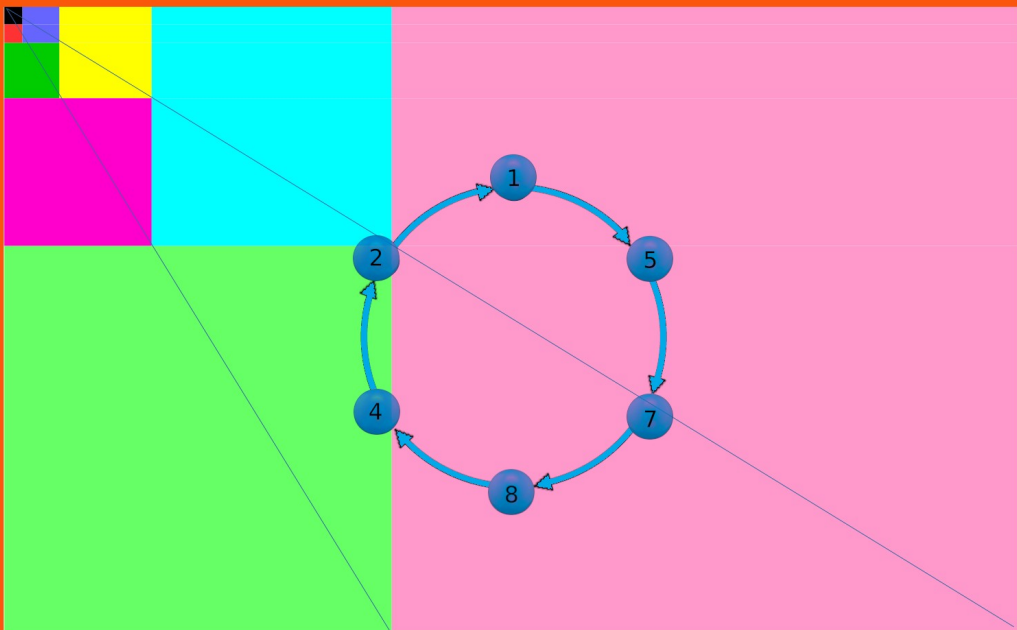
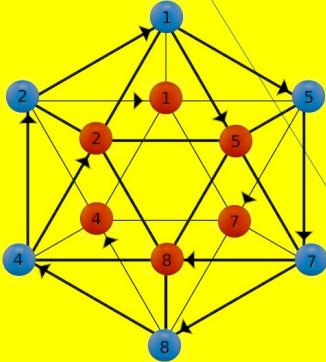


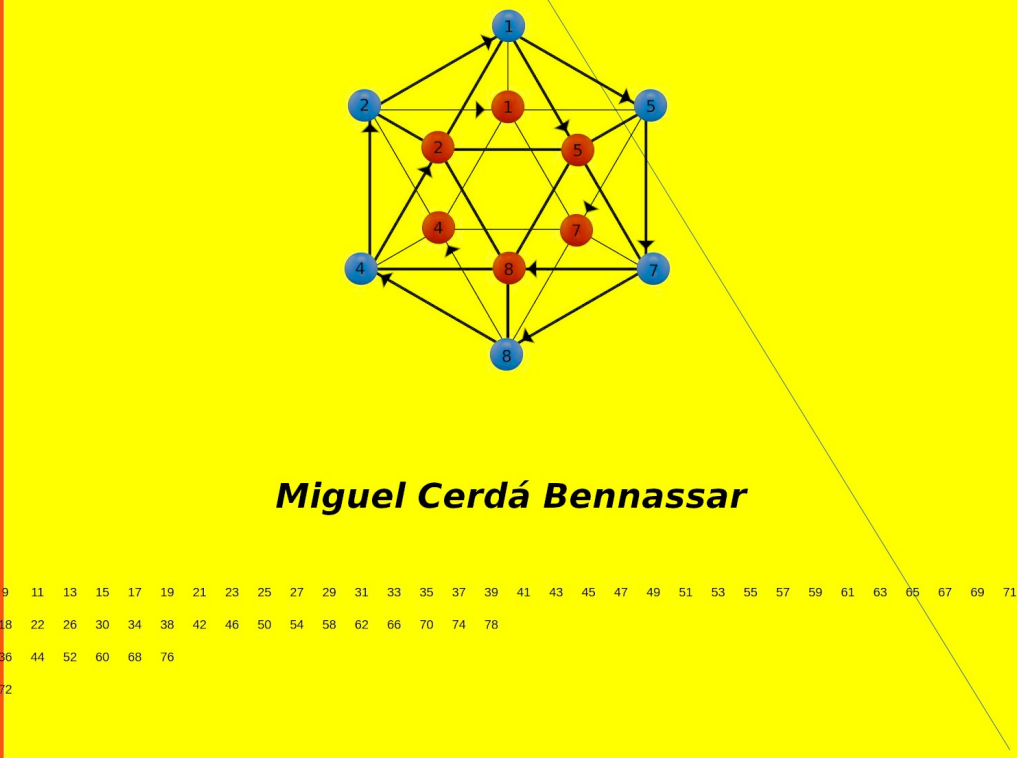


LOGICA IMAGINARIA



Miguel Cerdá Bennassar

9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53 55 57 59 61 63 65 67 69 71
18 22 26 30 34 38 42 46 50 54 58 62 66 70 74 78
36 44 52 60 68 76
72



Miguel Cerdá Bennassar

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78																				
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76																														
8	24	40	56	72																																			
16	48	80																																					
32																																							
64																																							

LOGICA IMAGINARIA

Miquel Cerdà Bennassar

Enero de 2018 – Febrero de 2023

La lógica te llevará de A hasta B, la imaginación te llevará a cualquier parte.

Albert Einstein.

El título "Lógica imaginaria" sugiere la idea de una forma de razonamiento o pensamiento que no necesariamente se apega a la realidad objetiva y que, en cambio, puede explorar mundos imaginarios o posibilidades hipotéticas. Es posible interpretar esto como una invitación a usar la imaginación y la creatividad para explorar nuevos caminos de pensamiento, en lugar de limitarse a las reglas de la lógica formal y la racionalidad convencional.

La ciencia oficial establecida se basa en la lógica y en la evidencia empírica para llegar a conclusiones y soluciones a los problemas. La lógica es un proceso riguroso de razonamiento que sigue reglas y principios claros para llegar a conclusiones válidas. Esto es esencial para la ciencia y la tecnología, ya que permite desarrollar soluciones precisas y fiables.

Por otro lado, la imaginación es una habilidad humana que nos permite visualizar cosas que no están presentes en el mundo real y explorar nuevas ideas y conceptos. La imaginación es un elemento importante en la creación artística y en la innovación, ya que nos permite tener un enfoque diferente y divergente sobre los problemas y encontrar soluciones creativas. La lógica puede ayudar a estructurar y sistematizar los argumentos y la investigación, mientras que la imaginación puede aportar un enfoque divergente y creativo que pueda llevar a soluciones innovadoras. El problema es que la imaginación normalmente no es aceptada en el razonamiento y demostración de una conjetura. La imaginación puede ser una herramienta valiosa en la etapa de concepción y formulación de una idea, pero en la demostración formal, se requiere un razonamiento riguroso y una argumentación sólida que cumpla con los estándares de la comunidad científica.

La imaginación es una parte fundamental de la creatividad y la innovación en matemáticas, y muchas de las grandes ideas y teoremas importantes han surgido a partir de una combinación de lógica y imaginación. Sin embargo, es importante que las ideas sean validadas y demostradas con un enfoque lógico y riguroso antes de ser aceptadas como verdaderas.

INDICE

<i>Sobre el cálculo de las distancias entre segundas y terceras potencias.</i>	1
<i>Calcular las medidas para vaciar un bloque macizo, quedando el mismo volúmen.</i>	12
<i>Algoritmo para formar una tabla que genera números primos.</i>	15
<i>Tabla visual de los divisores de los números naturales.</i>	17
<i>Tabla visual de unos polinomios cuadráticos.</i>	19
<i>Cartas a “Dosená” (imaginaria) sobre el reparto.</i>	21
<i>Opciones de reparto de © entre (A) y (B).</i>	33
<i>El orden lógico de los números granizo de la conjetura de Collatz.</i>	42
<i>La conjetura de Collatz.</i>	45
<i>Una variación en el algoritmo de la conjetura de Collatz.</i>	77
<i>Mi visión de la conjetura de Collatz.</i>	84
<i>Otra secuencia de números que siempre acaba en 1.</i>	91
<i>Demostración visual de la conjetura de Collatz.</i>	104
<i>Tabla ordenada de los números naturales.</i>	116
<i>Un algoritmo deferente.</i>	123
<i>La conjetura de Collatz. Orden y armonía en los números de las secuencias.</i>	129
<i>Una sucesión de números impares que siempre acaba en 1.</i>	141
<i>Otra tabla diferente.</i>	145
<i>Una tabla de los números naturales.</i>	148
<i>Orden en los números de la sucesión de Collatz.</i>	154
<i>La conjetura de Collatz.</i>	164
<i>Una secuencia que siempre acaba en 1.</i>	170
<i>Una secuencia que acaba en 0.</i>	176
<i>Una secuencia que siempre acaba en 5, 1, 0.</i>	179
<i>Löthar Collatz – Nikola Tesla.</i>	181
<i>VIII. La conjetura de Collatz. Orden y armonía en los números de la secuencia.</i>	201
<i>XII. La conjetura de Collatz. Orden y armonía en los números de la secuencia.</i>	206
<i>VII. La conjetura de Collatz. Orden y armonía en los números de la secuencia.</i>	209
<i>XI. La conjetura de Collatz. Orden y armonía en los números de la secuencia.</i>	216
<i>VI. La conjetura de Collatz. Orden y armonía en los números de la secuencia.</i>	218
<i>XIV. La conjetura de Collatz. Orden y armonía en los números de la secuencia.</i>	222
<i>Un triángulo con las columnas de la tabla.</i>	233
<i>La conjetura de Collatz. Orden y armonía en los números de la secuencia.</i>	244
<i>La conjetura de Collatz.</i>	279
<i>Una secuencia de números que siempre acaba en 5, 1, 0.</i>	292
<i>Una secuencia de números que acaba siempre en 0.</i>	309
<i>II. La conjetura de Collatz. Orden y armonía en los números de la secuencia.</i>	343
<i>IX. La conjetura de Collatz. Orden y armonía en los números de la secuencia.</i>	350
<i>Algoritmo alternativo de la conjetura de Collatz.</i>	353
<i>X. La conjetura de Collatz. Orden y armonía en los números de la secuencia.</i>	369
<i>Orden en los números de la sucesión de Collatz.</i>	382
<i>XV. La conjetura de Collatz. Orden y armonía en los números de la secuencia.</i>	392
<i>I. Sucesiones eventualmente periódicas.</i>	412
<i>II. Sucesiones eventualmente periódicas.</i>	415
<i>Función de dos variables y sucesiones numéricas eventualmente periódicas.</i>	417
<i>Algoritmo generador de secuencias eventualmente periódicas, con el ciclo elegible.</i>	426
<i>Algoritmo generador de secuencias . . .</i>	428
<i>Opciones de reparto de (C) entre (A) y (B).</i>	433
<i>Mi demostración de la conjetura de Collatz.</i>	442
<i>La conjetura de Collatz. Un enfoque analítico</i>	445
<i>La conjetura de Collatz. Orden y armonía en los números de las secuencias. Ciclos</i>	452
<i>Demostración de la unicidad del bucle en las secuencias de Collatz. Raíces digitales y grafos.</i>	471

Sobre el cálculo de las distancias entre segundas y terceras potencias.

<i>n</i>		0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		55
			1		1		1		1		1		1		1		1		1		1			10

$(n+1) = n + 1$

La distància entre dos números és $n + 1$

n				1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		55
n^2				1		4		9		16		25		36		49		64		81		100		385
			1		3		5		7		9		11		13		15		17		19			100
		2		2		2		2		2		2		2		2		2		2				20

$$(n+1)^2 = n^2 + (2n-1) + 2$$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

La distància entre dos quadrats és $2n + 1$

n				1	2		3		4		5		6		7		8		9		10	
n^3				1	8		27		64		125		216		343		512		729		1000	
			1		7		19		37		61		91		127		169		217		271	
		0		6		12		18		24		30		36		42		48		54		
	6		6		6		6		6		6		6		6		6		6			

$$(n+1)^3 = n^3 + [(n^3 - (n-1)^3)] + 6(n-1) + 6$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

La distància entre dos cubos és $3n^2 + 3n + 1$

0		0																	
			1																
1		1		6															
			7		6														
2		8		12		0													
			19		6		0												
3		27		18		0		0											
			37		6		0		0										
4		64		24		0		0		0									
			61		6		0		0		0								
5		125		30		0		0		0		0							
			91		6		0		0		0								
6		216		36		0		0		0									
			127		6		0		0										
7		343		42		0		0											
			169		6		0												
8		512		48		0													
			217		6														
9		729		54															
			271																
10		1000																	

El cubo d'un número impar, sempre és impar i d'un número par, sempre és par

La diferència entre dos cubos consecutius sempre és impar

[illegible]

[illegible]

385			A					B			
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	55
8	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	110
27	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	165
64	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	220
125	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	275
216	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	330
343	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	385
512	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	440
729	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	495
1000	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	550
3025			C					D			3025

$$A + B + C + D = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$$

$$A = \text{suma de } 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 \quad (1 + 8 + 27 + 64 + 125)$$

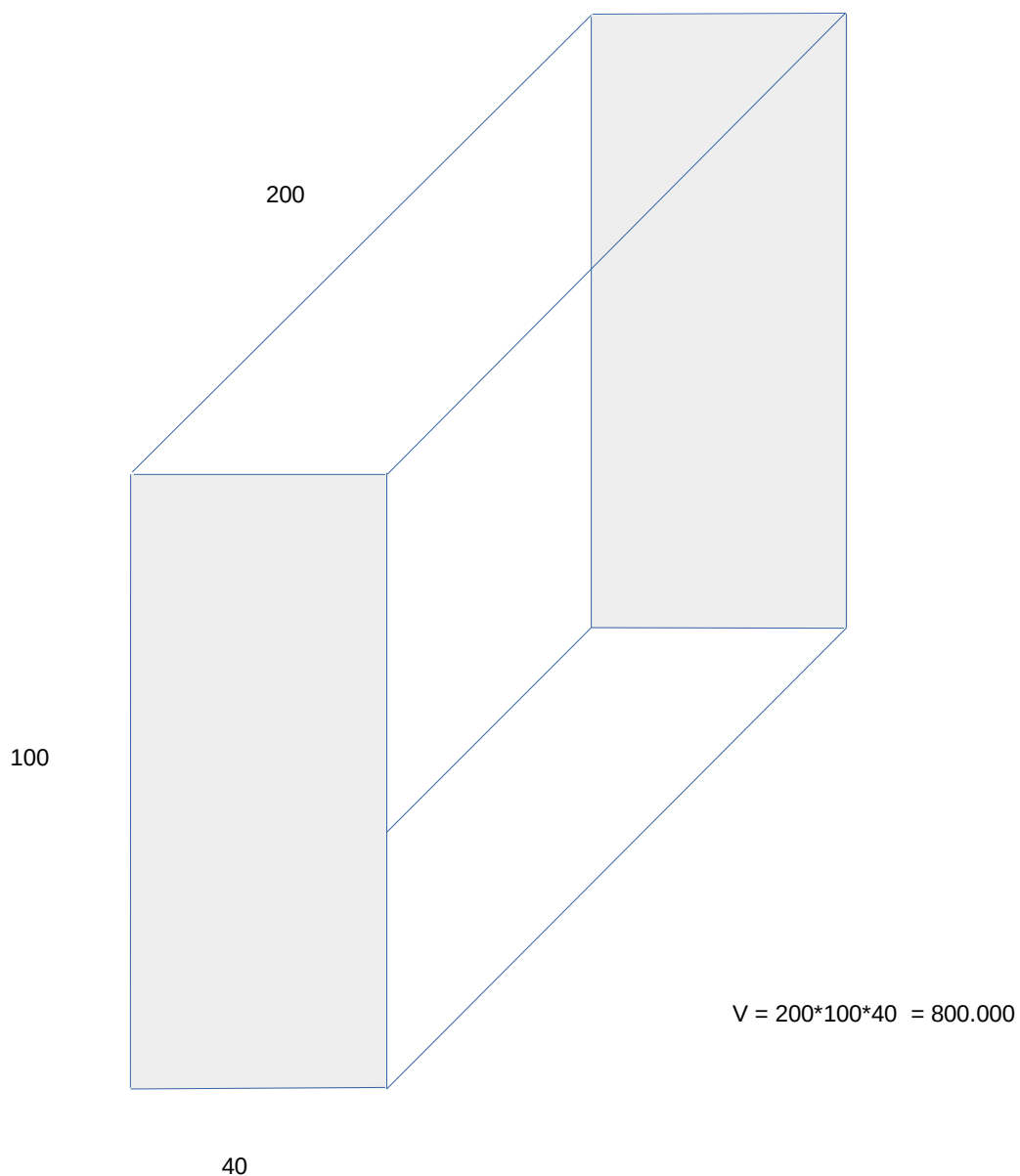
$$B + C + D = \text{suma de } 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3 \quad (216 + 343 + 512 + 729 + 1000)$$

$$4 + 18 = 22; \quad 18 + 81 = 99$$

$$(18 : 4) = (81 : 18) = (99 : 22)$$

$$4 \times 81 = 18 \times 18;$$

Per fer una pica (jardineria) d'un bloc macís de pedra i que la part que buidarem tingui exactament el mateix volum que la pedra de la pica en està feta.



$$200/\sqrt[3]{2} = 158,7401$$

$$100/\sqrt[3]{2} = 79,3700$$

$$40/\sqrt[3]{2} = 31,7480$$

$$\text{Volum} = 400.000$$

Si dividim les aristes per el cúbica de 2 el volum és la mitat.

sumen les diferències : $41,2599+20,6299+8,2519 = 70,1418$

i feim la mitja dividim per 3 = 23,3806

Feim aixó per guardar la mateixa proporció a la gruixa de les parets

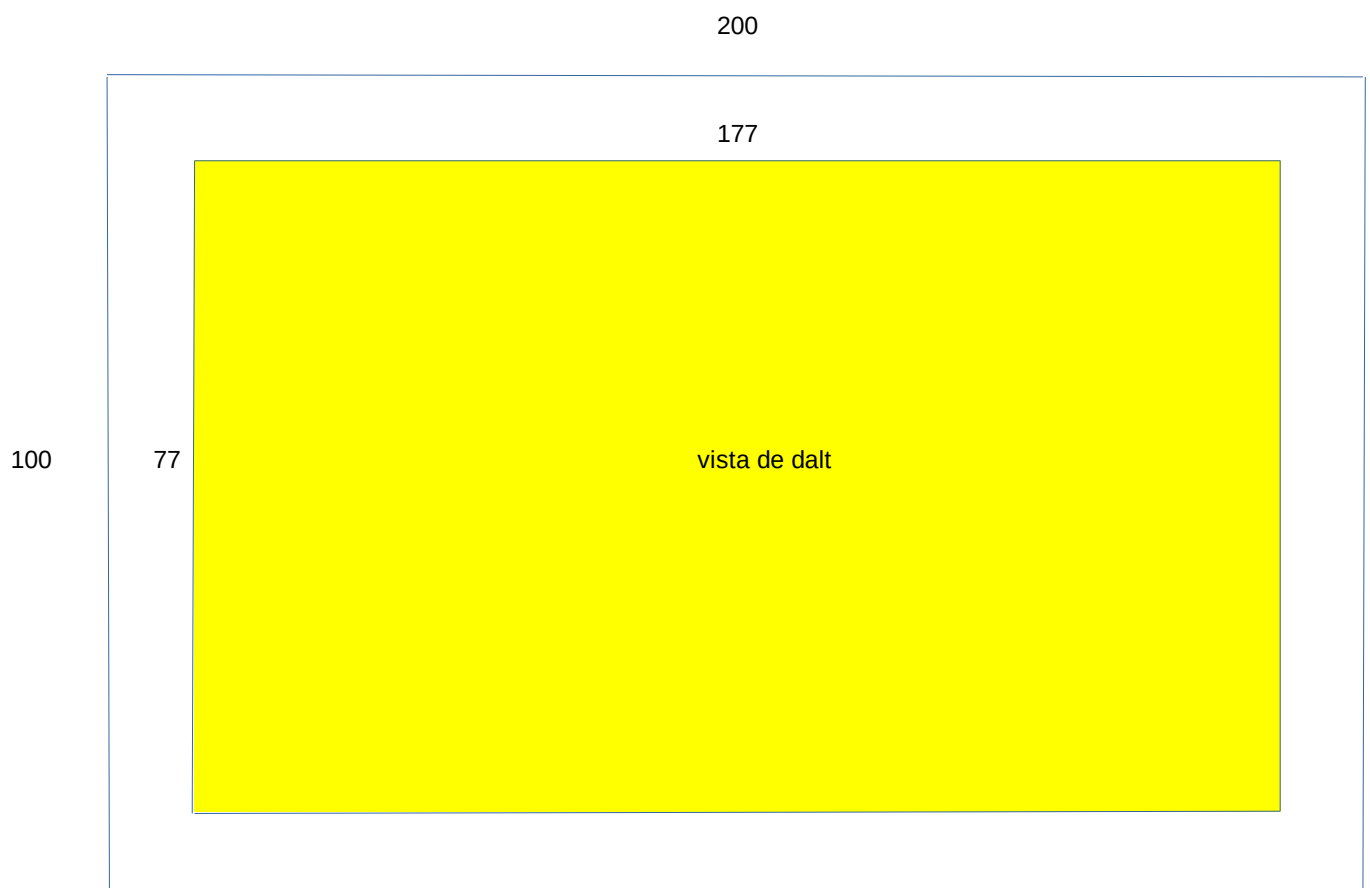
si repartim la diferència mitja a les aristas tenim

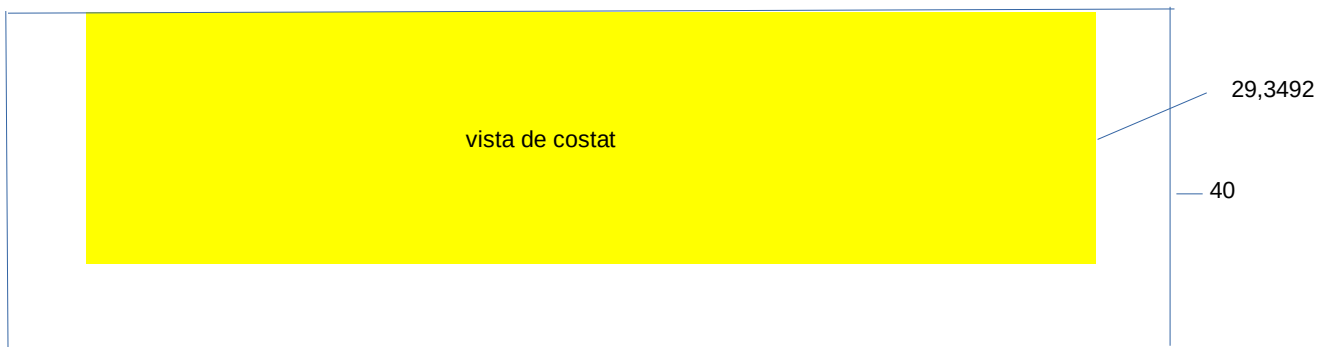
$200-23,3806 = 176,6194$; $100-23,3806 = 76,6194$

Podem llevar decimals : $177*77*A = 400.000$; $A = 29,3492$

Les aristes de la part que hem de buidar = 177, 77, 29,3492

El volum de la part que hem buidat és igual al volum de pedra que queda





la part grogue és la part que hem buidat. La gruixa de les parets és 11,50
la gruixa del fondo és 10,6508



Algoritmo: Tabla MCB

Entrada: Un número natural múltiplo de 2 "n"

Salida: El conjunto de números primos anteriores a "n" (incluyendo "n")

El conjunto de números compuestos por factorización de dos de los primos anteriores a "n"

El conjunto de números compuestos por factorización de más de dos de los primos anteriores a "n"

1. Escriba todos los múltiplos de 2 en una columna descendente desde el 2 hasta "n"
2. Escriba todos los múltiplos de 3 en la siguiente columna desde el 3 hasta $3n/2$
3. Marque en esta columna todos los números que no estén en la primera columna.
4. Escriba en la siguiente columna el primer número > 3 que no esté en las dos columnas anteriores y sus múltiplos.
5. Marque en esta columna todos los números que no estén en las columnas anteriores.
6. Repetir hasta que el primer número de la columna no sea $> n/2$

El resultado es:

Todos los números cabecera de las columnas son los primos anteriores a "n".

Todos los números marcados en las columnas son los números compuestos situados en la intersección de sus dos números primos divisores.

Las columnas se abren con el número siguiente al primer número de la columna precedente que no haya salido ya. Así por ejemplo, la tercera columna no la abrirá el número 4, sino el 5, porque el 4 ya está en la columna del 2.

La primera columna empieza con el 2 y sus múltiplos.

La segunda columna empieza con el 3 y sus múltiplos y se marcan en ella los números que no están en la columna del 2.

La tercera columna empieza con el número 5 y sus múltiplos y se marcan en ella los números que no están en ninguna de las columnas anteriores. No abre esta columna el número 4 porque ya está en la columna del 2.

La cuarta columna la abrirá el 7 y no el 6 que ya está en la primera columna. También se marcan los números que van saliendo que no están en las columnas precedentes.

La quinta columna la abre el 11. No abren esta columna el 8, que ya está en la columna del 2, ni el 9 que ya está en la columna del 3 y tampoco el 10, que también está en la columna del 2.

Así seguimos abriendo cuantas columnas sean necesarias, siguiendo siempre estas dos normas:

Uno: La primera columna siempre la abrirá el número 2 seguido de sus múltiplos.

Los números cabecera de las siguientes columnas serán los siguientes números naturales al número cabecera de la columna anterior que no estén en las columnas precedentes.

Cuando un número ya está en las columnas precedentes, es reemplazado por el siguiente número tantas veces hasta que sea un número que no está en las columnas precedentes.

