vértices azules de los números pares. (Figura 3)

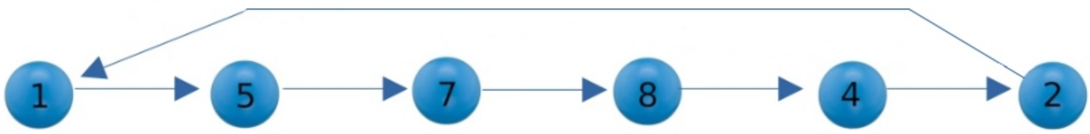


Figura 3

Es lógico asegurar que ciertos números pares recorren este ciclo una o más veces, por ejemplo el número 4096, que lo recorre dos veces.

Otros números, con las inevitables iteraciones con los números impares de los vértices rojos, provocan desorden y ausencia de un patrón aparente en las secuencias, pero el ciclo es el mismo, aunque la secuencia tarde más en su recorrido.

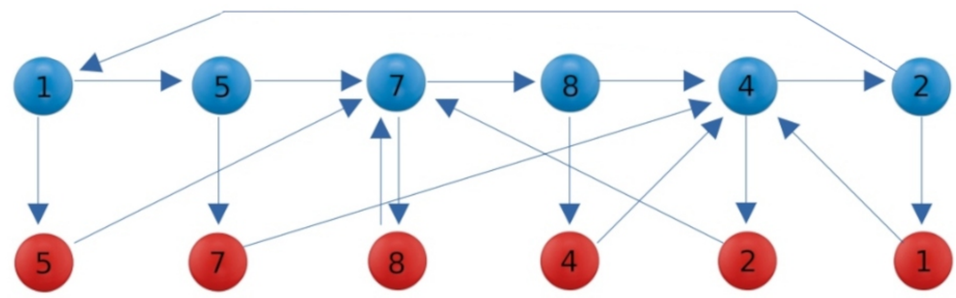


Figura 2

De nuevo la figura 2 para mejor visualización de las siguientes ***afirmaciones:***

1 . *Todos los números pares pueden iterar a números impares y éstos únicamente a números pares de los vértices 7 y 4, por lo que todos los números, en algún momento de la secuencia llegan a estos números.*

2 . *Las iteraciones de los números de los vértices 7 y 4 son: 7 → 8 → 4 → 2.*

Los números del vértice 7 pueden ir a números del vértice 8, que vuelven al vértice 7.
Los números del vértice 8 pueden ir a números del vértice 4, que llegan al vértice 4.
Los números del vértice 4 pueden ir a números del vértice 2, que llegan al vértice 7.

3 . *Todos los números llegan a números del vértice 2.*

4 . *Los números del vértice 2 iteraran a números del vértice 1 y a números del vértice 1.*
Cuando iteran a números del vértice 1, la secuencia puede finalizar llegando al número 1 o iterar a un número del vértice 4, que volverá al vértice 2.
Cuando iteran a números del vértice 1, la secuencia entra en un nuevo ciclo, al final del cual llegará de nuevo a números del vértice 2 y el ciclo se repetirá o la secuencia acabará.

5 . *En cada iteración de un número par, éste se reduce a la mitad, lo que hace que la secuencia sea decreciente en ese punto, por lo que cuantos más vértices de números pares haya con más de una arista entrante, más veces la secuencia pasará por ellos y más decreciente será. Se observa en el diagrama que dichos vértices son el 7 y el 4, cada uno con cuatro aristas entrantes, mientras que los demás vértices solo tienen una arista entrante.*

Los ciclos influyen de forma importante en el desarrollo de una secuencia, siendo necesario resaltar lo siguiente:

Ciclos . *1 . El ciclo principal es el de los vértices (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1).*

2 . Los vértices (7, 8, 7), con un grupo de números pares y un grupo de números impares, hace que la secuencia sea creciente y será más creciente cuanto más tiempo permanezca la secuencia en él.

3 . Los vértices (7, 8, 4, 2, 7), tres grupos de números pares y sólo un grupo de números impares, hace que la secuencia sea decreciente y será más decreciente cuanto más tiempo permanezca la secuencia en él.

4 . Los vértices (4, 2, 1, 4), dos grupos de números pares y sólo un grupo de números impares, hace que la secuencia sea decreciente y será más decreciente cuanto más tiempo permanezca la secuencia en él.

Existen otros ciclos, pero estos son los más importantes y el ciclo de los vértices (7, 8, 7) es determinante en el número de pasos de las secuencias, ya que hace que estas sean crecientes, en la medida del tiempo que se tarda en salir de él.

A continuación, un ejemplo de una secuencia que empieza con el número 511, con los valores de la raíz digital debajo de cada número.

511	1534	767	2302	1151	3454	1727	5182	2591	7774	3887	11662	5831	17494	8747	26242
7	4	2	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7
13121	39364	19682	9841	29524	14762	7381	22144	11072	5536	2768	1384	692	346	173	520
8	7	8	4	4	2	1	4	2	1	5	7	8	4	2	7
260	130	65	196	98	49	148	74	37	112	56	28	14	7	22	11
8	4	2	7	8	4	4	2	1	4	2	1	5	7	4	2
34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1		
7	8	7	8	4	4	2	1	5	7	8	4	2	1		

Los números resaltados en color azul son los tramos más importantes de la secuencia, cuando los números iteran en los ciclos.

Con el número 2302 la secuencia entra en el ciclo (7, 8, 7) y sale con el número 39364 (multiplicidad 7) y en este tramo el crecimiento de la secuencia ha sido muy importante.

La secuencia entra en el ciclo (4, 2, 1, 4) con el número 29524, iterando en él hasta llegar al número 22144. Lo mismo ocurre con el número 148 que llega hasta el número 56. En estos ciclos, la secuencia es decreciente siempre.

El número 1384 entra en el ciclo (7, 8, 4, 2, 7) y sale con el número 98, ocasionando un importante decrecimiento a la secuencia.

Conclusión

La iteración de los números de las secuencias sucede con un patrón bien definido, en el que el valor de su raíz digital sigue estrictamente el orden cíclico presentado en este escrito. Todos los números llegan a otros números pares de raíz digital 2 y después de un número indeterminado de iteraciones y ciclos, finalmente llegarán al número 1.