Dos: En cada columna se marcan los números que no están en ninguna de las columnas anteriores. Los primeros números de cada columna no se marcan.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97
4	6	10	14	22	26	34	38	46	58	62	74	82	86	94										
6	9	15	21	33	39	51	57	69	87	93														
8	12	20	28	44	52	68	76	92																
10	15	25	35	55	65	85	95																	
12	18	30	42	66	78																			
14	21	35	49	77	91																			
16	24	40	56	88																				
18	27	45	63	99																				
20	30	50	70																					
22	33	55	77																					
24	36	60	84																					
26	39	65	91																					
28	42	70	98																					
30	45	75																						
32	48	80																						
34	51	85																						
36	54	90																						
38	57	95																						
40	60	100																						
42	63																							
44	66																							
46	69																							
48	72																							
50	75																							
52	78																							
54	81																							
56	84																							
58	87																							
60	90																							
62	93																							
64	96																							
66	99																							
68																								
70																								
72																								
74																								
76																								
78																								
80																								
82																								
84																								
86																								
88																								
90																								
92																								
94																								
96																								
98																								
100																								

Divisores de los números naturales.
Miquel Cerdà Bennassar – Abril 2021

[illegible]

• • •

Como ejemplos, en esta tablá hay líneas uniendo los números 41, que es número primo y el número 42, que pasa por sus divisores 2, 3, 6, 7, 14 y 21, aparte de él mismo y el 1.

Como ejemplos, en esta tabla hay líneas uniendo los números 41, que es número primo y el número 42, que pasa por sus divisores 2, 3, 6, 7, 14 y 21, aparte de él mismo y el 1.

[illegible]

Columna 1: marcar en color todas las celdas. Columna 2: marcar una celda en color y dejar una en blanco. Columna 3: marcar una celda en color y dejar dos en blanco. Columna 4: marcar una celda en color y dejar tres en blanco. Columna 5: marcar una celda en color y dejar cuatro en blanco. . . .

En la diagonal central están los números naturales y en las celdas a color de su fila están todos sus divisores. Sus múltiplos son los números que coinciden con las celdas en color de su columna.

Polinomios cuadráticos
Miguel Cerdá Bennassar – Abril 2021

En la tabla se visualizan los valores que generan los polinomios $n^2 + n + A$, desde A hasta A^2 .

Destacados en colores, los números primos generados cuando A es igual a 2, 3, 5, 11, 17 y 41.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	...
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600	...	
2	5	10	17	26	37	50	65	82	101	122	145	170	197	226	257	290	325	362	401	442	485	530	577	626	677	730	785	842	901	962	1025	1090	1157	1226	1297	1370	1445	1522	1601	...	
3	6	11	18	27	38	51	66	83	102	123	146	171	198	227	258	291	326	363	402	443	486	531	578	627	678	731	786	843	902	963	1026	1091	1158	1227	1298	1371	1446	1523	1602	...	
4	7	12	19	28	39	52	67	84	103	124	147	172	199	228	259	292	327	364	403	444	487	532	579	628	679	732	787	844	903	964	1027	1092	1159	1228	1299	1372	1447	1524	1603	...	
5	8	13	20	29	40	53	68	85	104	125	148	173	200	229	260	293	328	365	404	445	488	533	580	629	680	733	788	845	904	965	1028	1093	1160	1229	1300	1373	1448	1525	1604	...	
6	9	14	21	30	41	54	69	86	105	126	149	174	201	230	261	294	329	366	405	446	489	534	581	630	681	734	789	846	905	966	1029	1094	1161	1230	1301	1374	1449	1526	1605	...	
7	10	15	22	31	42	55	70	87	106	127	150	175	202	231	262	295	330	367	406	447	490	535	582	631	682	735	790	847	906	967	1030	1095	1162	1231	1302	1375	1450	1527	1606	...	
8	11	16	23	32	43	56	71	88	107	128	151	176	203	232	263	296	331	368	407	448	491	536	583	632	683	736	791	848	907	968	1031	1096	1163	1232	1303	1376	1451	1528	1607	...	
9	12	17	24	33	44	57	72	89	108	129	152	177	204	233	264	297	332	369	408	449	492	537	584	633	684	737	792	849	908	969	1032	1097	1164	1233	1304	1377	1452	1529	1608	...	
10	13	18	25	34	45	58	73	90	109	130	153	178	205	234	265	298	333	370	409	450	493	538	585	634	685	738	793	850	909	970	1033	1098	1165	1234	1305	1378	1453	1530	1609	...	
11	14	19	26	35	46	59	74	91	110	131	154	179	206	235	266	299	334	371	410	451	494	539	586	635	686	739	794	851	910	971	1034	1099	1166	1235	1306	1379	1454	1531	1610	...	
12	15	20	27	36	47	60	75	92	111	132	155	180	207	236	267	300	335	372	411	452	495	540	587	636	687	740	795	852	911	972	1035	1100	1167	1236	1307	1380	1455	1532	1611	...	
13	16	21	28	37	48	61	76	93	112	133	156	181	208	237	268	301	336	373	412	453	496	541	588	637	688	741	796	853	912	973	1036	1101	1168	1237	1308	1381	1456	1533	1612	...	
14	17	22	29	38	49	62	77	94	113	134	157	182	209	238	269	302	337	374	413	454	497	542	589	638	689	742	797	854	913	974	1037	1102	1169	1238	1309	1382	1457	1534	1613	...	
15	18	23	30	39	50	63	78	95	114	135	158	183	210	239	270	303	338	375	414	455	498	543	590	639	690	743	798	855	914	975	1038	1103	1170	1239	1310	1383	1458	1535	1614	...	
16	19	24	31	40	51	64	79	96	115	136	159	184	211	240	271	304	339	376	415	456	499	544	591	640	691	744	799	856	915	976	1039	1104	1171	1240	1311	1384	1459	1536	1615	...	
17	20	25	32	41	52	65	80	97	116	137	160	185	212	241	272	305	340	377	416	457	500	545	592	641	692	745	800	857	916	977	1040	1105	1172	1241	1312	1385	1460	1537	1616	...	
18	21	26	33	42	53	66	81	98	117	138	161	186	213	242	273	306	341	378	417	458	501	546	593	642	693	746	801	858	917	978	1041	1106	1173	1242	1313	1386	1461	1538	1617	...	
19	22	27	34	43	54	67	82	99	118	139	162	187	214	243	274	307	342	379	418	459	502	547	594	643	694	747	802	859	918	979	1042	1107	1174	1243	1314	1387	1462	1539	1618	...	
20	23	28	35	44	55	68	83	100	119	140	163	188	215	244	275	308	343	380	419	460	503	548	595	644	695	748	803	860	919	980	1043	1108	1175	1244	1315	1388	1463	1540	1619	...	
21	24	29	36	45	56	69	84	101	120	141	164	189	216	245	276	309	344	381	420	461	504	549	596	645	696	749	804	861	920	981	1044	1109	1176	1245	1316	1389	1464	1541	1620	...	
22	25	30	37	46	57	70	85	102	121	142	165	190	217	246	277	310	345	382	421	462	505	550	597	646	697	750	805	862	921	982	1045	1110	1177	1246	1317	1390	1465	1542	1621	...	
23	26	31	38	47	58	71	86	103	122	143	166	191	218	247	278	311	346	383	422	463	506	551	598	647	698	751	806	863	922	983	1046	1111	1178	1247	1318	1391	1466	1543	1622	...	
24	27	32	39	48	59	72	87	104	123	144	167	192	219	248	279	312	347	384	423	464	507	552	599	648	699	752	807	864	923	984	1047	1112	1179	1248	1319	1392	1467	1544	1623	...	
25	28	33	40	49	60	73	88	105	124	145	168	193	220	249	280	313	348	385	424	465	508	553	600	649	700	753	808	865	924	985	1048	1113	1180	1249	1320	1393	1468	1545	1624	...	
26	29	34	41	50	61	74	89	106	125	146	169	194	221	250	281	314	349	386	425	466	509	554	601	650	701	754	809	866	925	986	1049	1114	1181	1250	1321	1394	1469	1546	1625	...	
27	30	35	42	51	62	75	90	107	126	147	170	195	222	251	282	315	350	387	426	467	510	555	602	651	702	755	810	867	926	987	1050	1115	1182	1251	1322	1395	1470	1547	1626	...	
28	31	36	43	52	63	76	91	108	127	148	171	196	223	252	283	316	351	388	427	468	511	556	603	652	703	756	811	868	927	988	1051	1116	1183	1252	1323	1396	1471	1548	1627	...	
29	32	37	44	53	64	77	92	109	128	149	172	197	224	253	284	317	352	389	428	469	512	557	604	653	704	757	812	869	928	989	1052	1117	1184	1253	1324	1397	1472	1549	1628	...	
30	33	38	45	54	65	78	93	110	129	150	173	198	225	254	285	318	353	390	429	470	513	558	605	654	705	758	813	870	929	990	1053	1118	1185	1254	1325	1398	1473	1550	1629	...	
31	34	39	46	55	66	79	94	111	130	151	174	199	226	255	286	319	354	391	430	471	514	559	606	655	706	759	814	871	930	991	1054	1119	1186	1255	1326	1399	1474	1551	1630	...	
32	35	40	47	56	67	80	95	112	131	152	175	200	227	256	287	320	355	392	431	472	515	560	607	656	707	760	815	872	931	992	1055	1120	1187	1256	1327	1400	1475	1552	1631	...	
33	36	41	48	57	68	81	96	113	132	153	176	201	228	257	288	321	356	393	432	473	516	561	608	657	708	761	816	873	932	993	1056	1121	1188	1257	1328	1401	1476	1553	1632	...	
34	37	42	49	58	69	82	97	114	133	154	177	202	229	258	289	322	357	394	433	474	517	562	609	658	709	762	817	874	933	994	1057	1122	1189	1258	1329	1402	1477	1554	1633	...	
35	38	43	50	59	70	83	98	115	134	155	178	203	230	259	290	323	358	395	434	475	518	563	610	659	710	763	818	875	934	995	1058	1123	1190	1259	1330	1403	1478	1555	1634	...	
36	39	44	51	60	71	84	99	116	135	156	179	204	231	260	291	324	359	396	435	476	519	564	611	660	711	764	819	876	935	996	1059	1124	1191	1260	1331	1404	1479	1556	1635	...	
37	4																																								

[illegible][illegible]

En las filas $k = 2, 5, 11, 17$ y 41 todos los números comprendidos entre k^2 son números primos.

Estimada Doseña:

Pocas veces recuerdo si he soñado durante la noche. Pero hoy al despertar he recordado que había un hombre mayor que me hablaba, muy lentamente, con voz muy atractiva y amable. No recordé todo lo que me dijo. Solo frases entrecortadas y sin mucho sentido, pero me han rememorado una curiosa historia de un hombre que leí hace tiempo y que, aunque simple e intrascendente, siempre he recordado.

El hombre, padre de dos hijos, quería repartir entre ellos las 30 ovejas de su ganado, ganado que ellos habían cuidado desde que eran niños. Estaba indeciso de como hacer el reparto, ya que su primer hijo, al ser tres años mayor que su hermano, había pasado más años cuidándolo. Será justo que tenga tres ovejas más, pensó. "Voy a darle tres ovejas más al mayor". Cuando llegó al redil y se dispuso a hacer el reparto no pudo. Siempre le faltaba o sobraba una. Entonces se dió cuenta de que si el número de ovejas a repartir es un número par, la diferencia entre las que recibe uno y las del otro también es un número par y si el número a repartir es un número impar, la diferencia es un número impar. Tengo otras maneras de hacerlo, dijo. Puedo dividir el ganado en dos y darles la mitad a cada uno, 14 a uno y 16 al otro, 13 a uno y 17 al otro, ..., mmmmm.... Después de rascarse la cabeza, optó por poner una oveja en la despensa y repartir 16 a su hijo mayor y 13 al menor.

Toda la mañana he tenido esta historia en la cabeza y me he preguntado cómo lo habría hecho yo de haber sido ese hombre. No he podido evitar coger papel y bolígrafo y me lo he planteado de esta manera:

Tengo (n) opciones distintas y únicas de hacer el reparto de (a) entre (b) y (c).

(n) = las opciones de reparto

(a) = el número de ovejas. Cualquier número natural ≥ 2

(b) = las ovejas que recibe el primer hijo

(c) = las ovejas que recibe el segundo hijo

$$b + c = a$$

Si (a) es impar :

n	1	2	3	4		(a-1)/2
b	(a-1)/2	(a-3)/2	(a-5)/2	(a-7)/2		1
c	(a+1)/2	(a+3)/2	(a+5)/2	(a+7)/2		(a-1)

Si (a) es par :

n	1	2	3	4		a/2
b	a/2	(a-2)/2	(a-4)/2	(a-6)/2		1
c	a/2	(a+2)/2	(a+4)/2	(a+6)/2		(a-1)

La diferencia entre b y c es:

$$a(\text{par}) = 2n-2 \quad a(\text{impar}) = 2n-1$$

Si (a) es par, las opciones de reparto son $n(a/2)$ en las que el hijo (b) recibe $(a-(2n-2))/2$ y el hijo (c) recibe $(a+(2n-2))/2$.

Si (a) es impar, las opciones de reparto son $n((a-1)/2)$ y en cada una de ellas (b) recibe $(a-(2n-1))/2$ y (c) recibe $(a+(2n-1))/2$.

Resumen:

Si (a) es par : $b = (a-(2n-2))/2$ $c = (a+(2n-2))/2$ $n = (a/2)-(b-1)$ $n = (c+1)-(a/2)$

Si (a) es impar : $b = (a-(2n-1))/2$ $c = (a+(2n-1))/2$ $n = ((a-1)/2)-(b-1)$ $n = c-((a-1)/2)$

Reparto (a) = 30 (par) :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
c	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Cuanto mayor sea el número de ovejas del ganado (a), más serán las opciones de reparto entre sus dos hijos (b) y (c). Pero la diferencia entre uno y otro siempre será de $(2n-2)$ si a(par) o de $(2n-1)$ si a(impar).

Al llegar a este punto no he podido parar y he escrito otra historia diferente que te cuento a continuación:

Historia similar a la primera pero que el hombre tiene 100 ovejas para repartir a sus dos hijos. Ese hombre, a diferencia del otro, de joven había podido ir a la escuela y aprender algo de matemáticas.

El hombre quería favorecer a su hijo predilecto, pero estaba indeciso con que opción hacer el reparto. Tenía curiosidad por los números y después de valorar varias opciones se dio cuenta de que 100 era 10^2 y pensó que estaría bien que cada hijo recibiera una cantidad de ovejas también igual al cuadrado de un número.

Así lo decidió y encontró la opción $n(15)$ en la que un hijo recibía 36 (6^2) ovejas y el otro 64 (8^2) y satisfecho, así hizo el reparto. "Dividir es repartir a partes iguales pero repartir es dividir a partes iguales pero también a partes desiguales", pensó.

Fue una suerte que esta opción fuera una de las 15 que tenía, porque solamente sucede cuando los tres cuadrados forman parte de la misma y única opción (n). Las probabilidades se reducen ya que quedan anuladas las (n) opciones comprendidas entre $(a)-1$, o sea k^2-1 y $(k-1)^2$.

Se quedó satisfecho con el reparto pero se preguntó si hubiera podido hacer lo mismo si el número de ovejas hubiese sido el cuadrado de otro número distinto al 10.

Su curiosidad le llevó a concluir que sí, que cualquier cuadrado (x^2) se puede descomponer en dos cuadrados (y^2) + (z^2), ($b + c = a$).

Si (b) es un número impar $b + ((b-1)/2)^2 = ((b+1)/2)^2$

Si (b) es un número par $b + ((b-4)/4)^2 = ((b+4)/4)^2$

Sin embargo, cuando quiso ir más allá y averiguar si había alguna opción igual pero siendo el número de ovejas a repartir (a) un número elevado al cubo y que sus hijos también recibiesen cada uno un número de ovejas igual a un número elevado al cubo, no la encontró.

Al igual que el hombre de la primera historia no pudo encontrar ninguna opción que diese tres ovejas más a su hijo mayor si el número de ovejas a repartir era un número par, este hombre no pudo encontrar ninguna opción para repartir las ovejas como $x^3+y^3=z^3$.

Teniendo él (z^3) ovejas, podía dar x^3 o y^3 ovejas a uno de los hijos, (b) o (c), pero no a los dos.

El hombre no pudo encontrar esa opción (n) porque la diferencia entre esos números (b) y (c) es $2n-1$, o sea que $y^3-x^3=2n-1$ y si $x^3+y^3=z^3$, (a) no puede ser igual a z^3 .

Pero esto te lo explicaré con más detalle en una próxima carta, para no hacer ésta más larga.

Puede ser que la medicación que estoy tomando contra la gripe haga que sueñe y recuerde cosas extrañas. Sabes que me gusta contártelas y te agradezco que dediques tu valioso tiempo a leerlas.

Tu amigo afectuosamente,

Miquel

Pollença, 6 de Enero de 2018

Estimada Dosena,

He recibido tu carta y me alegro de que por fin puedas hacer el viaje que tantas veces has tenido que aplazar. Tal como te dije, te escribo de nuevo para darte más detalles de aquella historia.

Recordarás que el hombre no pudo encontrar ninguna opción (n) para repartir (c), cubo de un número (z^3), entre (a) y (b), también cubo de otros números, (x^3) e (y^3).

Para evitar lo que le sucedió al hombre de la historia, es necesario distinguir siempre cuando (c) es un número par o un número impar, y

si (c) es par : $a = (c/2) - n$ $b = (c/2) + n$ $n = (c/2) - a$ $n = b - (c/2)$

si (c) es impar : $a = (c - 2n - 1)/2$ $b = (c + 2n + 1)/2$ $n = (c - 2a - 1)/2$ $n = (2b - c - 1)/2$

Para que $a + b = c$, tienen que cumplirse estas igualdades y no existen otras opciones posibles.

Ya te has dado cuenta que hay un cuarto término, (n). Este término es muy importante y hay que tenerlo siempre en cuenta. Es el "espacio" que contiene las diferentes opciones de reparto de (c) en (a) y (b). Fuera de este "espacio", cualquier opción que se intente, el resultado no será correcto.

Siendo (c) un número natural par, en las opciones de $n(0)$ hasta $n(c/2)$, los valores de (a) también son números naturales. A partir de los valores de $n(c/2 + 1)$ hasta $n(\infty)$ son el número cero y números enteros negativos. El valor de (b) es un número natural en todos los valores de (n).

Si (c) es un número natural impar, en las opciones de $n(0)$ hasta $n((c-1)/2)$, los valores de (a) también son números naturales. A partir de los valores de $n((c-1)/2 + 1)$ hasta $n(\infty)$ son el número cero y números enteros negativos. El valor de (b) es un número natural en todos los valores de (n).

A partir de $n(c/2)$ si (c) es par, o $n((c-1)/2)$ si (c) es impar, el término (c) ya no es (a) + (b), sino $(-a) + (b)$.

Si (c) es un número par, la diferencia entre cualquier número de (a) y cualquier número de (b), es igual a la suma de sus valores de (n).

Si (c) es un número impar, la diferencia entre cualquier número de (a) y cualquier número de (b), es igual a la suma de sus valores de (n) más 1.

En ambos casos, la diferencia de dos números, los dos de (a) o los dos de (b), es igual a la diferencia de sus valores de (n).

Si la suma de dos números cualesquiera (a) y (b) es menor que (c) y le sumamos la diferencia de sus valores de (n), entonces resulta igual a (c).

Si la suma de dos números cualesquiera (a) y (b) es mayor que (c) y le restamos la diferencia de sus valores de (n), entonces resulta igual a (c).

Esto es siempre así con todos los números naturales (a), (b) y (c), por lo que también ocurre si esos números son x^2 , y^2 y z^2 , compartiendo a veces los tres el mismo valor de (n): $x^2 + y^2 = z^2$.

Si (c) es z^3 , en alguna opción de reparto (n), (a) puede ser x^3 o (b) puede ser y^3 , pero solamente uno de ellos, nunca los dos, porque no hay dos números x e y con esas potencias o mayores, que la diferencia entre ellos sea igual a $(2n)$ o $(2n+1)$. Además, para que la suma de dos cubos (a) y (b) sea igual a otro cubo (c), hay que restarles o sumarles los valores de (n).

El primer hombre pudo repartir su ganado haciéndolo como $a+b=c$. El otro también pudo hacerlo como $x^2+y^2=z^2$, pero nunca lo podrá hacer como $x^3+y^3=z^3$.

En mi próxima carta te resumiré los aspectos más importantes y la conclusión de este argumento.

Un abrazo afectuoso, tu amigo

Miquel

Estimada Dosena,

Afortunadamente ya estoy recuperado de la gripe y como te dije en mi carta de hace unos días, que supongo que ya habrás recibido, te escribo de nuevo para explicarte el final de aquella historia.

Recordarás que el hombre no pudo encontrar ninguna opción (n) para repartir (a) igual al cubo de un número (z^3), entre (b) y (c) un número igual también al cubo de otros números, (x^3) e (y^3).

Para evitar lo que le sucedió al hombre en la primera historia que te conté, es necesario distinguir siempre cuando (a) es un número par o es un número impar.

Si (a) es par : $b = (a-2n-2)/2$ $c = (a+2n-2)/2$ $n = (a/2)-(b-1)$ $n = (c+1)-(a/2)$

Si (a) es impar : $b = (a-2n-1)/2$ $c = (a+2n-1)/2$ $n = ((a-1)/2)-(b-1)$ $n = c-((a-1)/2)$

Para que $b + c = a$, se han de cumplir estas igualdades y no existen otras opciones posibles.

Ya te has dado cuenta que hay un cuarto término, (n). Este término es muy importante y hay que tenerlo siempre en cuenta. Es el "espacio" que contiene las diferentes opciones de reparto de (a) en (b) y (c). Fuera de este "espacio", cualquier opción que se intente, el resultado no será correcto.

Siendo (a) un número natural par, en las opciones de $n(1)$ hasta $n(a/2)$, los valores de (b) también son números naturales. A partir de los valores de $n(a/2+1)$ hasta $n(\infty)$ son el número cero y números enteros negativos. El valor de (c) es un número natural en todos los valores de (n).

Si (a) es un número natural impar, en las opciones de $n(1)$ hasta $n((a-1)/2)$, los valores de (b) también son números naturales. A partir de los valores de $n((a-1)/2+1)$ hasta $n(\infty)$ son el número cero y números enteros negativos. El valor de (c) es un número natural en todos los valores de (n).

A partir de $n(a/2+1)$ si (a) es par, o $n((a-1)/2)$ si (a) es impar, el término (a) ya no es el resultado de (b) + (c), sino de $(-b) + (c)$.

En todas las (n) opciones su hijo (c) recibe $(2n-1)$ o $(2n-2)$ ovejas más que su hermano (b): 1^3+2n-1 en la primera opción, 2^3+2n-1 en la segunda, 3^3+2n-1 en la tercera y $(z-1)^3+2n-1$ en la última.

El número de ovejas de estas opciones de (c) no puede ser nunca $c(z-1)^3$, $c(z-2)^3$, $c(z-3)^3$, ... $c(1^3)$, porque $2n-1$ o $2n-2$ nunca es suficiente como diferencia de x^3 e y^3 .

En las historias que te conté, el primer hombre pudo repartir su ganado haciéndolo como $a+b=c$.

El segundo hombre también pudo hacerlo como $x^2+y^2=z^2$, pero no pudo hacerlo como $x^3+y^3=z^3$ porque no es posible. Si tú quieres, te lo explicaré más detalladamente en una próxima carta.

Un afectuoso abrazo de tu amigo,

Miquel

Pollença, 18 de Enero de 2018

Estimada Doseña,

Esta tercera carta es un resumen de las dos anteriores y la conclusión de porqué no son posibles algunas opciones de reparto o distribución de (c) entre (a) y (b).

Opciones únicas (n) de reparto de (c) entre (a) y (b).

Si (c) es par : $a=(c/2)-n$ $b=(c/2)+n$ $b-a=2n$

Si (c) es impar : $a=(c-1)/2-n$ $b=(c+1)/2+n$ $b-a=2n+1$

A partir de aquí consideraré que (c) es un número par.

Las opciones de distribución son de $n(0)$ hasta $n(c/2-1)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
b	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
c	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36

Continuando, $n(\infty)$, las opciones de (a) son el cero y los números enteros negativos :

n	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
a	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	
b	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
c	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	

Cada opción (n) es única y cumple que $a+b=c$ y que $b-a=2n$, $(b-a)/n=2$

Si (c) es par, desde $n(1)$ hasta $n(c/2-1)$ cumple que en módulo n, a y b son congruentes, $a \equiv b \pmod{n}$. También si (c) es impar porque $(b-a-1)/n=2$.

Al ser números naturales a, b y c, también son, en algunas (n) opciones, potencias de otros números naturales y pueden coincidir tres cuadrados en un mismo valor (n) $x^2+y^2=z^2$ porque la diferencia (mínima $(x+1)^2-x^2$) entre x^2 e y^2 es menor que $2n$ y la diferencia exacta entre ellos es esa.

Pero siendo (c) una potencia >2 no ocurre nunca que (a) y (b) sean también las mismas potencias con el mismo valor de (n), porque la diferencia entre esos números es siempre mayor que $2n$. Recordarás que la diferencia entre dos cubos consecutivos, que es la mínima diferencia que puede haber entre dos cubos es $3x^2+3x+1$, donde $x=\sqrt[3]{a}$

Como hago siempre, te mantendré informada y te contaré más historias y reflexiones sobre este tema de reparto.

Un afectuoso abrazo,
Miquel

Pollensa, 23 de Enero de 2018

Estimada Dosena,

Hoy te explicaré más detalles del desarrollo del argumento de reparto de (c) entre (a) y (b).

Hay (n) opciones diferentes de repartir (c) entre (a) y (b) y en cada opción (n) se cumple que:

- 1) $c = a + b$
- 2) $b - a = 2n$
- 3) siendo (c) un número par, $n = c/2 - a$ y $n = b - c/2$
siendo (c) un número impar, $n = (c-2a-1)/2$ y $n = (2b-c-1)/2$
- 4) siendo (c) un número par, $a = (c-2n)/2$ y $b = (c+2n)/2$
siendo (c) un número impar, $a = (c-2n-1)/2$ y $b = (c+2n+1)/2$

Donde:

(c) es cualquier número natural ≥ 2

Siendo (c) un número par, (a) es un número entero en sucesión decreciente de $c/2$ a ∞

Siendo (c) un número impar, (a) es un número entero en sucesión decreciente de $(c-1)/2$ a ∞

Siendo (c) un número par, (b) es un número natural en sucesión creciente de $c/2$ a ∞

Siendo (c) un número impar, (b) es un número natural en sucesión creciente de $(c+1)/2$ a ∞

(n) es un número entero positivo en sucesión creciente desde 0 a ∞

Sirva este ejemplo como ilustración:

Para (c) = 10, las únicas (n) opciones posibles de reparto son:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
a	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	
b	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

Siendo (c) un número natural, cualquier número que sea la n potencia de otro número tiene también las (n) opciones de ser repartido entre (a) y (b) números de la misma potencia si cumple la condición de opción única: Que $a - b$ sea igual a $2n$.

En este ejemplo

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
a	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	
b	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	
c	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

En la opción n(14), (c) es 10^2 , (a) es 6^2 y (b) es 8^2 y siempre $b - a = 2n$.

Siendo $2n$ la diferencia necesaria entre (a) y (b) para que se cumpla la opción única de reparto (n), pueden coincidir x^3 e y^3 en una misma opción (n) de reparto, pero (c) de esa misma opción (n) no será z^3 .

Es posible repartir (c) siendo éste un cubo z^3 entre (a) y (b) y que uno de ellos también sea x^3 o y^3 , pero nunca los dos, porque no existe ningún tercer cubo (a) o (b) cuya diferencia con x^3 o y^3 sea igual a $2n$ ó $2n-1$ si z^3 es un número par o impar. Esto sucede también para cualquier potencia >3 .

Seguiré informándote, como siempre.

Afectuosamente,

Miquel

Estimada Dosena,

Te escribo esta a modo de resumen de las anteriores, concluyendo con el argumento de reparto, que voy a llamar Argumento Dosena, por nuestra amistad.

El fin de este argumento no es la suma de dos números (a) y (b) para obtener (c), sino repartir un número natural (c) entre (a) y (b), conocer el número de opciones (n) que tenemos para hacerlo y calcular los valores de (a) y de (b). Evidentemente (c) también es el resultado de la suma de (a) y de (b), pero tenemos que verlo como una consecuencia del reparto, no como un fin.

Siendo (c) un número natural par ≥ 2 , las opciones de repartirlo entre (a) y (b), también números naturales, son desde $n(0)$ hasta $n(c/2-1)$. Desde $n(c/2)$ a ∞ , (a) serán el 0 y números enteros negativos y (b) serán siempre números naturales.

Siendo (c) un número natural impar ≥ 3 , las opciones de repartirlo entre (a) y (b), también números naturales, son desde $n(0)$ hasta $n(c-3)/2$. Desde $n(c-1)/2$ a ∞ , (a) serán el 0 y números enteros negativos y (b) serán siempre números naturales.

Un ejemplo para el reparto de $c(512)$ entre (a) y (b), en números naturales:

Como que 512 es un número par, hay 256 opciones (n) para hacerlo, de $n(0)$ hasta $n(255)$. Los valores de (a) en cada opción (n) serán $a(256)$ hasta $a(1)$ y los valores de (b) serán desde $b(256)$ hasta $b(511)$.

Porque $a+b=c$, y $b-a=2n$, conocemos los valores de reparto de (a) y (b) en todas las (n) opciones con estas igualdades: para (c) par: $n=(c/2)-a$, $n=b-(c/2)$. En el ejemplo, en la opción $n(215)$, son $a(41)$ y $b(471)$.

Para que sea cierta cada una de las (n) opciones de reparto, los elementos tienen que cumplir estas equivalencias:

Si (c) es un número par: $a+n=b-n=c/2$.

Si (c) es un número impar: $a+n+1=b-n=(c+1)/2$.

Cualquier opción (n) en que sus términos no cumplan la triple igualdad, será falsa.

Los términos del conjunto (D) compuesto por los valores de (n), desde $n(0)$ hasta $n(c/2-1)$, son congruentes en módulo $c/2$ y los términos de cada opción (n) son congruentes en módulo (n):

Si (c) es un número par, $a \equiv b \equiv c/2 \pmod{n}$ y $2a \equiv 2b \equiv c \pmod{n}$
 $b \equiv n \pmod{c/2}$

Si (c) es un número impar, $a \equiv b-1 \equiv (c-1)/2 \pmod{n}$ y $2a \equiv 2b-2 \equiv c-1 \pmod{n}$
 $b \equiv n \pmod{(c+1)/2}$

Cualquier opción (n) en que sus términos no cumplan la congruencia, será falsa.

Algunos ejemplos como ilustración del argumento:

En el reparto o descomposición del número natural par $c(100)$ entre (a) y (b) también números naturales, tenemos $c/2$ opciones de hacerlo, de $n(0)$ hasta $n(49)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		48	49
a	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34		2	1
b	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66		98	99

Todas las (n) opciones son ciertas porque cumplen la congruencia y las tres igualdades necesarias.

En la opción $n(14)$, los tres términos son segundas potencias, $a(36)$, $b(64)$ y $c(100)$, y se cumple la triple igualdad y también la congruencia, siendo cierta la afirmación de que un cuadrado se puede descomponer en dos cuadrados.

En otro ejemplo de reparto o descomposición del número natural impar $c(729)$ entre (a) y (b) también números naturales, tenemos $(c-3)/2$ opciones de hacerlo, de $n(0)$ hasta $n(363)$.

n	0	1	2	3	4	5		147	148		358	359	360	361	362	363
a	364	363	362	361	360	359		217	216		6	5	4	3	2	1
b	365	366	367	368	369	370		512	513		723	724	725	726	727	728

Todas las (n) opciones son ciertas porque cumplen la congruencia y las tres igualdades necesarias.

Comprobamos en la opción $n(147)$ que $a(217)$ y $b(512)$ y en la opción $n(148)$ que $a(216)$ y $b(513)$.

En ambas opciones, siendo $c(729)$ una tercera potencia, solamente uno de los dos términos (a) y (b) es también una tercera potencia. El otro término no lo será nunca porque no cumpliría ni la triple igualdad ni tampoco la congruencia.

Ahora tengo que despedirme, pero seguiré informándote.

Un saludo afectuoso. Tu amigo,

Miquel

Pollensa, 27 de Enero de 2018

Estimada Doseña,

En la conclusión final de mi última carta te decía cuales eran las condiciones necesarias para que cualquier opción (n) del reparto fuera cierta y verdadera:

Primera: Que $a+b=c$

Segunda: Que $b-a=2n$, si (c) es un número par, ó que $b-a=2n-1$, si (c) es un número impar.

Tercera: Que los tres términos a, b y c cumplan la triple igualdad:

Si (c) es un número par $a+n=b-n=c/2$

Si (c) es un número impar $a+n=b-n-1=(c-1)/2$, $a+n+1=b-n=(c+1)/2$.

Cuarta: Que se cumpla la congruencia:

Si (c) es un número par $a \equiv b \equiv c/2 \pmod{n}$ y $2a \equiv 2b \equiv c \pmod{n}$

Si (c) es un número impar $a \equiv b-1 \equiv (c-1)/2 \pmod{n}$ y $2a \equiv 2b-2 \equiv c-1 \pmod{n}$

En los dos ejemplos ilustrativos comprobamos que es cierta la afirmación de que un cuadrado se puede descomponer en dos cuadrados y también que es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados, y en general, una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, en dos potencias del mismo exponente.

Creo que del Argumento Doseña se podrán extraer algunas conclusiones más, entre las cuales puede haber algunas que hacen referencia al teorema de Fermat sobre la suma de dos cuadrados. A la Conjetura de A. De Polignac que todo número impar se puede poner como suma de una potencia de dos y un número primo. A la Conjetura de Christian Goldbach que cualquier número par y mayor que 2 se puede expresar como suma de dos números primos, y creo que algunas más.

Después de formalizar un acta notarial protocolaria, voy a enviar todas las cartas que has leído sobre este tema a un amigo de un amigo, profesor de matemáticas de la Universidad de les Illes Balears, quien me dará su opinión.

Te informaré tan pronto como tenga su respuesta.

Un afectuoso abrazo.

Tu amigo,
Miquel

OPCIONES DE REPARTO DE (C) ENTRE (A) Y (B)

Miguel Cerdá Bennassar – Febrero 2023

Resumen

La finalidad de este argumento es repartir un número natural (c) entre (a) y (b), conocer el número de opciones (n) únicas para hacerlo y calcular los valores de (a) y de (b). Evidentemente (c) también es el resultado de la suma de (a) y de (b), pero tenemos que verlo como una consecuencia del reparto, no como un fin.

CONJUNTO FINITO

Reparto o distribución de C, un número natural par ≥ 2 , entre A y B en sus N opciones posibles y únicas para hacerlo.

Las opciones (n) $N\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, (c-2)/2\} \quad |N|=c/2$

Los valores de (a) $A\{(c/2)-n, (c/2)-n, \dots, 1\} \quad |A|=c/2$

Los valores de (b) $B\{(c/2)+n, (c/2)+n, \dots, (c-1)\} \quad |B|=c/2$

El valor de (c) $C\{c, c, c, \dots, c\} \quad |C|=c/2$

Todos los elementos cumplen:

La igualdad $a+n = b-n = c/2 \quad a+2n = b = (c+2n)/2$

La congruencia $a \equiv b \equiv c/2 \pmod{n} \quad b \equiv (c-1) \equiv 1 \pmod{2}$

Si (c) es un número par, la diferencia entre cualquier número de (a) y cualquier número de (b), es igual a la suma de sus valores de (n).

La diferencia de dos números, los dos de (a) o los dos de (b), es igual a la diferencia de sus valores de (n).

Si la suma de dos números cualesquiera (a) y (b) es menor que (c) y le sumamos la diferencia de sus valores de (n), entonces resulta igual a (c).

Si la suma de dos números cualesquiera (a) y (b) es mayor que (c) y le restamos la diferencia de sus valores de (n), entonces resulta igual a (c).

Desarrollo ilustrativo de C=36

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
b	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
c	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36

Todas las (n) opciones son ciertas porque todos sus elementos cumplen la congruencia y las tres igualdades.

Reparto o distribución de C, un número natural impar ≥ 3 , entre A y B en sus N opciones posibles y únicas para hacerlo.

Las opciones (n) $N\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, (c-3)/2\} \mid N=(c-1)/2$

Los valores de (a) $A\{(c-2n-1)/2, \dots, 1\} \mid A\} = (c-1)/2$

Los valores de (b) $B\{(c+2n+1)/2, \dots, (c-1)\} \mid B|=(c-1)/2$

El valor de (c) $C\{c, c, c, \dots, c\} \mid C=(c-1)/2$

Todos los elementos cumplen:

La igualdad $a+n = b-n-1 = (c-1)/2$ $a+2n+1=b=(c+2n+1)/2$

La congruencia $a \equiv (b-1) \equiv (c-1)/2 \pmod{n}$ $a \equiv (b-1) \equiv (c-1)/2 \equiv 1 \pmod{2}$

Si (c) es un número impar, la diferencia entre cualquier número de (a) y cualquier número de (b) , es igual a la suma de sus valores de (n) más 1.

La diferencia de dos números, los dos de (a) o los dos de (b), es igual a la diferencia de sus valores de (n).

Si la suma de dos números cualesquiera (a) y (b) es menor que (c) y le sumamos la diferencia de sus valores de (n), entonces resulta igual a (c).

Si la suma de dos números cualesquiera (a) y (b) es mayor que (c) y le restamos la diferencia de sus valores de (n), entonces resulta igual a (c).

Desarrollo ilustrativo de C=39

[illegible]

Todas las (n) opciones son ciertas porque todos sus elementos cumplen la congruencia y las tres igualdades

CONJUNTO INFINITO

Continuando los valores (n) , las opciones de (a) son el cero y los números enteros negativos y se forma otro conjunto infinito, porque las (n) opciones son infinitas.

Para (c) par:

[illegible]

Todas las (n) opciones son ciertas porque todos sus elementos cumplen la congruencia y las tres igualdades.

Las opciones (n) $N\{c/2, (c+2)/2, (c+4)/2, \dots\}$

Los valores de (a) $A\{0, -1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$

Los valores de (b) $B\{c, c+1, c+2, c+3, \dots\}$

El valor de (c) $C\{c, c, c, c, \dots, c\}$

Todos los elementos cumplen:

La igualdad $a+n = b-n = c/2$

La congruencia $b \equiv c/2 \pmod{n}$

Para (c) impar:

n	0	1	...	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	...
a	13	12	...	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	...
b	14	15	...	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	...
c	27	27	...	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	...

Todas las (n) opciones son ciertas porque todos sus elementos cumplen la congruencia y las tres igualdades.

Las opciones (n) $N\{(c-1)/2, (c+1)/2, (c+3)/2, \dots\}$

Los valores de (a) $A\{0, -1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$

Los valores de (b) $B\{c, c+1, c+2, \dots\}$

El valor de (c) $C\{c, c, c, \dots, c\}$

Todos los elementos cumplen:

La igualdad $a+2n+1 = b = (c+2n+1)/2$

La congruencia $(b-1) \equiv (c-1)/2 \pmod{n}$

Cualquier número natural (c) se puede repartir entre (a) y (b) con no más de (c/2) opciones posibles si (c) es un número par, o con no más de (c-1)/2 opciones posibles si (c) es un número impar. Sin embargo, el mismo número se puede representar en infinitas opciones (n) como diferencia de dos números enteros.

ALGUNOS REPARTOS

1) Un cuadrado puede expresarse como la suma de dos cuadrados.

En el reparto o descomposición del número natural par $c(100)$ entre (a) y (b) también números naturales, tenemos $c/2$ opciones de hacerlo, de $n(0)$ hasta $n(49)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...	48	49
a	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	...	2	1
b	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	...	98	99
c	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	...	100	100

Todas las (n) opciones son ciertas porque cumplen la congruencia y las igualdades necesarias.

En la opción $n(14)$, los tres términos son segundas potencias, $a(36)$, $b(64)$ y $c(100)$, y se cumple la triple igualdad y también la congruencia.

$$\begin{aligned}
 c &= \text{un número par} & c^2 &= ((c^2+4)/4)^2 - ((c^2-4)/4)^2 & \text{donde } c &= c^2, a = a^2 \text{ y } b = b^2 \\
 b &= (c^2-4)/4 \\
 c &= (c^2+4)/4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= \text{un número impar} & c^2 &= ((c^2+1)/2)^2 - ((c^2-1)/2)^2 \\
 b &= (c^2-1)/2 \\
 c &= (c^2+1)/2
 \end{aligned}$$

2) En el conjunto infinito, el cuadrado de cualquier número natural ≥ 3 , puede ser la diferencia de dos cuadrados.

$$(z^2 = -x^2 + y^2), \quad \text{donde } c = z^2, a = x^2 \text{ y } b = y^2$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
a	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	...
b	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	...
c	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	...

3) Un cubo se puede expresar como suma de tres cuadrados.

(suma de los dos términos del conjunto finito con (a) del conjunto infinito). Consideraremos que (a) del conjunto infinito son números enteros positivos.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...	28	29	30	31	32	33	34	...	91	92	93	94	95	...
a	30	29	28	27	26	25	24	23	...	2	1	0	-1	-2	-3	-4	...	-61	-62	-63	-64	-65	...
b	31	32	33	34	35	36	37	38	...	59	60	61	62	63	64	65	...	122	123	124	125	126	...
c	61	61	61	61	61	61	61	61	...	61	61	61	61	61	61	61	...	61	61	61	61	61	...

$$25 + 36 + 64 = 125$$

4) Un cubo no puede expresarse como la suma de dos cubos.

En otro ejemplo de reparto o descomposición del número natural impar $c(729)$ entre (a) y (b) también números naturales, tenemos $(c-3)/2$ opciones de hacerlo, de $n(0)$ hasta $n(363)$.

n	0	1	2	3	4	5		147	148		358	359	360	361	362	363
a	364	363	362	361	360	359		217	216		6	5	4	3	2	1
b	365	366	367	368	369	370		512	513		723	724	725	726	727	728

Todas las (n) opciones son ciertas porque cumplen la congruencia y las igualdades necesarias.

En la opción $n(147)$, $a(217)$ y $b(512)$ y en la opción $n(148)$, $a(216)$ y $b(513)$.

En ambas opciones, siendo $c(729)$ una tercera potencia, solamente uno de los dos términos (a) ó (b) es también una tercera potencia.

El otro término no puede serlo porque no cumplirá la triple igualdad ni tampoco la congruencia y porque no existe ningún tercer cubo (a) o (b) cuya diferencia con x^3 o y^3 sea igual a $2n$ ó $2n+1$, si z^3 es un número par o impar.

En todas las (n) opciones (b) recibe $2n+1$ más que (a), y en los cubos: 1^3+2n+1 , 2^3+2n+1 , 3^3+2n+1 , ... y $(z-1)^3+2n+1$ en la última. Lo que reciba (b) no será nunca igual al cubo de un número, $(z-1)^3$, $(z-2)^3$, $(z-3)^3$, ... (1^3) , porque $2n+1$ nunca es suficiente como diferencia de dos cubos.

La distancia entre esos números siempre es mayor que $2n+1$, excepto para $z^3-(z-1)^3$ que es menor, por lo que no se cumplirán las igualdades ni la congruencia. Un cubo no se puede descomponer en dos cubos. Esto es así para cualquier opción de reparto con potencias ≥ 3 .

En el conjunto (D) en el que pretendamos repartir o distribuir un cubo (z^3) en dos cubos (x^3) e (y^3), las opciones en las que esto podría ser posible serían desde $n(0)$ hasta la opción $n((z-1)^3-z^3/2)$ si (z^3) es par o desde $n(0)$ hasta $n((z-1)^3-(z^3+1)/2)$, si (z^3) es impar.

En esta última (n) opción, (b) es $(z-1)^3$, que es el último cubo que puede haber. Entonces (a) sería $z^3-(z-1)^3$, por lo que también podemos descartar esa (n) opción de (a), pues la diferencia $z^3-(z-1)^3$, no es un cubo.

Quedan pues las opciones (n) posibles desde $n(0)$ hasta $(z-2)^3$, en la que (a) sería $z^3-(z-2)^3$, que también podríamos descartar, ya que esa diferencia tampoco es un cubo.

Sucede siempre lo mismo hasta que solamente quedan cubos en (a) pero ninguno en (b), por lo que en ninguna (n) opción (a) más (b) sería un cubo.

$$z^3 = -x^2 + y^2, \quad z = -x + y \quad \text{donde } c = z^3, a = x^2 y, b = y^2$$
[illegible]

$a = (a^2 - (a-1)^2 + 1)/2$, donde $c = a^2$, $b = (a-1)^2$ y $a = 2a-1$

[illegible][illegible]

7) Con términos de ambos conjuntos, cualquier número impar mayor que 5 puede expresarse como suma de tres números primos.

(suma de los dos términos del conjunto finito con (a) del conjunto infinito).

Consideraremos que (a) del conjunto infinito son números enteros positivos.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
a	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	
b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
c	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	

$2 + 2 + 1 = 5,$ $2 + 2 + 3 = 7,$ $3 + 7 + 7 = 17,$ $3 + 7 + 13 = 23,$ $7 + 11 + 13 = 31, \dots$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
a	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	
b	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
c	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	

$3 + 3 + 1 = 7,$ $3 + 3 + 3 = 9,$ $3 + 3 + 5 = 11,$ $3 + 5 + 11 = 19,$ $5 + 11 + 11 = 27, \dots$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
a	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	
b	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
c	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	

$7 + 7 + 3 = 17,$ $7 + 7 + 5 = 19,$ $3 + 11 + 3 = 17,$ $3 + 11 + 5 = 19,$ $3 + 11 + 7 = 21, \dots$

8) Cualquier número par y mayor que 2 se puede expresar como suma de dos números primos.

Cualquier número par y mayor que 2 se puede expresar de manera infinita como diferencia de dos números primos en el conjunto infinito.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	...
a	12	11	10	9	8	7	6	5	4	...	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	...
b	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	...
c	24	24	24	24	24	24	24	24	24	...	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	...

9) Cualquier número primo ≥ 7 puede ser expresado como la suma de tres números primos.

(suma de los dos términos del conjunto finito con (a) del conjunto infinito). Consideraremos que (a) del conjunto infinito son números enteros positivos.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	...
a	12	11	10	9	8	7	6	5	4	...	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	...
b	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	...
c	24	24	24	24	24	24	24	24	24	...	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	...

$$11 + 13 + 5 = 29, \quad 7 + 17 + 5 = 29, \quad 7 + 17 + 7 = 31, \quad 11 + 13 + 7 = 31$$

10) Todo número impar se puede poner como suma de una potencia de dos y un número primo.

Todo número impar se puede poner de manera infinita como diferencia de una potencia de dos y un número primo, en el conjunto infinito.

Un número primo puede expresarse como la suma de otro número primo y un múltiplo de 2:

(suma de los dos términos del conjunto finito con (a) del conjunto infinito). Consideraremos que (a) del conjunto infinito son números enteros positivos.

n	0	1	...	12	13	14	...	45	46	47	...	57	58	59	...	177	178	179	...	561	562	...
a	50	49	...	38	37	36	...	5	4	3	...	-7	-8	-9	...	-127	-128	-129	...	-511	-512	...
b	51	52	...	63	64	65	...	96	97	98	...	108	109	110	...	228	229	230	...	612	613	...
c	101	101	...	101	101	101	...	101	101	101	...	101	101	101	...	101	101	101	...	101	101	...

$$37 + 72 = 109, \quad 37 + 192 = 229, \quad 97 + 12 = 109, \quad 97 + 132 = 229 \dots$$

11) Un número primo p es expresable como suma de dos cuadrados si y sólo si $p = 2$ ó $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Un número primo p es expresable como suma de dos cuadrados a y b si $a \equiv b-1 \equiv (p-1)/2 \pmod{n}$.

Un número primo p es expresable como diferencia de dos cuadrados.

0	1	2	3	4	5	6	7	...	28	29	30	31	32	33	34	...	91	92	93	94	95	...
30	29	28	27	26	25	24	23	...	2	1	0	-1	-2	-3	-4	...	-61	-62	-63	-64	-65	...
31	32	33	34	35	36	37	38	...	59	60	61	62	63	64	65	...	122	123	124	125	126	...
61	61	61	61	61	61	61	61	...	61	61	61	61	61	61	61	...	61	61	61	61	61	...

En cada opción (n),

$$a \equiv b \pmod{n} \text{ y } \pmod{2}$$

$$2a \equiv c \pmod{n} \text{ y } \pmod{2}$$

$$2b \equiv c \pmod{n} \text{ y } \pmod{2}$$

Si (c) es un número par, la diferencia entre cualquier número de (a) y cualquier número de (b), es igual a la suma de sus valores de (n).

Si (c) = z^2 , (a) = x^2 y (b) = y^2 , resulta que $y^2 - x^2 = y^2 - (z^2/2) + (z^2/2) - x^2$.

Si (c) es un número impar, la diferencia entre cualquier número de (a) y cualquier número de (b), es igual a la suma de sus valores de (n) más 1:

Si (c) = z^2 , (a) = x^2 y (b) = y^2 , resulta que $y^2 - x^2 = y^2 - (z^2/2) + (z^2/2) - x^2 + 1$.

En ambos casos, la diferencia de dos números, los dos de (a) o los dos de (b), es igual a la diferencia de sus valores de (n).

Si (c) = z^2 , (a) = x^2 y (b) = y^2 , resulta que $X^2 - x^2 = x^2 - (X^2/2) + (X^2/2) - x^2$,

$$Y^2 - y^2 = y^2 - (Y^2/2) + (Y^2/2) - y^2$$

Si la suma de dos números cualesquiera (a) y (b) es menor que (c) y le sumamos la diferencia de sus valores de (n), entonces resulta igual a (c).

Si $x^2 + y^2 < z^2$ par, entonces $x^2 + y^2 + (y^2 - (z^2/2) + (z^2/2) - x^2) = z^2$

Si $x^2 + y^2 < z^2$ impar, entonces $x^2 + y^2 + (y^2 - (z^2/2) + (z^2/2) - x^2 + 1) = z^2$

Si la suma de dos números cualesquiera (a) y (b) es mayor que (c) y le restamos la diferencia de sus valores de (n), entonces resulta igual a (c).

Si $x^2 + y^2 > z^2$ par, entonces $x^2 + y^2 - (y^2 - (z^2/2) + (z^2/2) - x^2) = z^2$

Si $x^2 + y^2 > z^2$ impar, entonces $x^2 + y^2 - (y^2 - (z^2/2) + (z^2/2) - x^2 + 1) = z^2$

Para que la suma de dos cubos (a) y (b) sea igual a otro cubo (c), hay que restar o sumar los valores de (n).

EL ORDEN LOGICO DE LOS NÚMEROS GRANIZO DE LA CONJETURA DE COLLATZ

Existe una lista de problemas que todavía están sin demostrar, entre los cuales hay uno que me llamó la atención por lo simple y sencillo de su planteamiento.

Fué el matemático alemán Lothar Collatz quien lo anunció en 1.937 y se le conoce por muchos nombres, pero los más comunes son La Conjetura de Collatz y el problema del $3n+1$.

Consiste en aplicar repetidamente las operaciones de un algoritmo a cualquier número natural que se elija y se formará una secuencia de números naturales que acabará siempre en un ciclo infinito con los números 4, 2, 1.

La dificultad en su demostración parece estar en que los números de la secuencia obtenida no siguen ningún orden ni patrón lógicos, sino que se comportan como el granizo en la nube, saltando de un lugar a otro antes de caer.

Las operaciones del algoritmo son dos: Si el número es par, se divide entre 2 y si el número es impar, se multiplica por 3 y se suma 1. Estas operaciones se repiten a cada resultado hasta que se llega al 1.

Ejemplo empezando por el número 72

$$72/2 = 36$$

$$36/2 = 18$$

$$18/2 = 9$$

$$3*9+1 = 28$$

$$28/2 = 14$$

$$14/2 = 7$$

$$3*7+1 = 22$$

$$22/2 = 11$$

$$3*11+1 = 34$$

$$34/2 = 17$$

$$3*17+1 = 52$$

$$52/2 = 26$$

$$26/2 = 13$$

$$3*13+1 = 40$$

$$40/2 = 20$$

$$20/2 = 10$$

$$10/2 = 5$$

$$3*5+1 = 16$$

$$16/2 = 8$$

$$8/2 = 4$$

$$4/2 = 2$$

$$2/2 = 1$$

El número 72 ha necesitado 21 pasos o iteraciones hasta llegar al 1 y la secuencia obtenida es:

36, 18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Yo prefiero llamarlos pasos porque literalmente los números pares dan un paso cada vez que lo dividimos entre 2 y se mueven hacia el número impar, que también da un paso cuando lo triplicamos y le sumamos 1.

La explicación a la que he llegado es ésta:

Si escribimos todos los números naturales colocándolos de forma que los impares queden en la primera fila y los demás números debajo del número que es su mitad:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	...
2	6	10	14	18	22	...							
4	12	20	...										
8	24	...											
16	...												

Vemos que las columnas de la tabla son progresiones geométricas con razón igual a 2, sin límite superior y su cota inferior el número impar no divisible entre 2. En esta tabla podemos escribir infinitos números naturales.

Observando la secuencia obtenida en el ejemplo, vemos que los números forman grupos de uno o más números pares y un impar, que identificamos como elementos de las progresiones de la tabla de los números naturales.

Las podemos aislar y completar hasta que su número de elementos sea mayor que el número de pares sucesivos que hay en la secuencia obtenida. En el caso del ejemplo, 40, 20, 10, 5 es el tramo, por lo que serán suficientes 5 elementos en cada progresión.

9, 18, 36, 72, 144, ...

7, 14, 28, 56, 112, ...

11, 22, 44, 88, 176, ...

17, 34, 68, 136, ...

13, 26, 52, 104, 208, ...

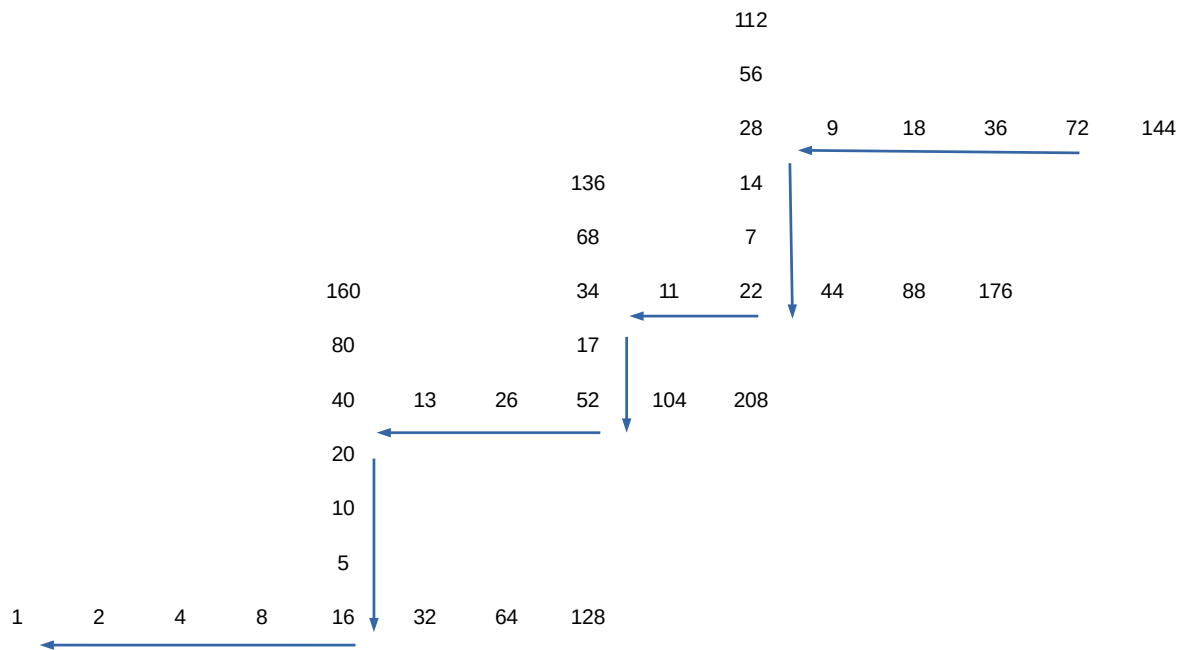
5, 10, 20, 40, 80, 160, ...

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

Ahora formaremos un diagrama que nos mostrará el camino que ha seguido el número 72 del ejemplo.

Si la cantidad de progresiones obtenidas es un número impar colocaremos la primera en sentido horizontal y decreciente de derecha a izquierda. Si es un número par la colocaremos en sentido vertical y decreciente de arriba a abajo.

En el ejemplo hay 7 progresiones, por lo que colocamos la primera horizontalmente y continuamos con las demás de manera alternativa y el diagrama queda así:



Quando dividimos los números pares entre 2 es como si les diésemos un empujón, obligándoles a dar un paso hacia la cota inferior y cuando triplicamos el impar y le sumamos 1 hacemos que salte a la siguiente progresión y continúe hasta el siguiente impar y sucesivamente hasta el 1. Así ocurrirá siempre con cualquier número natural con el que empecemos.

Con este razonamiento he llegado a entender el orden lógico que siguen los llamados números granizo.

Escrito en mi casa en Pollença el 20 de Octubre de 2018.

El objeto de este escrito es entender el orden en el caos aparente de los números granizo de la conjetura de Collatz. Seguramente no servirá como demostración, pero sí que le da sentido a la pregunta de porqué se comportan así los números.

LA CONJETURA DE COLLATZ

Propuesta en 1.937 por el matemático alemán Lothar Collatz, es conocida también como conjetura de Ulam, conjetura $3n+1$ o problema de Siracusa, entre otros nombres. A la fecha no hay ninguna explicación ni demostración y puede ser verdadera o falsa.

ENUNCIADO

Elegimos un número natural cualquiera (n) y realizamos los siguientes cálculos:

Si el número es par, se divide entre 2 y si el número es impar, se multiplica por 3 y se suma 1 al resultado. Estas operaciones se repiten a cada resultado obtenido hasta que se llega al 1.

Si se continúa con el 1 la secuencia entra en un ciclo infinito con el 4, 2, 1.

La Conjetura afirma que, comenzando desde cualquier entero positivo n , la iteración repetida de esta función produce finalmente el valor 1.

Un ejemplo empezando con el número 72:

$72/2 = 36$
 $36/2 = 18$
 $18/2 = 9$
 $3*9+1 = 28$
 $28/2 = 14$
 $14/2 = 7$
 $3*7+1 = 22$
 $22/2 = 11$
 $3*11+1 = 34$
 $34/2 = 17$
 $3*17+1 = 52$
 $52/2 = 26$
 $26/2 = 13$
 $3*13+1 = 40$
 $40/2 = 20$
 $20/2 = 10$
 $10/2 = 5$
 $3*5+1 = 16$
 $16/2 = 8$
 $8/2 = 4$
 $4/2 = 2$
 $2/2 = 1$

El número 72 ha necesitado 22 iteraciones hasta llegar al 1 y la secuencia obtenida es:

72, 36, 18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

La pregunta principal, para la que aún no hay una respuesta, es si es cierta la conjetura para cualquier número inicial y, se elija cual se elija, siempre se acaba en el 1.

Se ha comprobado con programas informáticos que para números hasta $87*2^{60}$ la secuencia siempre acaba en 1, no obstante, como los números son infinitos, eso no es una prueba para todos los números naturales.

La segunda pregunta, también sin respuesta, es porqué se comportan así los números, pues no siguen ningún orden ni patrón lógicos.

Si escribimos todos los números naturales colocándolos de forma que los impares queden en la primera fila y los demás números debajo del que es su mitad, formaremos una tabla en la que estarán todos los números naturales.

En esta tabla podemos escribir infinitos números y una sección de la misma se vería así:

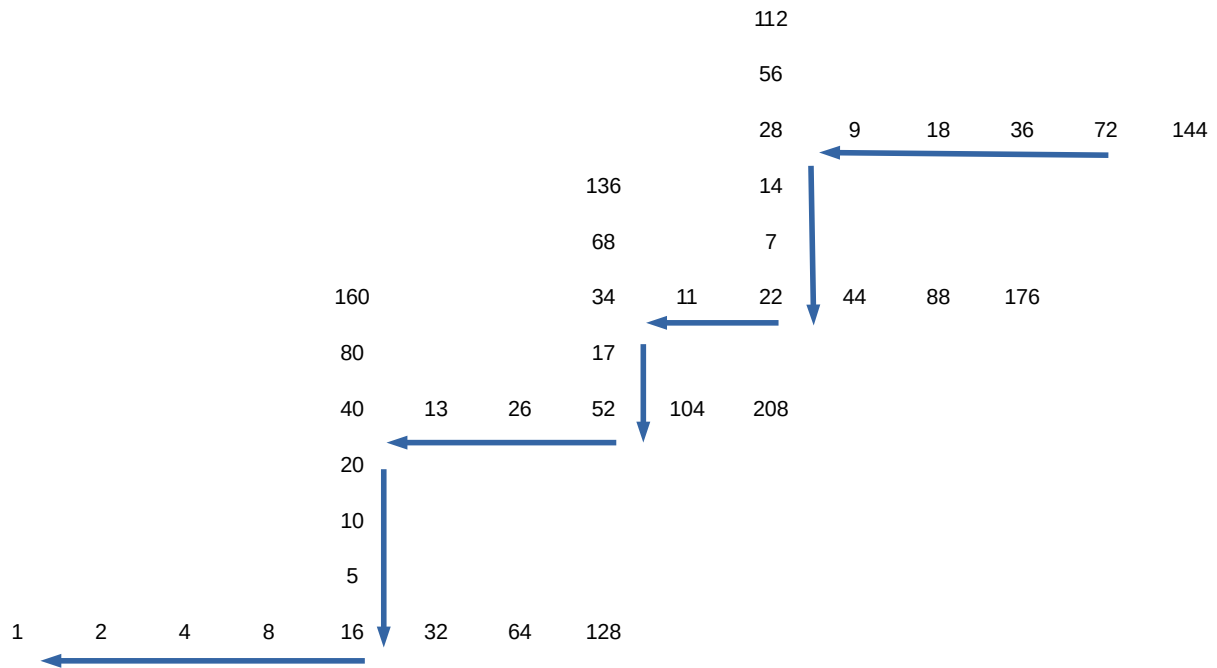
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100
8	24	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200
16	48	80	112	144	176	208	240	272	304	336	368	400
32	96	160	224	288	352	416	480	544	608	672	736	800
64	192	320	448	576	704	832	960	1088	1216	1344	1472	1600
128	384	640	896	1152	1408	1664	1920	2176	2432	2688	2944	3200

En el ejemplo que hemos puesto empezando la secuencia con el número 72, los números obtenidos forman grupos de uno o más números pares y un impar, que identificamos como elementos de las columnas de la tabla, que forman progresiones geométricas de razón igual a 2, cota inferior un número impar y sin cota superior.

72, 36, 18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1



Construyendo un diagrama que muestra la ruta seguida por el número 72 hasta llegar al 1, el orden de los números de esta secuencia tendrá sentido.



Para formar el diagrama escribimos el último grupo obtenido en la secuencia, empezando con el número 1, en horizontal y creciente de izquierda a derecha, dejando suficiente espacio en la parte superior para poder escribir las demás progresiones. Las completamos con más elementos para una mejor visualización del conjunto. Seguimos el mismo orden de la secuencia obtenida y disponemos las progresiones de manera que el impar del grupo se coloque junto al par del siguiente grupo, alternativamente en horizontal y vertical.

El diagrama lo forman las columnas de la tabla de los números naturales unidas con su cota inferior número impar y el elemento número par que resulta al aplicar la operación $3n+1$ del algoritmo. Cualquier sucesión obtenida de cualquier número natural puede representarse mediante un diagrama similar, porque en la tabla están todos los números naturales.

LA CONJETURA DE COLLATZ

Esta conjetura, formulada por Lothar Collatz en 1937, dice lo siguiente:

Toma un número natural cualquiera. Si es par, divídelo entre dos; si es impar, multiplícalo por tres y súmale 1. Repite el proceso con cada uno de los resultados que vas obteniendo. Sea cual sea el número con el que hayas comenzado, al final siempre terminarás con la secuencia 4, 2, 1, y no saldrás de ese bucle.

Esta es mi opinión sobre el problema :

Todos los números naturales se pueden poner como producto de una potencia de dos y su mayor divisor impar.

$$\mathbb{N} = 2^n \cdot m$$

$2^0(2n-1)$ son todos los números impares $1 \cdot (2n-1)$

$2^1(2n-1)$ son todos los números pares de la forma $2 \cdot (2n-1)$

$2^2(2n-1)$ son todos los números pares de la forma $4 \cdot (2n-1)$

$2^3(2n-1)$ son todos los números pares de la forma $8 \cdot (2n-1)$

.

Si aplicamos $3n+1$ a un número impar, resulta un número par, y todo número par llega a un número impar por iteraciones sucesivas al dividirlo entre 2. Por esta razón la sucesión está formada por una serie indeterminada de grupos compuestos de uno o más números pares y un número impar, que es el mayor divisor impar de los números pares de su grupo.

En todas las sucesiones el último grupo es el formado por los pares de la forma 2^n y su impar el 1. Los grupos anteriores los forman números pares de la forma $2^n \cdot m$, donde m es el número impar con el que acaba cada grupo.

Como que el impar (m) es divisor de los pares de su grupo, el resultado siempre es 2^n , donde n es el número de divisiones del número par entre dos que son necesarias para llegar al impar.

La tabla que sigue ilustra las sucesiones de los números pares al dividirlos entre dos y el impar al que llegan.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	...
1	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	...
2	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	...
3	8	24	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200	216	232	248	264	...
4	16	48	80	112	144	176	208	240	272	304	336	368	400	432	464	496	528	...
5	32	96	160	224	288	352	416	480	544	608	672	736	800	864	928	992	1056	...
6	64	192	320	448	576	704	832	960	1088	1216	1344	1472	1600	1728	1856	1984	2112	...
7	128	384	640	896	1152	1408	1664	1920	2176	2432	2688	2944	3200	3456	3712	3968	4224	...
8	256	768	1280	1792	2304	2816	3328	3840	4352	4864	5376	5888	6400	6912	7424	7936	8448	...
9	512	1536	2560	3584	4608	5632	6656	7680	8704	9728	10752	11776	12800	13824	14848	15872	16896	...
.....																		

Esta tabla, si la hiciésemos infinita contendría todos los números naturales.

Aplicando el algoritmo de Collatz de manera iterada a cualquier número natural par llegaremos al impar de la sucesión, que al multiplicarlo por 3 y sumarle 1 al resultado "salta" a un número par de otra sucesión y así sucesivamente hasta llegar a la sucesión cuyo impar es el 1.

Ejemplo empezando por el 112:

$112/2=56$, $56/2=28$, $28/2=14$, $14/2=7$ (final de la primera sucesión).
 $3*7+1=22$, $22/2=11$ (final de la segunda sucesión).
 $3*11+1=34$, $34/2=17$ (final de la tercera sucesión).
 $3*17+1=52$, $52/2=26$, $26/2=13$ (final de la cuarta sucesión).
 $3*13+1=40$, $40/2=20$, $20/2=10$, $10/2=5$ (final de la quinta sucesión).
 $3*5+1=16$, $16/2=8$, $8/2=4$, $4/2=2$, $2/2=1$ (final de la sexta sucesión).

Ahora formamos un diagrama con los grupos obtenidos:

```

....  112  56  28  14  7
          ....  22  11
                ....  34  17
                      ....  52  26  13
                            ....  40  20  10  5
                                  ....  16  8  4  2  1
  
```

Estas son las 6 sucesiones implicadas en la ruta del número 112 hasta que llega al número 1:

7	14	28	56	112	
11	22	44	88	176	
17	34	68	136	272	
13	26	52	104	208	
5	10	20	40	80	
1	2	4	8	16	

En todas las sucesiones el último grupo es el formado por los pares de la forma 2^n y su impar el 1. Los grupos anteriores los forman números pares de la forma $2^n \cdot m$, donde m es el número impar con el que acaba cada grupo.

Como que el impar (m) es divisor de los pares de su grupo, el resultado siempre es 2^n , donde n es el número de divisiones del número par entre dos que son necesarias para llegar al impar.

Ejemplo en que la sucesión empieza con el 928:

$$29 \times 32 = 928, \quad \Rightarrow \quad 928/29 = 32$$

$$(29 \times 32)/2 = 464, \quad \Rightarrow \quad 464/29 = 16$$

$$(29 \times 32)/4 = 232, \quad \Rightarrow \quad 232/29 = 8$$

$$(29 \times 32)/8 = 116, \quad \Rightarrow \quad 116/29 = 4$$

$$(29 \times 32)/16 = 58, \quad \Rightarrow \quad 58/29 = 2$$

$$(29 \times 32)/32 = 29, \quad \Rightarrow \quad 29/29 = 1$$

Si aplicásemos $3n+1$ al impar 29, resulta 88

$$11 \times 8 = 88, \quad \Rightarrow \quad 88/11 = 8$$

$$(11 \times 8)/2 = 44, \quad \Rightarrow \quad 44/11 = 4$$

$$(11 \times 8)/4 = 22, \quad \Rightarrow \quad 22/11 = 2$$

$$(11 \times 8)/8 = 11, \quad \Rightarrow \quad 11/11 = 1$$

Si aplicásemos $3n+1$ al impar 11, resulta 34

$$17 \times 2 = 34, \quad \Rightarrow \quad 34/17 = 2$$

$$(17 \times 2)/2 = 17, \quad \Rightarrow \quad 17/17 = 1$$

Si aplicásemos $3n+1$ al impar 17, resulta 52

$$13 \times 4 = 52, \quad \Rightarrow \quad 52/13 = 4$$

$$(13 \times 4)/2 = 26, \quad \Rightarrow \quad 26/13 = 2$$

$$(13 \times 4)/4 = 13, \quad \Rightarrow \quad 13/13 = 1$$

El 13 se convierte en 40

$$5 \times 8 = 40, \quad \Rightarrow \quad 40/5 = 8$$

$$(5 \times 8)/2 = 20, \quad \Rightarrow \quad 20/5 = 4$$

$$(5 \times 8)/4 = 10, \quad \Rightarrow \quad 10/5 = 2$$

$$(5 \times 8)/8 = 5, \quad \Rightarrow \quad 5/5 = 1$$

El 5 se convierte en el 16

$$1 \times 16 = 16, \quad \Rightarrow \quad 16/1 = 16$$

$$(1 \times 16)/2 = 8, \quad \Rightarrow \quad 8/1 = 8$$

$$(1 \times 16)/4 = 4, \quad \Rightarrow \quad 4/1 = 4$$

$$(1 \times 16)/8 = 2, \quad \Rightarrow \quad 2/1 = 2$$

$$(1 \times 16)/16 = 1, \quad \Rightarrow \quad 1/1 = 1$$

Aquí finalizaría la sucesión, o entraríamos en el bucle del 4, 2, 1, aplicando $3n+1$. Pero es suficiente hacer la sucesión con el primer tramo para comprobar que cualquier número par acaba en 1 después de n divisiones entre 2, porque en este caso el último término es 29 y

$$(29 \times 32)/32 = 29 \Rightarrow 29/29 = 1$$

Podemos decir que la solución y la demostración de la conjetura es la conjetura misma.

Todos los números pares de la tabla son el producto de $2^n(2n-1)$. También los impares, porque $2^0(2n-1) = 2n-1$. Así pues, todos los números de cualquier fila 2^n son iguales al dividirlos entre sus correspondientes impares $(2n-1)$.

$$16/1 = 48/3 = 80/5 = 112/7 = 144/9 = 176/11 = 208/13 = 240/15 \dots\dots\dots$$

Esto quiere decir que cualquier operación aplicada a uno de esos números, la podemos hacer a cualquiera de ellos, obteniendo el mismo resultado.

Si dividimos entre 2 : $(16/1)/2 = (208/13)/2$

Si elevamos a la n potencia : $(264/33)^n = (8/1)^n$

.....

Examinando la tabla podríamos pensar que existen más números pares que impares, pues vemos que en cada columna hay un solo número impar e infinitos números pares.

Pero nos damos cuenta de que no es así cuando escribimos los números en la tabla de manera ordenada: El primer número, el 1 es el que encabeza la primera fila de los impares, $2^0(2n-1)$.

El segundo, el 2 es el que encabeza la segunda fila, que es la de los pares de la forma $2^1(2n-1)$.

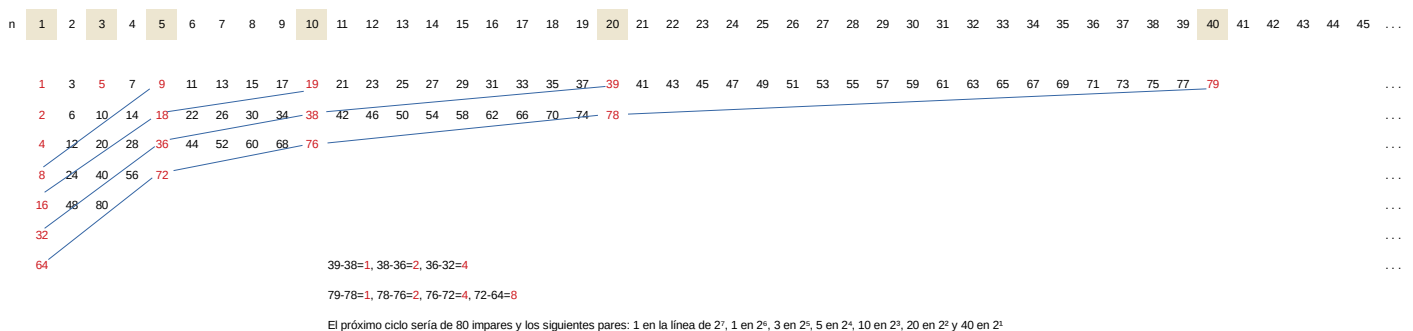
El tercero, el 3 es el segundo impar de su fila.

El número 4 es el primer número de la tercera fila, que son los pares de la forma $2^2(2n-1)$.

De esta manera, los números van apareciendo en la tabla siguiendo un estricto orden.

En la segunda fila hay una cantidad de números pares equivalente al 50% de los números impares de la primera fila. En la tercera fila hay un 50% de los números de la segunda fila. En la cuarta fila, un 50% de la tercera. Las últimas filas las ocupan 5 números, tres números en la antepenúltima y un número en las dos últimas filas.

Este orden es siempre igual : Empezando por las últimas filas, si contamos los números, hay los siguientes: 1, 1, 3, 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, . . . La primera fila, que es la que concentra mayor cantidad de números, es la de los impares. Las siguientes filas las ocupan los números pares en la forma descrita.



En esta tabla vemos el desarrollo en el orden de los números naturales y su proporción en los lugares que ocupan. La proporción en las filas ya la hemos descrita anteriormente.

La proporción en las columnas es esta :

En la primera columna 6 pares de la forma $2^n \cdot 1$ que llegan al 1 después de “n” iteraciones de dividirlos entre dos.

En la segunda columna 4 pares de la forma $2^n \cdot 3$, que llegan al 3 después de “n” iteraciones de dividirlos entre dos.

En la tercera columna 4 pares de la forma $2^n \cdot 5$, que llegan al 5 después de “n” iteraciones de dividirlos entre dos.

En la cuarta columna 3 pares de la forma $2^n \cdot 7$, que llegan al 7 después de “n” iteraciones de dividirlos entre dos.

En la quinta columna 3 pares de la forma $2^n \cdot 9$, que llegan al 9 después de “n” iteraciones de dividirlos entre dos.

De la sexta columna a la 10 columna, 2 pares en cada una de la forma $2^n \cdot 11$, $2^n \cdot 13$, $2^n \cdot 15$, $2^n \cdot 17$, $2^n \cdot 19$, que llegan al 11, 13, 15, 17, y 19 después de n iteraciones de dividirlos entre dos.

Por último un par en cada una de las filas 11 a 20.

Hemos escrito 40 números impares y 40 números pares, de los cuales :

Un 15% son de la forma 2^n .

Un 10% de las formas $2^n \cdot 3$ y $2^n \cdot 5$.

Un 7,5% de las formas $2^n \cdot 7$ y $2^n \cdot 9$.

Un 5% de las formas $2^n \cdot 11$, $2^n \cdot 13$, $2^n \cdot 15$, $2^n \cdot 17$ y $2^n \cdot 19$.

Finalmente un 2,5% de las formas 2^n , donde $n(1)$, los más numerosos.

Vemos que un 50% de la cantidad de los números impares son números pares que llegan a los primeros impares 1, 3, 5, 7, . . . después de “n” iteraciones al dividirlos entre dos.

Esta proporción es el equilibrio de los números y habría que tenerla en cuenta siempre, no solamente en la conjetura de Collatz, sino también en otros escenarios.

La tabla siguiente representa los 40 números pares formados a partir de los 40 números impares después de aplicarles $3n+1$.

La fila 1 la forman 20 números pares de la forma $2(6n-1)$

La fila 2 la forman 10 números pares de la forma $4(6n-5)$

La fila 3 la forman 5 números pares de la forma $8(6n-1)$

La fila 4 la forman 3 números pares de la forma $16(6n-5)$

La fila 5 la forman 1 número par de la forma $32(6n-1)$

La fila 6 la forman 1 número par de la forma $64(6n-5)$

La zona con más actividad es la comprendida entre los valores de $n(20)$ y $n(40)$ que corresponde a la última mitad de la tabla. Es la zona externa del remolino donde la fuerza de atracción es menor.

No puedo explicarlo mediante fórmulas matemáticas, pero estoy convencido de que esa es la razón por la cual las sucesiones de Collatz siempre finalizan en 4, 2, 1.

Después de algunos meses de escribir esto me he dado cuenta que en el problema de Collatz, no son tan importantes los números pares, pues son solamente el vehículo para llegar a un impar después de las divisiones entre dos necesarias.

Para entender el problema me he centrado exclusivamente en los números impares, excluyendo los números pares.

Los números impares son en general de la forma $2n-1$. Pero en este caso consideraremos que hay tres tipos diferentes de números impares: Los de la forma $6n-1$, $6n-3$ y $6n-5$.

Los tipo $6n+5$ son: 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, ... Sus dígitos suman 5, 2, 8.

Los tipo $6n+3$ son: 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, ... Sus dígitos suman 3, 9, 6.

Los tipo $6n+1$ son: 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, ... Sus dígitos suman 1, 7, 4.

En el problema de Collatz, hay infinitos números impares que después de aplicarles $3n+1$ y dividido el resultado por dos las veces necesarias siempre llegan a otro número impar (m).

Dos fórmulas sirven para calcular dichos impares: $1/3(m*4^n-1)$ y $1/6(m*4^n-2)$

Con la primera calculamos todos los números impares que llegan a cualquier impar del tipo $6n+1$ y con la segunda los impares que llegan a cualquier número impar del tipo $6n+5$.

No existe ningún número impar que llegue a los impares del tipo $6n+3$.

Calculamos por ejemplo todos los números impares que llegan al impar (m).

Los que llegan al 5, $1/6(5*4^n-2) = 3, 13, 53, 213, 853, 3413, ...$

Los que llegan al 11, $1/6(11*4^n-2) = 7, 29, 117, 469, 1877, ...$

Los que llegan al 1, $1/3(1*4^n-1) = 1, 5, 21, 85, 341, ...$

Los que llegan al 7, $1/3(7*4^n-1) = 9, 37, 149, 597, ...$

m		n	1	2	3	4	5	
1	$(1*4^n-1)/3$	1	5	21	85	341		
7	$(7*4^n-1)/3$	9	37	149	597	2389		
13	$(13*4^n-1)/3$	17	69	277	1109	4437		
19	$(19*4^n-1)/3$	25	101	405	1621	6485		
25	$(25*4^n-1)/3$	33	133	533	2133	8533		
.....								

m	n	1	2	3	4	5	
5	$(5 \cdot 4^{n-2})/6$	3	13	53	213	853	
11	$(11 \cdot 4^{n-2})/6$	7	29	117	469	1877	
17	$(17 \cdot 4^{n-2})/6$	11	45	181	725	2901	
23	$(23 \cdot 4^{n-2})/6$	15	61	245	981	3925	
29	$(29 \cdot 4^{n-2})/6$	19	77	309	1237	4949	
.....							

Calculamos los impares que llegan al 1 con la fórmula $1/3(m \cdot 4^{n-1})$, o sea, 1, 5, 21, 85, ...

pero también $2^0=1$, $2^0+2^2=5$, $2^0+2^2+2^4=21$, $2^0+2^2+2^4+2^6=85$

Todos los impares que llegan al 1 son igual a la suma de potencias de dos con exponente par.

Los impares que llegan al 7 con la misma fórmula, $1/3(m \cdot 4^{n-1}) = 9, 37, 149, 597, \dots$

pero también $2^0+2^2=9$, $2^0+2^2+2^4=37$, $2^0+2^2+2^4+2^6=149$.

Los impares que llegan al 13 son : $1/3(m \cdot 4^{n-1}) = 17, 69, 277, 1109, \dots$

pero también $2^0+4^2=17$, $2^0+2^2+4^2=69$, $2^0+2^2+2^4+4^2=277$

Los impares que llegan al 19 son : $1/3(m \cdot 4^{n-1}) = 25, 101, 405, 1621, \dots$

pero también $2^0+6^2=25$, $2^0+2^2+6^2=101$, $2^0+2^2+2^4+6^2=405$

Los impares que llegan al 25 son : $1/3(m \cdot 4^{n-1}) = 33, 133, 533, 2133, \dots$

pero también $2^0+8^2=33$, $2^0+2^2+8^2=133$, $2^0+2^2+2^4+8^2=533$

Los impares 1, 7, 13, 19, 25, son los cinco primeros de la forma $6n-5$, que sus dígitos suman 1, 7, 4 y aplicamos la fórmula $1/3(m \cdot 4^{n-1})$, donde m es el impar, para calcular los impares que llegan a ellos.

Los impares 5, 11, 17, 23, 29, son los cinco primeros de la forma $6n-1$, que sus dígitos suman 5, 2, 8 y aplicamos la fórmula $1/6(m \cdot 4^{n-2})$, donde m es el impar, para calcular los impares que llegan a ellos.

Los impares que llegan al 5 son : $1/6(5 \cdot 4^{n-2}) = 3, 13, 53, 213, \dots$

pero también $1+2=3$, $1+2^2+8=13$, $1+2(2+8)+32=53$, $1+2(2+8+32)+128=213$

La distancia entre los impares que llegan a m es igual a $m \cdot 2^{(2n-1)}$. Ejemplo para los impares que llegan a 5:

Calculamos el primer impar que llega a 5 con la fórmula $1/6(5 \cdot 4^{n-2}) = 3$

El siguiente impar es $3+5 \cdot 2^{(2n-1)}=13$

El siguiente impar es $13+5 \cdot 2^{(2n-1)}=53$ y así de manera infinita.

Para calcular los impares de manera inversa, o sea descendente, aplicamos $(n-1)/4$, donde n es el impar inicial i siguientes.

Ejemplo si partimos del impar 873813 después de 9 veces llegamos al 3, que es el primer impar que llega al 5.

$(873813-1)/4=218453$, $-1/4=54613$, $-1/4=13653$, $-1/4=3413$, $-1/4=853$, $-1/4=213$, $-1/4=53$, $-1/4=13$, $-1/4=3$

Para entender el problema me imagino una carretera con desvíos a derecha e izquierda.

Estamos en la carretera llamada "ruta 1". El primer desvío a la derecha es la "ruta 5" ($6n-1$). El próximo desvío a la izquierda es una carretera sin salida, pues es la ruta del 21 ($6n-3$). El siguiente desvío es a la izquierda, la "ruta 85" ($6n-5$). Continuando por esa carretera seguimos encontrando infinitos desvíos a derecha e izquierda y carreteras sin salida.

Ahora volvemos al principio y tomamos la carretera "ruta 5". Nos damos cuenta que es otra carretera similar a la primera, con desvíos a derecha e izquierda y otras carreteras sin salida.

A la derecha tenemos la "ruta 3" sin salida. Después a la izquierda la "ruta 13" ($6n-5$). El siguiente desvío a la derecha es la "ruta 53" ($6n-1$). El próximo es otra carretera sin salida, la "ruta 213".

Si tomamos la "ruta 13" nos encontramos nuevamente en otra carretera similar a las anteriores, con desvíos a derecha e izquierda y carreteras sin salida. Los desvíos de esta carretera son "ruta 17", "ruta 69", "ruta 277", etc.

Me imagino una fotografía aérea de este entramado de carreteras, pero con solamente el principio, con las cuatro primeras carreteras de cada desvío, porque con más me es imposible poder imaginarla.

Un número impar cualquiera es como un vehículo en una carretera con su nombre que está conectada al gigantesco entramado de carreteras que imaginamos como un infinito fractal.

Al aplicarle $3n+1$ es como poner las coordenadas al GPS y las sucesivas divisiones entre dos es la distancia recorrida hasta el próximo desvío, que es otra carretera con otro nombre. Nuevamente $3n+1$ y las divisiones de los pares le indicará el nombre de la próxima ruta que debe tomar. El final del viaje será siempre la "ruta 1".

Para que el coche no se pierda con tantas carreteras y desvíos, hemos imaginado que no tienen motor y que todo el entramado tiene pendiente hacia el inicio de la "ruta 1". De esta manera, todos los coches van cayendo por inercia por las diferentes carreteras, desde su posición inicial hasta llegar al final, la "ruta 1".

Para crear esta ruta podemos aplicar este método:

Vamos a crear una sucesión que empezando con cualquier número entero positivo acabará siempre en el número 1.

Si empezamos con un número par, lo tenemos que multiplicar por 3, sumarle 1 y dividirlo por 4. Si es un número impar, le tenemos que restar 1 y dividirlo entre 4. Si el número no es divisible entre 4, lo multiplicaremos por 3, le sumaremos 1 y lo dividiremos por 2. Siguiendo estas tres reglas, la sucesión de números impares siempre acabará en el número 1.

Ejemplo: Empezamos la sucesión con el número 65, el número siguiente lo calculamos $(65-1)/4=16$, como es par hacemos $(3*16+1)/4=13$. El tercer número: $(13-1)/4=3$, como es par hacemos $(3*3+1)/4=1$. El cuarto número: $(1-1)/4=0$. El quinto número $(0-1)/4=-0.25$, como es par hacemos $(3*(-0.25)+1)/4=0.1875$. El sexto número: $(0.1875-1)/4=-0.171875$, como no es divisible hacemos $(3*(-0.171875)+1)/2=0.140625$. El séptimo número: $(0.140625-1)/4=-0.184375$, como no es divisible hacemos $(3*(-0.184375)+1)/2=0.1109375$. El octavo número: $(0.1109375-1)/4=-0.2125$, como es par hacemos $(3*(-0.2125)+1)/4=0.059375$. El noveno número: $(0.059375-1)/4=-0.23046875$. El décimo número: $(-0.23046875-1)/4=-0.351171875$, como no es divisible hacemos $(3*(-0.351171875)+1)/2=-0.26340625$. El undécimo número: $(-0.26340625-1)/4=-0.3658671875$. Ahora $(-0.3658671875-1)/4=-0.4164671875$, como es par hacemos $(3*(-0.4164671875)+1)/4=-0.3123515625$. Seguimos obteniendo 0 y 1, 0, 1, 0, 1, ...

La sucesión está formada por los números: 65, 49, 37, 9, 7, 11, 17, 13, 3, 5, 1, 0, 1, 0, 1, ...

Reglas a aplicar: Si el número (m) es impar hacer $(m-1)/4$. Si el resultado es un número decimal, hacer $(3*m+1)/2$. Si el resultado es un número par, hacer $(3*m+1)/4$

Vemos que para calcular los impares que llegan a un impar : $4*m+1$, donde m es el primero de ellos.

$4*1+1=5$, $4*5+1=21$, $4*21+1=85$, $4*85+1=341$, $4*341+1=1365$, ... son los impares que llegan al 1.

$4*3+1=13$, $4*13+1=53$, $4*53+1=213$, $4*213+1=853$, $4*853+1=3413$, ... son los impares que llegan al 5.

Vamos a crear una sucesión que empezando con cualquier número entero positivo acabará siempre en el número 1.

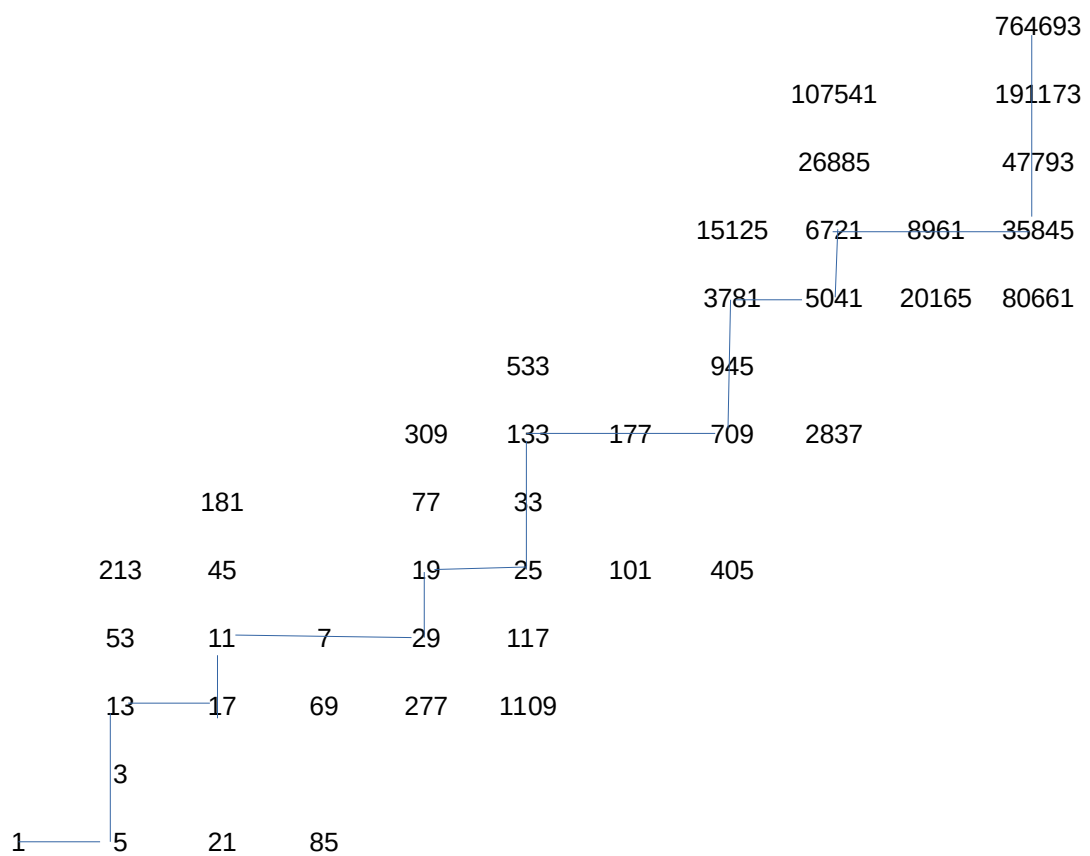
Si empezamos con un número par, lo tenemos que multiplicar por 3, sumarle 1 y dividirlo por 4. Si es un número impar, le tenemos que restar 1 y dividirlo entre 4. Si el número no es divisible entre 4, lo multiplicaremos por 3, le sumaremos 1 y lo dividiremos por 2. Siguiendo estas tres reglas, la sucesión de números impares siempre acabará en el número 1.

Ejemplo: Empezamos la sucesión con el número 65, el número siguiente lo calculamos $(65-1)/4=16$, como es par hacemos $(3*16+1)/4=49$. El tercer número: $(49-1)/4=12$, como es par hacemos $(3*12+1)/4=37$

El cuarto número: $(37-1)/4=9$. El quinto número $(9-1)/4=2$, como es par hacemos $(3*2+1)/4=7$. El sexto número: $(7-1)/4=1,5$, como no es divisible hacemos $(3*1,5+1)/2=11$. El séptimo número: $(11-1)/4=2,5$, como no es divisible hacemos $(3*2,5+1)/2=17$. El octavo número: $(17-1)/4=4$, como es par hacemos $(3*4+1)/4=13$. El noveno número: $(13-1)/4=3$. El décimo número: $(3-1)/4=0,5$, como no es divisible hacemos $(3*0,5+1)/2=5$ El undécimo número: $(5-1)/4=1$. La sucesión está formada por los números: 65, 49, 37, 9, 7, 11, 17, 13, 3, 5, 1

Reglas a aplicar: Si el número (m) es impar hacer $(m-1)/4$. Si no es divisible hacer $(3*m+1)/2$. Si el número es par hacer $(3*m+1)/4$

La ruta de los impares hasta llegar al número 1 es esta:



En este ejemplo vemos la ruta del impar 764693 hasta llegar al 1. La ruta se sigue de esta forma:

$(764693-1)/4=191173$, $(191173-1)/4=47793$, $(47793-1)/4=11948$, porque ese número es par, hay que hacer: $(3*47793+1)/4=35845$, Seguimos, $(35845-1)/4=8961$, $(8961-1)/4=2240$, como que es par hacemos $(3*8961+1)/4=6721$, $(6721-1)/4=1680$, como que es par hacemos $(3*6721+1)/4=5041$, $(5041-1)/4=1260$, como es par hacemos $(3*5041+1)/4=3781$, $(3781-1)/4=945$, $(945-1)/4=236$, como que es par hacemos $(3*945+1)/4=709$, $(709-1)/4=177$, $(177-1)/4=44$, como que es par hacemos $(3*177+1)/4=133$, $(133-1)/4=33$, $(33-1)/4=8$, como que es par hacemos $(3*33+1)/4=25$, $(25-1)/4=6$, como que es par hacemos $(3*25+1)/4=19$, $(19-1)/4=4,5$ como que es un número decimal hacemos $(3*19+1)/2=29$, $(29-1)/4=7$, $(7-1)/4=1,5$ como es decimal hacemos $(3*7+1)/2=11$, $(11-1)/4=2,5$ como es decimal hacemos $(3*11+1)/2=17$, $(17-1)/4=4$, como es par hacemos $(3*17+1)/4=13$, $(13-1)/4=3$, $(3-1)/4=0,5$ como que es decimal hacemos $(3*3+1)/2=5$, $(5-1)/4=1$

El 764693 llega al 35845 pasando por el 191173 y el 47793. El 35845 llega al 6721 pasando por el 8961. El 6721 llega directamente al 5041.

El 5041 llega directamente al 3781. El 3781 llega al 709 pasando por el 945. El 709 llega al 133 pasando por el 177. El 133 llega al 25 pasando por el 33,

El 25 llega directamente al 19. El 19 llega directamente al 29. El 29 llega al 11 pasando por el 7. El 11 llega directamente al 17, El 17 llega directamente al 13,

El 13 llega al 5 pasando por el 3 y el 5 llega directamente al 1.

Todo este entramado que forman los números impares es un fractal infinito, regular, que no puedo visualizar en mi imaginación.

La base del fractal la imagino como una esfera con una conexión en su parte superior a la que se puede conectar un tubo. Esta conexión es el número 1.

El tubo que uniremos a esa conexión es un tubo con infinitas conexiones. La primera conexión de este segundo tubo es el número 5, la segunda el número 21, la tercera el 85, . . .

En cada una de esas conexiones hay otros tubos que tienen a su vez infinitas conexiones, a las que se unen otros tubos, y así de manera infinita.

En el ejemplo vemos el tubo de la conexión 5, que tiene a su vez las conexiones 3, 13, 53, 213, . . .

Todas las conexiones de cada tubo representan a los números impares que llegan a la conexión (un impar) a la que está unido el tubo.

El tubo que está unido a la conexión 5, tiene a su vez las conexiones de los impares que llegan al 5.

Los impares o conexiones que tienen cada tubo se calculan mediante dos fórmulas. Solamente es necesario saber el impar de la conexión a la que se une el tubo.

Si el impar de la conexión a la que se unirá el tubo es de la forma $6n-1$ que sus dígitos suman 2, 5 y 8, la fórmula para hallar las conexiones de ese tubo es: $1/6(m*4^n-2)$

Si el impar de la conexión a la que se unirá el tubo es de la forma $6n-5$ que sus dígitos suman 1, 4 y 7, la fórmula para hallar las conexiones de ese tubo es: $1/3(m*4^n-1)$

En el ejemplo, el tubo que conecta al 5 tiene a su vez las conexiones del 3, 13, 53, 213, . . . porque $1/6(5*4^n-2) = 3, 13, 53, 213, \dots$

El tubo que conecta al 13 tiene a su vez las conexiones del 17, 69, 277, . . . porque $1/3(13*4^n-1) = 17, 69, 277, \dots$

Hay conexiones a las que no se conecta ningún cubo. Son las conexiones de los impares de la forma $6n-3$ que sus dígitos suman 3, 6 y 9.

Obtenemos un fractal formado por un primer tubo con infinitas conexiones a las que se unen infinitos tubos, también con infinitas conexiones que unen infinitos tubos.

El camino a través de los tubos de cualquier impar empieza en el tubo donde se encuentra y sigue por los otros tubos a través de las conexiones hasta llegar al final que es el tubo del 1.

La ruta de los impares hasta llegar a 1 es ésta:

*Dado un número impar cualquiera (m) le restamos 1 y lo dividimos entre 4. El resultado será uno de estos tres posibles:
Un número impar, un número par o un número decimal.*

Si el resultado es un número impar, no hacemos nada más.

Si el resultado es un número par, lo restamos al número impar (m).

Si el resultado es un número decimal, lo multiplicamos por 2, le sumamos 1 y lo sumamos a (m).

Ejemplo: Empezamos con el impar 341.

Los siguientes impares de la sucesión los calculamos según lo dicho anteriormente.

$$(341-1)/4=85.$$

$$(85-1)/4=21.$$

$$(21-1)/4=5.$$

$$(5-1)/4=1$$

La sucesión es 341, 85, 21, 5, 1.

Otro ejemplo: Empezamos con el impar 237.

Los siguientes impares los calculamos: $(237-1)/4=59$.

$$(59-1)/4=14,5 \text{ el impar: } 2*14,5+1+59=89.$$

$$(89-1)/4=22 \text{ el impar: } 89-22=67.$$

$$(67-1)/4=16,5 \text{ el impar: } 2*16,5+1+67=101.$$

$$(101-1)/4=25.$$

$$(25-1)/4=6 \text{ el impar: } 25-6=19.$$

$$(19-1)/4=4,5 \text{ el impar: } 2*4,5+1+19=29.$$

$$(29-1)/4=7.$$

$$(7-1)/4=1,5 \text{ el impar: } 2*1,5+1+7=11.$$

$$(11-1)/4=2,5 \text{ el impar: } 2*2,5+1+11=17.$$

$$(17-1)/4=4 \text{ el impar: } 17-4=13.$$

$$(13-1)/4=3.$$

$$(3-1)/4=0,5 \text{ el impar: } 2*0,5+1+3=5.$$

$$(5-1)/4=1.$$

La sucesión es la siguiente: 237, 59, 89, 67, 101, 25, 19, 29, 7, 11, 17, 13, 3, 5, 1.

De los tres resultados posibles que obtenemos al dividir entre 4 al impar menos 1, hay dos que disminuyen su valor y uno que lo aumenta.

Si disminuye, lo puede hacer hasta llegar a 1, pero si aumenta, lo puede hacer infinitamente y precisamente por esto también hay infinitas probabilidades que disminuya y más pronto o más tarde llegará al 1.

Un ejemplo podría ser un edificio de muchos pisos (de hecho, infinitos pisos). Los pisos están enumerados con los números impares, empezando con el 1, 3, 5, 7, . . . En cada piso hay tres ascensores. Todos están programados para subir o bajar un número predeterminado de pisos. Un ascensor sube al piso $(3*m+1)/2$. Otro ascensor baja al piso $(m-1)/4$ y el tercero baja al $(3*m+1)/4$. El piso en que nos encontramos es "m".

Desde el piso número 15 llegaremos al primer piso después de coger 7 ascensores, pasando por los pisos 23, 35, 53, 13, 3, 5 y 1. Cuatro veces ha subido y tres veces ha bajado.

Dos de los tres ascensores van a pisos inferiores y solamente un ascensor siempre va a los pisos superiores, por lo que las probabilidades sobre tres son dos que bajan y una que sube. Además, como que el edificio tiene infinitos pisos, hay infinitas probabilidades de coger el ascensor que sube, pero tenemos el doble de probabilidades de coger alguno de los dos ascensores que bajan y llegar al piso número 1.

Creo que esto explica el motivo por el cual siempre se llega al número 1 en la conjetura de Collatz.

La Conjetura de Collatz es demostrable mediante FRACTALES y PROBABILIDADES.

Pollença, 21 de Julio de 2018

Conjetura de Collatz

La sucesión obtenida mediante la aplicación del enunciado a un número inicial cualquiera está formada por números pares y números impares, pero la única función de los pares es llegar al próximo número impar, por lo que propongo eliminarlos y formar la sucesión con solo los números impares.

Para ello haremos lo siguiente, dado un número entero (m) :

Si es un número par, lo dividiremos entre dos hasta llegar a un número impar.

Si es un número impar, $(m-1)/4$. Obtendremos parte de una sucesión infinita, decreciente, de números impares que acaba cuando el resultado es un número par o un número decimal.

Un ejemplo : Comenzamos con el número 38228. Como es un número par, lo dividimos entre 2 las veces necesarias hasta llegar al 9557. Seguimos $(9557-1)/4=2389$. $(2389-1)/4=597$. $(597-1)/4=149$. $(149-1)/4=37$. $(37-1)/4=9$. $(9-1)/4=2$. Como es un número par, esto nos indica que la sucesión acaba con el número impar 9.

Otro ejemplo : Comenzamos por el 469. $(469-1)/4=117$. $(117-1)/4=29$. $(29-1)/4=7$. $(7-1)/4=1,5$. Como es un número decimal, esto nos indica que la sucesión termina con el número 7.

Otras sucesiones están formadas solamente por un solo número impar : El número 966 par, lo dividimos entre 2 y obtenemos el impar 483. $(483-1)/4=120,5$ La sucesión acaba con el 483. Aunque esta sucesión esté formada solamente por el impar 483, podemos saber todos los impares anteriores aplicando $4*m+1$, donde m es el número impar : $4*483+1=1933$. $4*1933+1=7733$. $4*7733+1=30933$ En cualquier sucesión podemos hacer lo mismo.

Para saber a qué impar conecta cada sucesión a través de su último impar, haremos :

Si el último impar ha dado un número par, como es el caso del 9 en el ejemplo anterior, haremos $(3*9+1)/4=7$. La sucesión que termina en 9 estará unida a otra sucesión mediante el impar 7.

Si el último par ha dado como resultado un número decimal, como es el caso del 7 en el ejemplo anterior, haremos $(3*7+1)/2=11$. La sucesión que termina en 7 estará unida a otra sucesión mediante el impar 11.

Todas las sucesiones unidas entre sí forman un fractal infinito, cuyo tronco principal es la sucesión de los números impares que acaban en 1. ($4*1+1=5$, $4*5+1=21$, $4*21+1=85$, $4*85+1=341$, ...)

Este tronco principal tiene a su vez conectadas a cada número otras sucesiones, también infinitas, a las cuales también hay conectadas otras sucesiones, que también conectan otras sucesiones, etc.

El último número del tronco principal antes de llegar al 1 es el 5, que conecta con la sucesión que calculamos de esta manera : $(4*5-2)/6=3$, $4*3+1=13$, $4*13+1=53$, $4*53+1=213$, ...

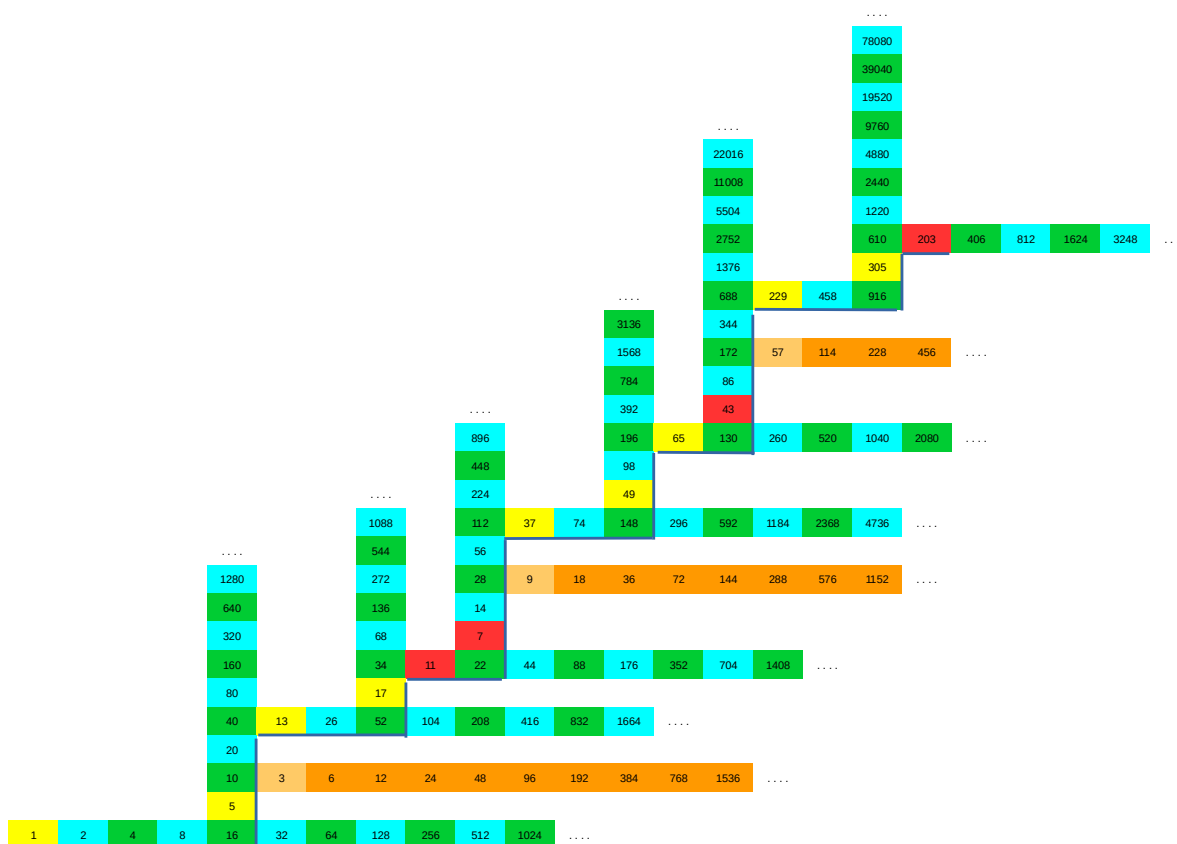
Calculo de los impares que conectan con los impares de la forma $6n-1$, que sus dígitos suman 5, 2, 8 aplicamos $(m*4-2)/6$, donde m es el impar al que conectan.

Si los impares son de la forma $6n-5$ que sus dígitos suman 1, 7, 4 aplicamos $(m*4-1)/3$

Hay impares que no forman ninguna sucesión porque no llegan a ellos ningún impar. Son los impares de la forma $6n-3$ que sus dígitos suman 3, 9, 6.

La sucesión que se forma con el enunciado de la conjetura de Collatz sin los números pares, la forman números impares que forman parte de otras sucesiones de impares perfectamente organizadas con una distancia entre ellos siempre igual. La distancia entre los impares en todas las sucesiones es la misma y es $(m-1)/4$, motivo por el cual siempre llegamos al 1 a través de las diferentes sucesiones conectadas entre sí.

Diagrama de un ejemplo empezando la secuencia con el número 203

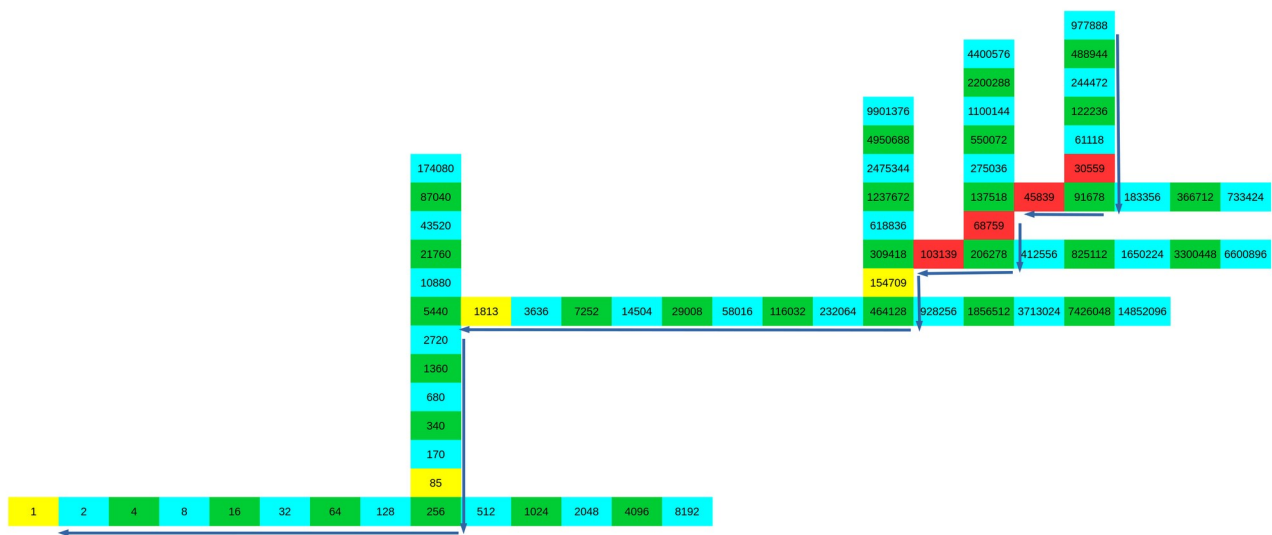


Los elementos marcados en verde son los pares $6n+4$ que reciben las otras progresiones a través de su impar cota inferior.

Los elementos en azul, al no poder recibir nunca ninguna progresión que les una, provocan como mínimo dos divisiones entre 2.

En color naranja las progresiones que sus elementos son múltiplos de 3, a las que no se une ninguna progresión. Los números pares a los que se unen estas progresiones provocan también una división entre 2. Estas tres progresiones que hemos puesto en el diagrama no participan en la secuencia, pero las hemos puesto para comprobar que su presencia provoca una división más entre 2 en los pares que enlazan.

En el diagrama distinguimos en rojo los impares 203, 43, 7 y 11 (todos valor de n impar) que han provocado que la secuencia sea ascendente en estos puntos. En color amarillo los impares con valor de n par, que son los responsables de que la secuencia sea descendente y finalice en el 1.



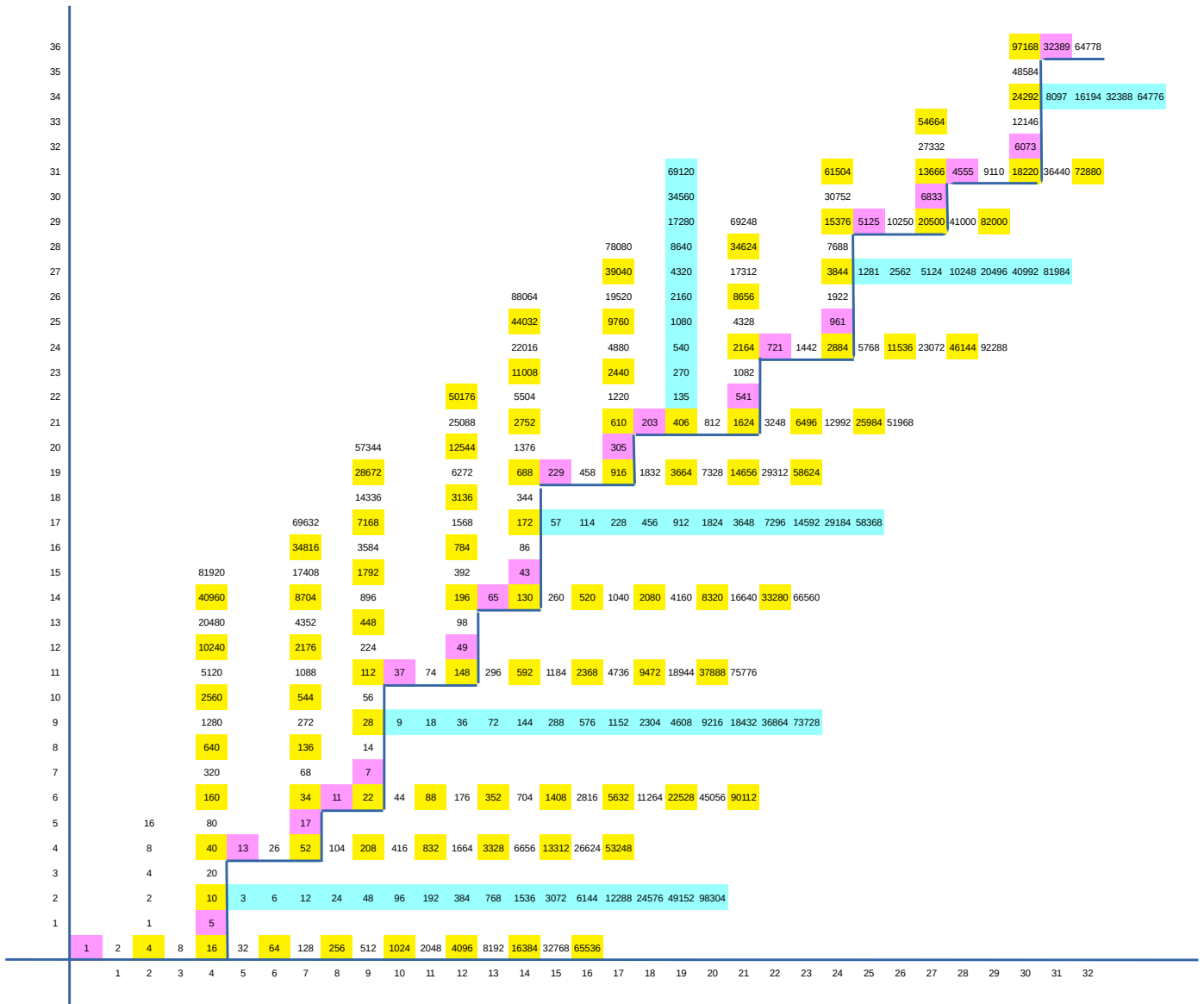
Este diagrama formado con las progresiones que intervienen en la secuencia empezando con el número 977888, es un buen ejemplo de la importancia que tienen los impares que tienen valor de n par, el 154709, 1813 y 85, que caen precipitadamente hasta el 1, porque se unen a la siguiente progresión con el elemento que ocupa, como mínimo, el tercer lugar de su progresión.

En cambio, los impares con valor de n impar, el 30559, 45839, 68759 y 103139 son los responsables de que la secuencia sea ascendente en ese tramo, porque todos ellos se unen a la siguiente progresión con el segundo elemento de la misma, el cual necesita solo una división entre 2 para llegar al siguiente impar, que resulta siempre $(n+1)$ mayor.

A continuación un diagrama al que hemos añadido las coordenadas cartesianas, de la secuencia empezando con el número 64778, que necesita 68 iteraciones (36 + 32) para llegar al 1.

La secuencia generada es: 64778, 32389, 97168, 48584, 24292, 12146, 6073, 18220, 9110, 4555, 13666, 6833, 20500, 10250, 5125, 15376, 7688, 3844, 1922, 961, 2884, 1442, 721, 2164, 1082, 541, 1624, 812, 406, 203, 610, 305, 916, 458, 229, 688, 344, 172, 86, 43, 130, 65, 196, 98, 49, 148, 74, 37, 112, 56, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Hay 26 pasos "estériles", que son los números pares que no unen progresiones (sin color) y los números pares que reciben las progresiones que tienen los elementos múltiplos de 3, que no les enlaza ninguna progresión. Estos números "estériles" son espacios entre dos impares y cada uno de ellos es una división entre 2, por lo que la secuencia es descendente.



Las progresiones marcadas en azul son las que no enlazan con ellas otras progresiones, porque sus elementos son múltiplos de 3.

Los números sin color son los elementos de las progresiones que no enlazan ninguna progresión.

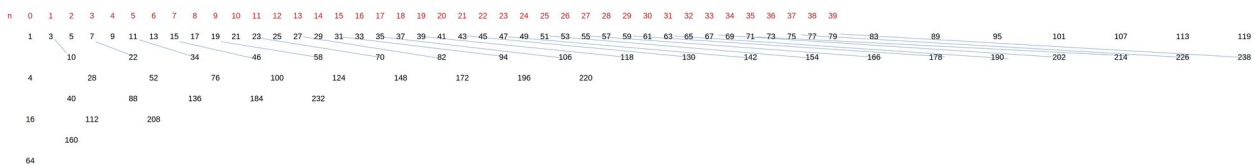
La presencia de esos pasos "estériles" es lo que provoca que cualquier secuencia descienda hasta terminar en el 1.

Cualquier número de X+Y (pasos) es posible para cualquier número de cualquier secuencia.

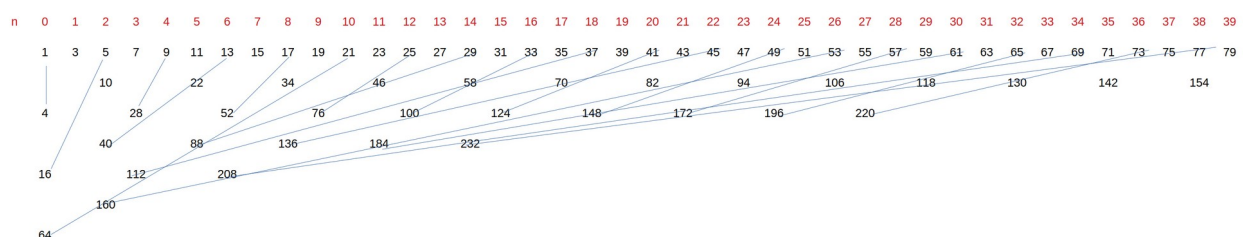
[illegible]

En las dos tablas siguientes hemos sustituido los números pares por los números obtenidos después de aplicar la operación del algoritmo de Collatz a los 40 números impares.

Cuando el número impar $(2n+1)$ tiene n impar, o sea todos los números de la forma $(4n+3)$, el número resultante siempre llega al siguiente impar con solo una división entre 2, por lo que el impar siempre es $(n+1)$ mayor que el anterior y la secuencia es ascendente.



Los números de la forma $(8n+5)$ producen números pares que necesitan más de dos divisiones para llegar al próximo impar. Si el par necesita tres divisiones para llegar al impar, éste es $1/4(5n+2)$ menor que el anterior. Si el número par necesita cuatro divisiones entre 2 para llegar al siguiente impar, éste es menor que el anterior, . . . incluso algunos impares producen números pares que con n divisiones entre 2 llegan directamente al 1. Estos impares son de la forma $1/3(4^n-1)$.



Aquí vemos los números pares que han resultado de aplicar el algoritmo a esos 20 impares que tienen el valor de n par. Diez de ellos necesitan dos divisiones. Cinco de ellos necesitan tres divisiones. Tres de ellos necesitan cuatro divisiones. Uno de ellos necesita 5 divisiones y otro que necesita 6 divisiones. Cuantas más divisiones sean necesarias, más rápidamente la secuencia descenderá hasta alcanzar el 1.

Aunque existe la misma cantidad de números impares con el valor de n impar que con el valor de n par y la probabilidad de salir unos u otros es la misma, la secuencia siempre descenderá, porque si unos facilitan solo una división entre 2 del número par resultante y la secuencia asciende, los otros facilitan siempre más de una y la secuencia desciende a mayor velocidad.

Si escribimos ordenadamente los números naturales colocándolos de forma que los impares queden en la primera fila y los demás números debajo del que es su mitad, formaremos una tabla con los números naturales. Escribir los números ordenadamente: 1, 2, 3, 4, . . . no por filas ni columnas. Los primeros 80 números quedan colocados como los vemos en esta tabla.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79			
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78																							
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76																																	
8	24	40	56	72																																						
16	48	80																																								
32																																										
64																																										

Cualquier cantidad de números escritos, estarán siempre en la misma disposición: x en la primera fila, $x/2$ en la segunda, $x/4$ en la tercera, $x/8$ en la cuarta, $x/16$ en la quinta, $x/32$ en la sexta, . . .

Si formamos una sucesión de números empezando por el 1 y terminando con un número par, obtendremos una progresión en la que habrá el mismo número de números pares ($m+1$) que de impares (m), porque la diferencia constante es 1.

Pero podemos introducir variantes, por ejemplo sumarle 1 a los impares y restarle 3 a los pares. Como será una sucesión decreciente, podemos empezarla por cualquier número. Si comenzamos con el número 28, la secuencia es: 28, 25, 26, 23, 24, 21, 22, 19, 20, 17, 18, 15, 16, 13, 14, 11, 12, 9, 10, 7, 8, 5, 6, 3, 4, 1.

Otra variante podría ser sumarle 1 a los números impares y dividir entre 2 los números pares. Si empezamos la secuencia con el número 54, obtenemos: 54, 27, 28, 14, 7, 8, 4, 2, 1.

Cuando sumamos 1 a cualquiera de los números impares (m) resulta un número par de la tabla ($m+1$) y si lo dividimos entre 2^n volvemos a obtener otro número impar de la tabla que es $(m+1)/2^n$, menor que (m) y por esto la secuencia siempre acaba en 4, 2, 1.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79		
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78																						
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76																																
8	24	40	56	72																																					
16	48	80																																							
32																																									
64																																									

Las secuencias están formadas por un número indeterminado de ciclos con tres números de la tabla: (m), ($m+1$) y $(m+1)/2^n$.

En la secuencia que hemos empezado con el número 54:

Inicio: 54, $54/2=27$.

Primer ciclo: $m(27)$, $27+1=28$, $28/4=7$

Segundo ciclo: $m(7)$, $7+1=8$, $8/8=1$.

El proceso se repetirá con cualquier número de la tabla que elijamos y siempre finalizaremos en el último ciclo con los números 4, 2, 1.

Otra variante puede ser multiplicar por 3 a los números impares, sumarle 1 y dividir entre 2 a los números pares. Los ciclos de las secuencias son los mismos (m), ($m+1$) y $(m+1)/2^n$.

El resultado es el mismo y el proceso acaba siempre en el último ciclo 4, 2, 1.

El algoritmo de Collatz es la variante anterior, que triplica el número cuando es un impar, antes de sumarle 1.

Es el mismo proceso pero ajustando la tabla a los números de la secuencia cuando resulte un número mayor. Por ejemplo, si queremos empezar la secuencia de Collatz con el número 154, tendremos que escribir los números en la tabla hasta el 232, porque $154/2=77$, $3*77=231$ y el 232 porque el último siempre debe ser un número par.

Inicio: 154, $154/2=77$.

Primer ciclo: $3*77=231$, $231+1=232$, $232/2=116$, $116/2=58$, $58/2=29$.

Segundo ciclo: $3*29=87$, $87+1=88$, $88/2=44$, $44/2=22$, $22/2=11$.

Tercer ciclo: $3*11=33$, $33+1=34$, $34/2=17$.

Cuarto ciclo: $3*17=51$, $51+1=52$, $52/2=26$, $26/2=13$.

Quinto ciclo: $3*13=39$, $39+1=40$, $40/2=20$, $20/2=10$, $10/2=5$.

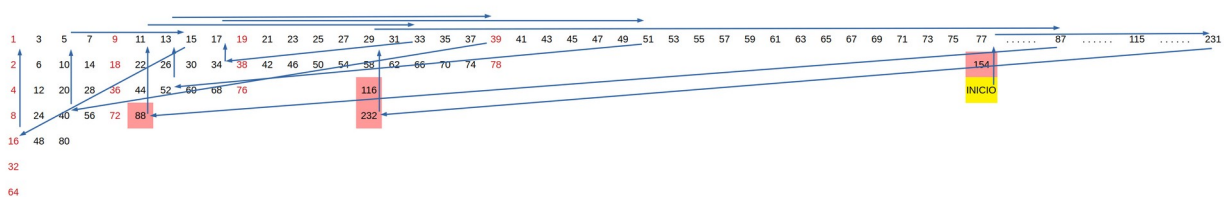
Sexto ciclo: $3*5=15$, $15+1=16$, $16/2=8$, $8/2=4$, $4/2=2$, $2/2=1$.

La razón por la que separamos y distinguimos los diferentes ciclos es para saber si tenemos que aumentar los números de la tabla o si podemos seguir con la misma. En este ejemplo no ha sido necesario, pues la tabla es de los 232 primeros números y ninguno de los ciclos los ha superado.

La secuencia obtenida ha sido: 154, 77, 232, 116, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

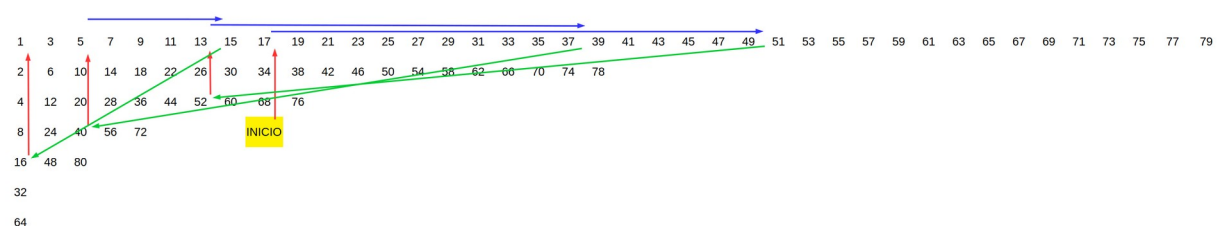
Cuando la secuencia alcance un número mayor, tenemos que seguir escribiendo números en la tabla hasta llegar a ese número.

Para ver gráficamente una secuencia obtenida con el algoritmo de Collatz, tenemos que ver todos los ciclos en una tabla en la que haya escrito el número más alto alcanzado.



En esta tabla vemos los seis ciclos de la secuencia que empieza con el 154. Los cuatro números destacados en color son números que no corresponden a esta tabla, pues aún no estarían escritos. Para poner el 88 tendríamos que haber escrito antes el 87 en la primera fila. Antes del 116, el 115 en la primera fila, etc. La tabla para esta secuencia acabaría con el 231 en la primera fila y el 232 en los pares. La que hemos puesto, por falta de espacio, es una tabla "comprimida".

Esta es la tabla de la secuencia de Collatz que empieza con el 68. Como no se ha alcanzado ningún número superior a 80, vemos en ella todos los ciclos de la secuencia.



inicio				m															
72	36	18	9	27	28	m+1													
					14														
					7	(m+1)/4													
				m	21		m	m+1											
				m+1	22	11	33	34											
						(m+1)/2		17	(m+1)/2										
							m	51		m	m+1								
							m+1	52	26	13	39	40							
									(m+1)/4		20								
											10								
											5	(m+1)/8							
										m	15								
										m+1	16	8	4	2	1				
																(m+1)/16			

Cada ciclo lo forman tres elementos: (m) , $(m+1)$ y $(m+1)/2^n$.

El tercer elemento $(m+1)/2^n$ siempre es menor que (m) : $7 < 27$, $11 < 21$, $17 < 33$, $13 < 51$, $5 < 39$ y $1 < 15$.

El motivo de que la secuencia sea corta o larga se debe a la forma numérica que tienen los impares que resultan en cada iteración. Una secuencia no podría finalizar nunca, o sea nunca llegaría al último ciclo que acaba en 1, si todos los impares resultantes fuesen de la forma $(4n-1)$.

En la primera fila se sitúan las mitades de los impares. En la segunda los i

Una secuencia basada en esa tabla puede ser:

Inicio: La mitad de cualquier número natural

Si el número es impar: Le restamos 1 y dividimos por 2.

Si el número es par lo multiplicamos por 3 y le sumamos 1

Si es la mitad de un impar lo multiplicamos por 6 y le suma

Repetimos el proceso con todos los resultados hasta llegar al 1

Primer ciclo: 22

Segundo ciclo: 6*5 E1-2-25 25-1-24 24/4-

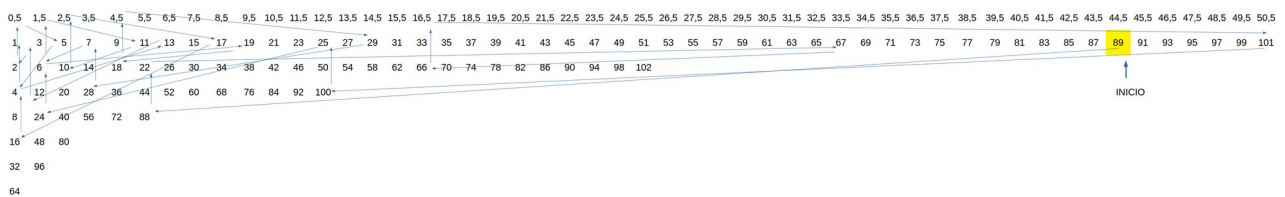
Tercer ciclo: 6×8 5+2-53 53-1-52

Quarto ciclo: $6 \times 0 \ 5+2-5 \ 5-1-1 \ 1/1-1$

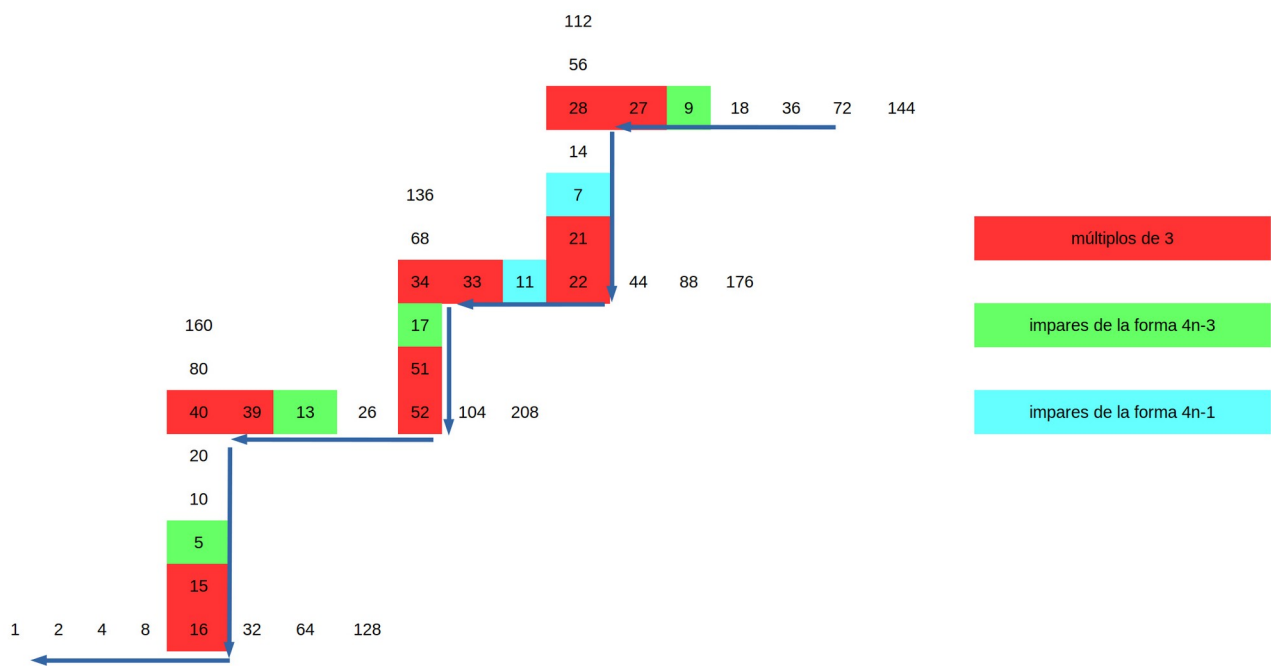
[illegible]

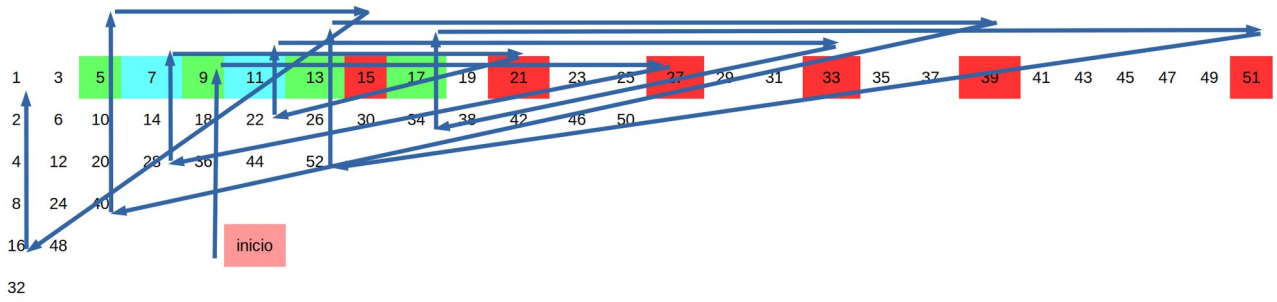
Otra secuencia empezándola con el número 89, (1/2 de 178):

Para ver esta secuencia en la tabla, ésta tendría que estar formada por los números desde el 0,5 hasta el 102 con una diferencia de 0,5 entre cada término.



Los números impares de la secuencia: 89, 67, 101, 25, 19, 29, 7, 11, 17, 13, 3, 5, 1.





Ciclos:

36, 9, 27
 28, 7, 21
 22, 11, 33
 34, 17, 51
 52, 13, 39
 40, 5, 15
 16, 1, 3
 4, 1, 3

UNA VARIACIÓN EN EL ALGORITMO DE LA CONJETURA DE COLLATZ

por

Miquel Cerdà Bennassar

Polígono 4, parcela 833
07460 Pollença – Illes Balears
email: dosena@riodena.com
Tel. +34 637 703 527

Febrero 2019

Impredecible, desconcertante, enigmática y caótica. Estos son algunos de los calificativos de la secuencia que se forma aplicando las operaciones del algoritmo de la conjetura de Collatz.

Las operaciones de este algoritmo son dos:

$3m+1$ si m es impar
 $m/2$ si m es par

Aplicada la operación correspondiente a cualquier número natural y repitiendo el proceso con cada resultado hasta obtener el número 1, se forma la secuencia de los números granizo o de los números maravillosos.

Si en el algoritmo se introduce una tercera operación, la secuencia que se forma cumple con la conjetura y también acaba siempre con el número 1.

Las operaciones del algoritmo son tres:

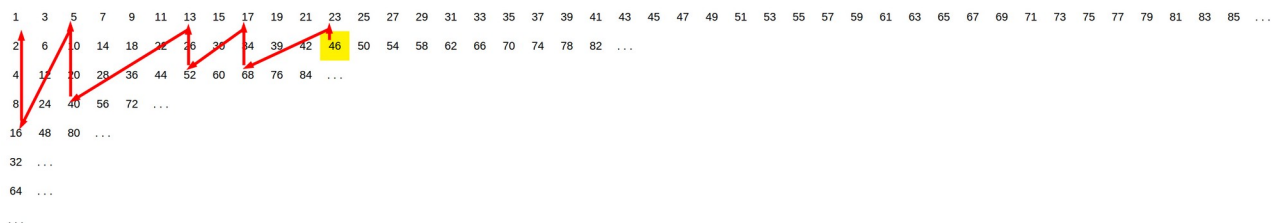
$3m+1$ si m es impar de la forma $4n+1$
 $3m-1$ si m es impar de la forma $4n+3$
 $m/2$ si m es par

Algunos ejemplos:

Empezando la secuencia con el número 46:

46, 23, 68, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

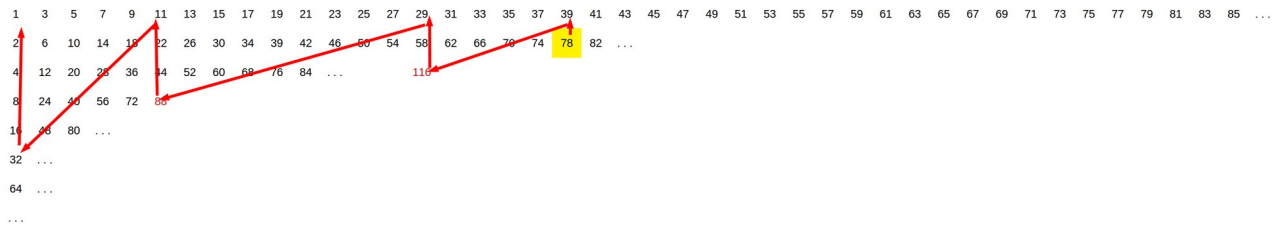
Su desarrollo en la tabla:

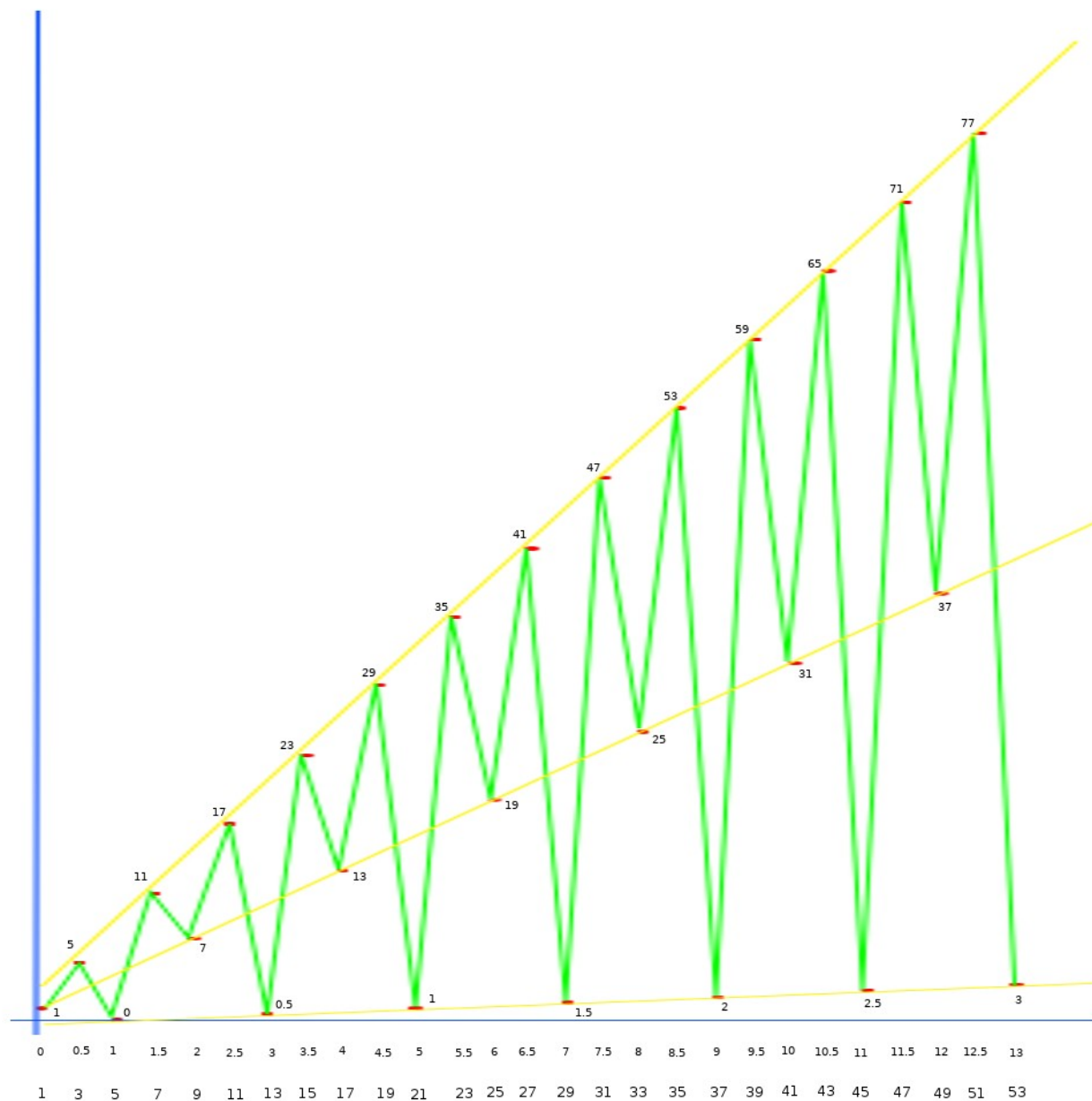


Empezando la secuencia con el número 78:

78, 39, 116, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 32, 16, 8, 4, 2, 1.

Su desarrollo en la tabla:





En la fila inferior los números impares y sobre cada uno de ellos, el resultado de aplicarles $(n-1)/4$. Sobre ellos en el diagrama los resultados de aplicarles las operaciones correspondientes a cada uno.

Cuando aplicamos el algoritmo a los números impares obtenemos:

Impar	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
Resulta	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5

Cuando aplicamos el algoritmo a los números pares obtenemos:

Par	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Resulta	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61

Cuando aplicamos el algoritmo a los números que son $\frac{1}{2}$ de un impar obtenemos:

$\frac{1}{2}$ impar	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5
Resulta	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65

EL PURGATORIO

Se cree que todo aquel que entra en el Purgatorio terminará entrando al Cielo tarde o temprano, pero antes tendrá que librarse de todos los pecados que cometió en vida.

Encontrará ángeles malos y ángeles buenos, el mismo número de malos que de buenos y su número es infinito, pero no los conocerá porque todos tienen el mismo semblante.

El que entra en el purgatorio es un $(2n+1)$ y (n) es el número de pecados que cometió. Su nombre es el número.

Cada vez que se encuentra con un ángel malo sus pecados se incrementan en $1/2(n+1)$.

Los encuentros con los ángeles buenos siempre disminuyen sus pecados en más o menos cantidad, dependiendo del tipo de ángel, pues los hay de muchos tipos diferentes. Los que menos le quitan son los que se llaman $(8n+1)$, que le limpian de una cuarta parte de todos sus pecados $1/4(n)$ pero también están los $(8n+5)$ que le quitan muchos más y los que, si tiene la suerte de encontrarlos, le quitarán la totalidad de los pecados. Estos son los ángeles buenos llamados $1/3(4^n-1)$.

No saldrá del purgatorio hasta que se haya purificado despojándole de todos los pecados y su (n) sea cero y entonces su nombre será Uno.

La probabilidad de encontrarse con un ángel malo o con un ángel bueno es la misma, el 50 por ciento, pero mientras que todos los ángeles malos que encuentra le aumentan sus pecados en $1/2(n+1)$, cada ángel bueno le puede quitar desde una cuarta parte hasta todos los pecados y el que entra en el purgatorio siempre sale porque allí el tiempo no cuenta.

Dos ejemplos:

Una persona cuyo nombre es Diecisiete y tiene 8 pecados cuando entra en el valle.

El primer encuentro es con un ángel bueno, que le quita $1/4$ de sus pecados, $1/4(n)$. Sigue con 6 pecados y su nombre es ahora 13.

El próximo encuentro es con otro ángel bueno que le quita 4 pecados, $1/8(5n+2)$. Sigue con 2 pecados y su nombre es ahora 5.

El próximo encuentro es también con otro ángel bueno que le quita los 2 pecados que le quedan.

Ya puede entrar al cielo, porque ya no tiene pecados y ahora su nombre es Uno.

Otro ejemplo de una persona llamada Nueve, con 4 pecados.

El primer encuentro es con un ángel bueno, que le quita $1/4$ de sus pecados. Ahora tiene 3 pecados y su nombre es Siete.

El siguiente encuentro es con un ángel malo, que le da 2 pecados, $1/2(n+1)$, y su nombre es ahora Once.

El siguiente encuentro es también con un ángel malo, quien le da 3 pecados, $1/2(n+1)$, y su nombre ahora es Diecisiete.

El siguiente encuentro es con un ángel bueno, que le quita 2 pecados, $1/4(n)$, quedándole 6 pecados y su nombre ahora es Trece.

Vuelve a encontrarse otro ángel bueno, que le quita 4 pecados, $1/8(5n+2)$. Ahora le quedan 2 pecados y su nombre es Cinco.

El siguiente encuentro es también con un ángel bueno, que le quita los dos pecados que le quedan.

Ahora su nombre es Uno y se irá al cielo, pues ya no le queda ningún pecado que purgar.

Los actores de esta historia:

Las almas son $(2n+1)$ y sus nombres son los de los números según los pecados cometidos (n) .

Los ángeles del mal son $(2n+1)$ con n impar.

Los ángeles del bien son $(2n+1)$ con n par.

El alma que entra en el purgatorio es el número con el que se empieza la secuencia de la conjetura de Collatz.

UNA OBRA DE TEATRO EN UNA TABLA DE NÚMEROS

La pregunta que me he hecho muchas veces es si Lothar Collatz encontró la fórmula del algoritmo de su conjetura persiguiendo el resultado. Siempre he pensado que no y que se encontró con ella de forma casual, sin buscar el resultado que descubrió, de lo contrario él mismo nos hubiese dado la demostración del problema.

Vamos a crear el escenario donde se representarán las impredecibles secuencias y poder disfrutar del espectáculo. Como toda obra de teatro, no entenderíamos el guion sin ver su representación.

El decorado de la escena es éste:

Una tabla cuadrangular con filas y columnas en la que se escriben números hasta llegar al más alto de la secuencia. Con cada secuencia diferente se cambia el decorado y se adapta la cantidad de números escritos al número más alto de cada una.

Los números se escriben ordenadamente, de forma que los impares queden en la primera fila y los demás números debajo del que es su mitad. Escribimos los números ordenadamente desde el 1 hasta el más alto de la secuencia, no por filas ni columnas.

Entra en escena la secuencia empezada con el número 11:

11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	...
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	...															
4	12	20	28	36	44	52	60	...																						
8	24	40	56	...																										
16	48	...																												
32	...																													
...																														

Los protagonistas de la obra en la formación de una secuencia con la aplicación del algoritmo, son los números naturales, pares e impares y las operaciones a que son sometidos son la multiplicación, la suma y la división.

Esta es la representación de la secuencia que resulta de aplicar las operaciones del algoritmo siguiendo estrictamente su enunciado con estas dos operaciones: Si el número m es impar hacer $3*m+1$ y si el número es par hacer $m/2$ las veces necesarias hasta llegar a un número impar, con el que se repite el proceso.

Pero yo la voy a desarrollar y representar en la tabla aplicando a los números tres operaciones y no dos: Si el número m es impar, la primera operación es $3*m$. La segunda operación es sumar 1 a $3*m$. Si el número es par, $m/2$ las veces que se pueda.

La misma secuencia empezada con el número 11:

11, 33, 34, 17, 51, 52, 26, 13, 39, 40, 20, 10, 5, 15, 16, 8, 4, 2, 1.

Visualmente la diferencia entre la secuencia obtenida con dos operaciones y la obtenida con tres operaciones es notoria:

El escenario donde podemos ver el desarrollo de la secuencia y conocer el gui3n, es la tabla formada con los n3meros naturales que sean necesarios, seg3n los n3meros que alcance la secuencia.

m	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	...					
2m	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	...																										
4m	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	...																																					
8m	8	24	40	56	72	...																																											
16m	16	48	80	...																																													
32m	32	...																																															
64m	64	...																																															
...	...																																																

Los n3meros sealados en color rojo son los que resultan de multiplicar por 3 a los n3meros impares. Los n3meros sealados en amarillo son los n3meros que resultan de sumar 1 a los impares m3ltiplos de 3.

La mayor cantidad de pares $6n-2$ se concentran en la columna del impar 1 con tres n3meros.
En segundo lugar la columna del 5 con dos n3meros.
Con un n3mero cada una las columnas del 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 35 y 41.

En la formaci3n de la secuencia con las operaciones del algoritmo, cuando se multiplica por 3 a un impar y se suma 1, resulta un n3mero par que es: $3(2n-1)+1=6n-2$
En la formaci3n de la secuencia, cuando se dividen entre 2 las veces que se pueda a los n3meros pares $6n-2$, resultan n3meros impares que son mayores o menores que su impar anterior, dependiendo de la fila que ocupan:

Primera fila de los n3meros pares (segunda de la tabla): Los impares resultan mayores que el anterior porque $(6n-2)/2=3n-1, > 2n-1$ La secuencia es ascendente en ese punto.

Segunda fila de los n3meros pares (tercera de la tabla): Los impares resultan menores que el anterior porque $(6n-2)/4=(3n-1)/2, < 2n-1$ La secuencia es descendente en ese punto.

Tercera fila de los n3meros pares (cuarta de la tabla): Los impares resultan menores que el anterior porque $(6n-2)/8=(3n-1)/4, < 2n-1$ La secuencia es descendente en ese punto.

Cuarta fila de los n3meros pares (quinta de la tabla): Los impares resultan menores que el anterior porque $(6n-2)/16=(3n-1)/8, < 2n-1$ La secuencia es descendente en ese punto.

Quinta fila de los n3meros pares (sexta de la tabla): Los impares resultan menores que el anterior porque $(6n-2)/32=(3n-1)/16, < 2n-1$ La secuencia es descendente en ese punto.

Sexta fila de los n3meros pares (s3ptima de la tabla): Los impares resultan menores que el anterior porque $(6n-2)/64=(3n-1)/32, < 2n-1$ La secuencia es descendente en ese punto.

As3 contin3a al infinito.

MI VISIÓN DE LA CONJETURA DE COLLATZ

Es esencial admitir que en esta tabla podrían estar todos los números naturales.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	...
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	...
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164	172	180	188	196	204	212	...
8	24	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200	216	232	248	264	280	296	312	328	344	360	376	392	408	424	...
16	48	80	112	144	176	208	240	272	304	336	368	400	432	464	496	528	560	592	624	656	688	720	752	784	816	848	...
32	96	160	224	288	352	416	480	544	608	672	736	800	864	928	992	1056	1120	1184	1248	1312	1376	1440	1504	1568	1632	1696	...
64	192	320	448	576	704	832	960	1088	1216	1344	1472	1600	1728	1856	1984	2112	2240	2368	2496	2624	2752	2880	3008	3136	3264	3392	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

En la primera fila todos los números impares $2n-1$ y en las demás filas los números pares $2^n(2n-1)$.

Ahora un ejemplo de la conjetura empezando la secuencia con el número 11:

11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Visualizamos en la tabla la ruta seguida por los números:

					inicio																							
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	...	
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	...	
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164	172	180	188	196	204	212	...	
8	24	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200	216	232	248	264	280	296	312	328	344	360	376	392	408	424	...	
16	48	80	112	144	176	208	240	272	304	336	368	400	432	464	496	528	560	592	624	656	688	720	752	784	816	848	...	
32	96	160	224	288	352	416	480	544	608	672	736	800	864	928	992	1056	1120	1184	1248	1312	1376	1440	1504	1568	1632	1696	...	
64	192	320	448	576	704	832	960	1088	1216	1344	1472	1600	1728	1856	1984	2112	2240	2368	2496	2624	2752	2880	3008	3136	3264	3392	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	

Cada columna de esta tabla es una sucesión geométrica de razón igual a 2, cota inferior el número impar de la primera fila y sin límite superior.

En la secuencia del ejemplo hay 5 sucesiones implicadas por las que el número 11 sigue la ruta hasta el final. Cuando la sucesión llega al número impar, el próximo número de la secuencia es un elemento de otra sucesión y este proceso se repite hasta llegar a la sucesión cuya cota inferior es el número 1.

El objetivo de las operaciones del algoritmo de la secuencia de Collatz es que las diferentes sucesiones se unan unas con otras: la cota inferior impar de una y un elemento par de otra, con el mismo valor de n :

$$3(2n-1)+1 = 6n-2$$

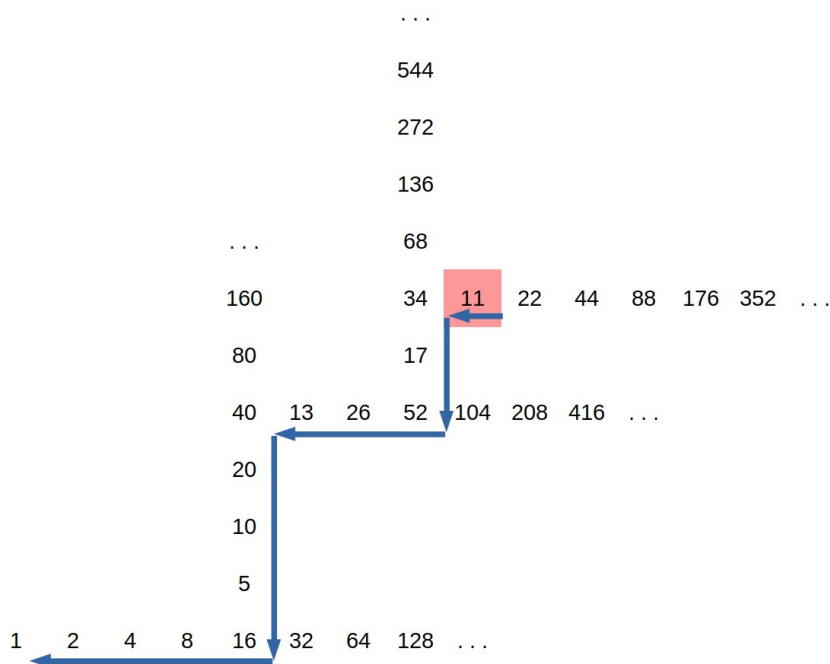
$2n-1$ se une a $6n-2$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 6 - 1 &= 11 \text{ y } 6 \cdot 6 - 2 = 34 \\ 2 \cdot 9 - 1 &= 17 \text{ y } 6 \cdot 9 - 2 = 52 \\ 2 \cdot 7 - 1 &= 13 \text{ y } 6 \cdot 7 - 2 = 40 \\ 2 \cdot 3 - 1 &= 5 \text{ y } 6 \cdot 3 - 2 = 16 \end{aligned}$$

Las cinco sucesiones implicadas en la secuencia del ejemplo son estas:

- 1) - ... , 352, 176, 88, 44, 22, 11.
- 2) - ... , 544, 272, 136, 68, 34, 17.
- 3) - ... , 416, 208, 104, 52, 26, 13.
- 4) - ... , 160, 80, 40, 20, 10, 5.
- 5) - ... , 32, 16, 8, 4, 2, 1.

Ahora las unimos en el mismo orden de la tabla:



En este diagrama no solamente vemos la ruta que ha seguido el número 11 hasta llegar al 1, sino que vemos también la ruta que seguiría cualquier número de las cinco sucesiones, incluso los que no podemos ver, porque las sucesiones son infinitas.

También podrían estar otras sucesiones unidas a estas cinco primeras del diagrama por medio de sus elementos de la forma $6n-2$: 64, 256, ... 10, 160, ... 208, 832, ... 136, 544, ... y las terceras sucesiones que se unirían a las segundas, y las cuartas, ...

Cualquier número con el que empecemos la secuencia estará en la tabla y será un elemento de una sucesión geométrica que después de aplicar a su cota inferior número impar la operación del algoritmo, resultará un número par, elemento de otra sucesión geométrica, a la cual se unirá, porque en todas las sucesiones hay números $2n-1$ y $6n-2$ con el mismo valor de n para unirse.

Podemos generalizar este ejemplo de la secuencia empezada con el número 11, ya que siendo el mismo proceso para todos los números, el resultado siempre será el mismo con cualquier otro.

EJEMPLOS DE ALGUNAS SECUENCIAS:

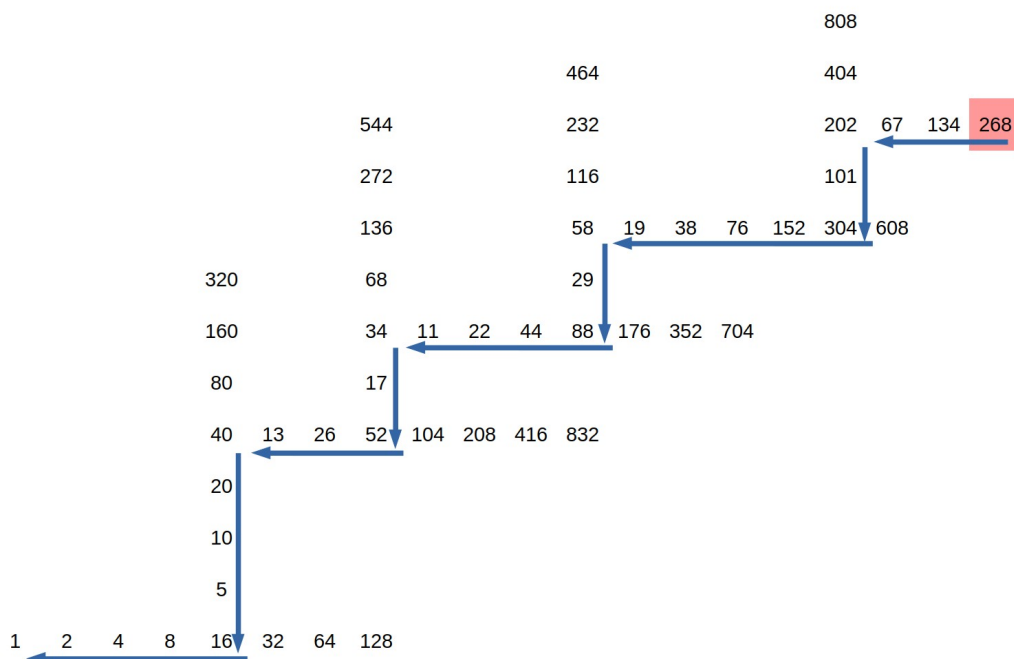
La secuencia empezada con el número 268:

268, 134, 67, 202, 101, 304, 152, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Su desarrollo en la tabla:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	...	67	...	101	...	
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	...	134	...	202	...	
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164	172	180	188	196	204	212	...	268	...	404	...	
8	24	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200	216	232	248	264	280	296	312	328	344	360	376	392	408	424	...	536	...	808	...	
16	48	80	112	144	176	208	240	272	304	336	368	400	432	464	496	528	560	592	624	656	688	720	752	784	816	848	...	1072	...	1616	...	
32	96	160	224	288	352	416	480	544	608	672	736	800	864	928	992	1056	1120	1184	1248	1312	1376	1440	1504	1568	1632	1696	...	2144	...	3232	...	
64	192	320	448	576	704	832	960	1088	1216	1344	1472	1600	1728	1856	1984	2112	2240	2368	2496	2624	2752	2880	3008	3136	3264	3392	...	4288	...	6464	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Diagrama formado con las nueve progresiones que intervienen en la secuencia y la ruta seguida hasta el 1.



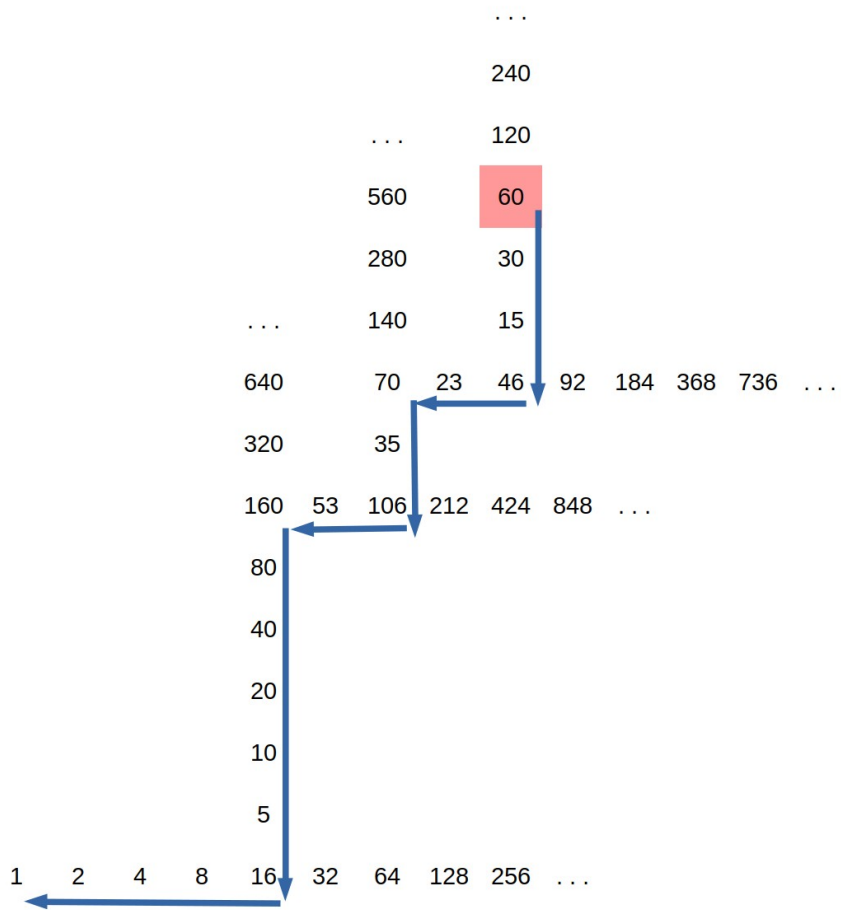
La secuencia empezada con el número 60:

60, 30, 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Su desarrollo en la tabla:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	...
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	...
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164	172	180	188	196	204	212	...
8	24	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200	216	232	248	264	280	296	312	328	344	360	376	392	408	424	...
16	48	80	112	144	176	208	240	272	304	336	368	400	432	464	496	528	560	592	624	656	688	720	752	784	816	848	...
32	96	160	224	288	352	416	480	544	608	672	736	800	864	928	992	1056	1120	1184	1248	1312	1376	1440	1504	1568	1632	1696	...
64	192	320	448	576	704	832	960	1088	1216	1344	1472	1600	1728	1856	1984	2112	2240	2368	2496	2624	2752	2880	3008	3136	3264	3392	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Diagrama formado con las seis progresiones que intervienen en la secuencia y la ruta seguida hasta el 1.



EL COMPORTAMIENTO DE LOS NÚMEROS.

El origen del diagrama es la primera sucesión de la tabla, cota inferior el número 1, con valor de $n=1$. Pero la segunda sucesión no es la que tiene el número 3 como cota inferior, sino que puede ser la que se una con cualquiera de los elementos de la forma $6n-2$: 16, 64, 256, . . . de la primera, o sea el 5, 21, 85, . . . Las secuencias no se colocan según el orden de los números, sino por el valor de n en el número de la cota inferior de una y en un elemento par $6n-2$ de otra.

De hecho, el bucle que se forma al final de la secuencia con 4, 2, 1 se produce porque el impar 1 cuyo valor de $n=1$ y el par $6n-2$ con el mismo valor de n , es el número 4 y ambos son elementos de la misma sucesión.

Las divisiones entre 2 a que se someten los números pares, no son el motivo por el que la secuencia descienda, pues con ello solamente se consigue llegar al próximo número impar y que la secuencia continúe.

Al triplicar a los números impares se descartan todas las sucesiones con los elementos múltiplos de 3, excepto la primera sucesión si el número inicial pertenece a ella. Se ha descartado $1/3$ de los impares, así pues solamente participan en la secuencia los de la forma $4n-1$ y los de la forma $4n-3$.

Lo que realmente provoca el descenso de la secuencia es sumar 1 después de triplicar a los números impares. Esto provoca que la secuencia descienda a las filas inferiores de la mitad izquierda de la tabla, donde están los números pares.

Las oscilaciones ascendentes y descendentes que experimenta la secuencia son debidas exclusivamente a los números impares. La secuencia es ascendente porque de los impares $2n-1$ con el valor de n par resultan números pares ($6n-2$) que solamente se pueden dividir entre 2 una sola vez y el impar resultante es $3n-1$, y mayor que el anterior.

La secuencia es descendente porque de los impares $2n-1$ con el valor de n impar resultan pares ($6n-2$) que pueden ser divididos entre 2 más de una vez, con lo que el impar resultante es menor.

Si el número par es divisible entre 2^1 , el impar resultante es $(3n-1)$ y $(3n-1) > (2n-1)$.

Si el número par es divisible entre 2^2 , el impar resultante es $(3n-1)/2 < (2n-1)$.

Si el número par es divisible entre 2^3 , el impar resultante es $(3n-1)/4 < (2n-1)$.

Si el número par es divisible entre 2^4 , el impar resultante es $(3n-1)/8 < (2n-1)$.

Si el número par es divisible entre 2^5 , el impar resultante es $(3n-1)/16 . . .$

Descartados los impares que son múltiplos de 3, quedan activos para la secuencia la mitad de la forma $4n-1$ y la mitad de la forma $4n-3$, por lo que la probabilidad de que la secuencia encuentre uno u otro y ascienda o descienda es la misma.

La misma probabilidad, pero una aumenta al próximo número impar siempre en la misma proporción, $(m+1)/2$, la otra lo disminuye en mayor proporción, desde $(m-1)/4$, $(5m-1)/8$, $(13m-1)/16$, $(29m-1)/32$, $(61m-1)/64$, . . . ∞

Pudiendo ser la secuencia infinita, más pronto o más tarde, se encontrará con números impares $4n-3$ y llegará al final, el número 1. O tal vez debería decir llegará al principio, el número 1?

PORQUÉ LOS NÚMEROS PARES DE LA SECUENCIA SE CONCENTRAN EN LA MITAD IZQUIERDA DE LA TABLA.

El hecho de que los pares estén agrupados en la mitad izquierda de la tabla es determinante para que la secuencia sea descendente, pues al dividirlos entre 2^n los números impares que resultan son solamente la primera mitad de los que hay en la tabla y por lo tanto son menores.

Para visualizarlo, formamos una tabla escribiendo los números ordenadamente, de forma que los impares queden en la primera fila y los demás números debajo del que es su mitad.

Escribimos los números ordenadamente de uno en uno, no por filas ni columnas.

Los primeros 60 números quedan colocados como los vemos en esta tabla.

Otra secuencia empezando con el número 36:

36, 18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	...
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	...															
4	12	20	28	36	44	52	60	...																						
8	24	40	56	...																										
16	48	...																												
32	...																													
...																														

La operación del algoritmo $3(2n-1)+1$ es igual a $6n-2$ que es el número par que se dividirá entre 2 las veces que se pueda, resultando otro número impar, que será $(6n-2)/2$, $(6n-2)/4$, $(6n-2)/8$, $(6n-2)/16$, etc.

Los números impares que resultan de dividir al par una sola vez son $3n-1$, mayores por tanto que $2n-1$. Es en ese momento cuando la secuencia es ascendente.

En cambio los impares que resultan de dividir al número par más de una vez son $(6n-2)/4$, $(6n-2)/8$, $(6n-2)/16$, etc. son menores que $2n-1$ y es cuando la secuencia es descendente.

OTRA SECUENCIA DE NÚMEROS QUE SIEMPRE ACABA EN 1.

Se forma aplicando a un número inicial cualquiera, una de estas operaciones:

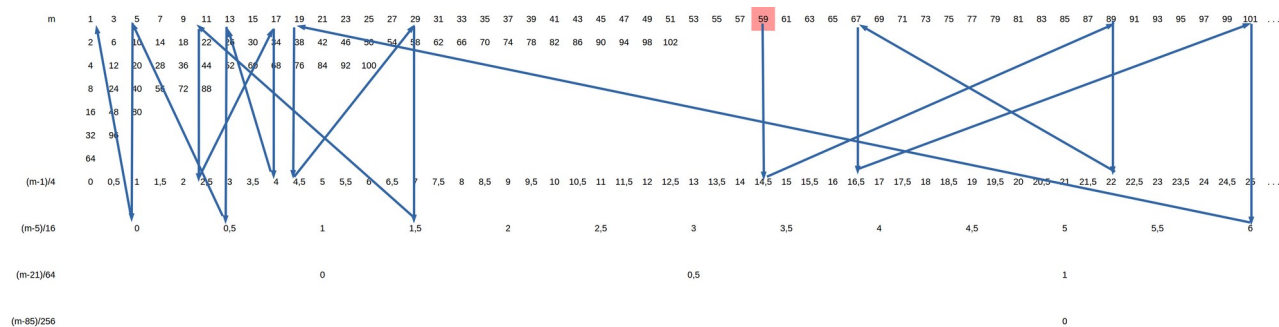
Si el número es impar restarle 1 y dividir entre 4 el resultado.

Si el número es par multiplicarlo por 3 y sumar 1 al resultado.

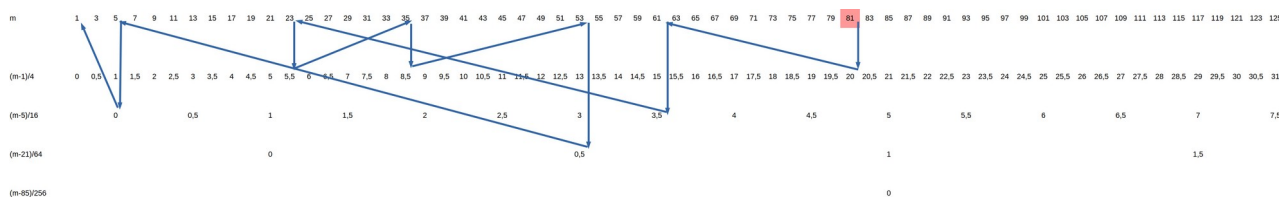
Si el número es la mitad de un impar ($m/2$) multiplicarlo por 6 y sumar 2 al resultado.

Empezando por el número 59 la secuencia que obtenemos es: 59, 14.5, 89, 22, 67, 16.5, 101, 25, 6, 19, 4.5, 29, 7, 1.5, 11, 2.5, 17, 4, 13, 3, 0.5, 5, 1,

En esta tabla visualizamos la secuencia obtenida.



Empezando con el número 81 la secuencia obtenida es: 81, 20, 61, 15, 3.5, 23, 5.5, 35, 8.5, 53, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0, 1.

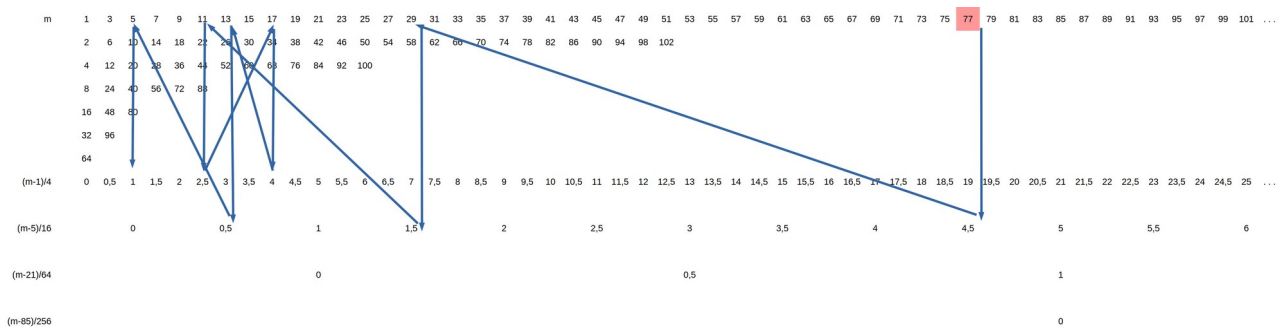


No hemos puesto los números pares en esta tabla, ya que son irrelevantes.

En cada iteración de $(m-1)/4$ en la que el resultado es la mitad de un impar, la secuencia es ascendente, pero cuando el resultado es un número par, la secuencia es descendente y también lo es cuando el resultado es un número impar. De los tres resultados posibles, dos de ellos provocan números impares más bajos que el anterior y solamente uno provoca números más altos.

Además los números que resultan más altos lo son siempre en la misma proporción, $(m+1)/2$, sin embargo los que resultan más bajos, lo hacen en mayor proporción.

Otra secuencia empezada con el número 77: 77, 19, 4.5, 29, 7, 1.5, 11, 2.5, 17, 4, 13, 3, 0.5, 5, 1.



ALGORITMO

Con este algoritmo se forma una secuencia que finaliza siempre en 5, 1.

Si se aplica también al número 1 y se considera al cero como número par, la secuencia entra en un bucle infinito con el uno y el cero.

Se empieza con la mitad de cualquier número natural $n/2$, aplicándole la operación que le corresponda según las reglas del algoritmo y se sigue con los resultados hasta llegar al 1.

Las tres reglas son:

Si el número es par se multiplica por 3 y se suma 1.

Si el número es impar se resta 1 y se divide entre 4.

Si el número es la mitad de un impar se multiplica por 6 y se suma 2.

Ejemplo: Empezamos con el número 713.

CALCULOS:

$$(713 - 1) / 4 = 178$$

$$(178 \times 3) + 1 = 535$$

$$(535 - 1) / 4 = 133.5$$

$$(133.5 \times 6) + 2 = 803$$

$$(803 - 1) / 4 = 200.5$$

$$(200.5 \times 6) + 2 = 1205$$

$$(1205 - 1) / 4 = 301$$

$$(301 - 1) / 4 = 75$$

$$(75 - 1) / 4 = 18.5$$

$$(18.5 \times 6) + 2 = 113$$

$$(113 - 1) / 4 = 28$$

$$(28 \times 3) + 1 = 85$$

$$(85 - 1) / 4 = 21$$

$$(21 - 1) / 4 = 5$$

$$(5 - 1) / 4 = 1$$

Formamos un conjunto con los números impares obtenidos:

$$713 \parallel 535 \parallel 803 \parallel 1205 \parallel 301 \parallel 75 \parallel 113 \parallel 85 \parallel 21 \parallel 5 \parallel 1 \parallel$$

Ahora creamos las sucesiones para desarrollar gráficamente la parte del fractal donde se encuentran los números impares obtenidos con el algoritmo. Lo destacable de este algoritmo es que nos permite conocer exactamente la cota inferior de cada sucesión y el término con el que se enlaza de la siguiente sucesión.

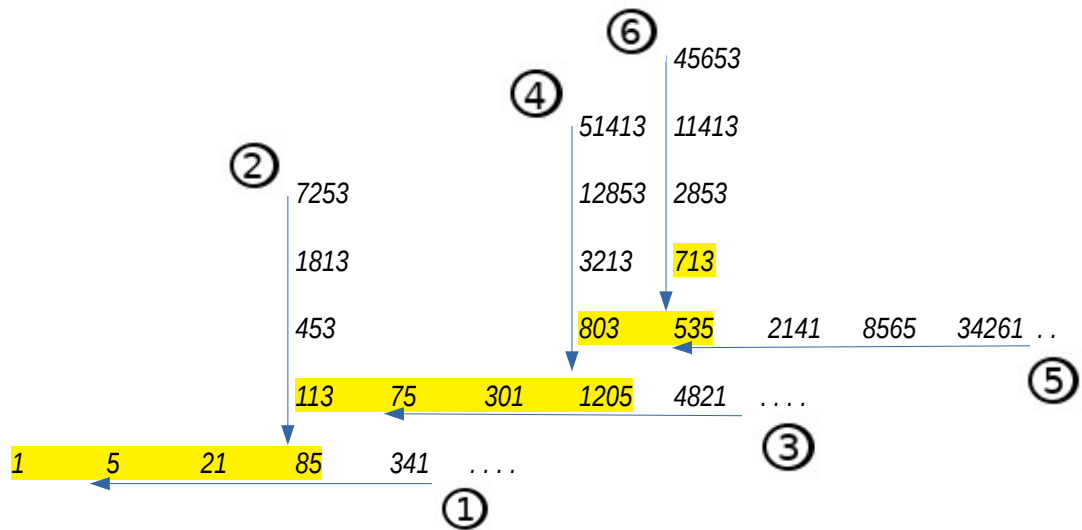
Empezando por el último impar, el 1, aplicamos a éste y a cada resultado la fórmula $4n+1$, formando una sucesión infinita cuya cota inferior es el 1.

El siguiente impar, que no haya salido en la secuencia anterior, será el primer impar (cota inferior) de la próxima sucesión.

Se calculan tantas sucesiones como impares han resultado del algoritmo, a excepción de los impares que ya estén en la sucesión anterior.

Es muy importante que la primera sucesión del 1 esté representada en sentido horizontal con los términos de menor a mayor a la derecha. Las secuencias siguientes se colocarán alternativamente en sentido vertical y horizontal y juntando los primeros impares (cotas inferiores) de cada una de ellas.

En este ejemplo, en el que hemos calculado 4 términos de cada sucesión, se juntan los impares 85 de la primera con el 113 de la segunda. El 113 de la segunda con el 75 de la tercera. El 1205 de la tercera con el 803 de la cuarta. El 803 de la cuarta con el 535 de la quinta y el 535 de la quinta con el 713 de la sexta.



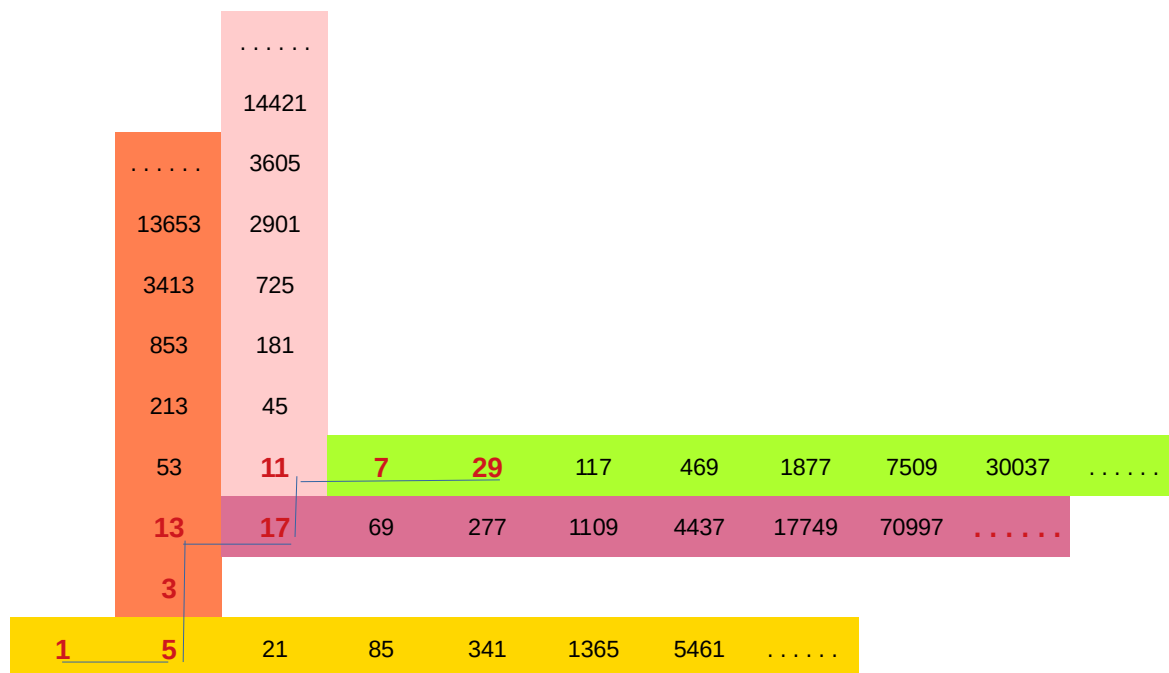
Otro ejemplo empezando con el 4.5 (9/2)

CALCULOS:

$$\begin{aligned}
 (4.5 \times 6) + 2 &= 29 \\
 (29 - 1) / 4 &= 7 \\
 (7 - 1) / 4 &= 1.5 \\
 (1.5 \times 6) + 2 &= 11 \\
 (11 - 1) / 4 &= 2.5 \\
 (2.5 \times 6) + 2 &= 17 \\
 (17 - 1) / 4 &= 4 \\
 (4 \times 3) + 1 &= 13 \\
 (13 - 1) / 4 &= 3 \\
 (3 - 1) / 4 &= 0.5 \\
 (0.5 \times 6) + 2 &= 5 \\
 (5 - 1) / 4 &= 1
 \end{aligned}$$

Formamos un conjunto con los números impares: 29 || 7 || 11 || 17 || 13 || 3 || 5 || 1 ||

Como en el primer ejemplo, calculamos la secuencia de los impares para desarrollar gráficamente la parte del fractal donde se encuentran los números impares obtenidos con el algoritmo.



Otro ejemplo empezando con el número 237

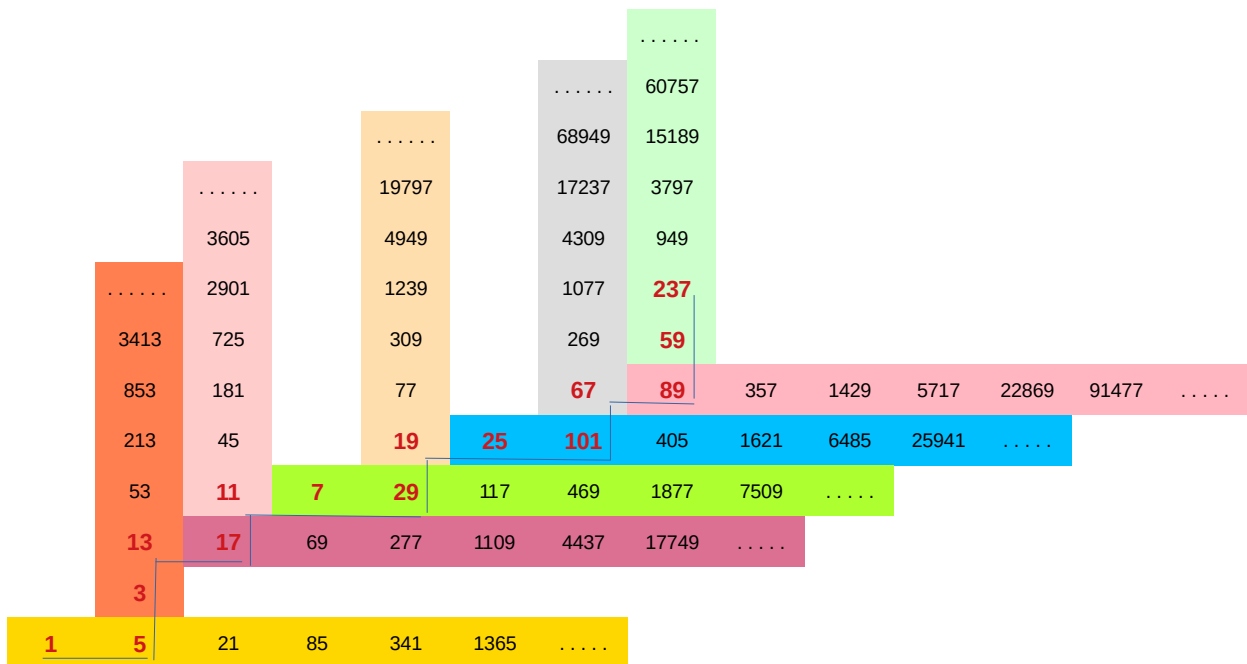
CALCULOS:

$(237 - 1) / 4 = 59$
 $(59 - 1) / 4 = 14.5$
 $(14.5 \times 6) + 2 = 89$
 $(89 - 1) / 4 = 22$
 $(22 \times 3) + 1 = 67$
 $(67 - 1) / 4 = 16.5$
 $(16.5 \times 6) + 2 = 101$
 $(101 - 1) / 4 = 25$
 $(25 - 1) / 4 = 6$
 $(6 \times 3) + 1 = 19$
 $(19 - 1) / 4 = 4.5$
 $(4.5 \times 6) + 2 = 29$
 $(29 - 1) / 4 = 7$
 $(7 - 1) / 4 = 1.5$
 $(1.5 \times 6) + 2 = 11$
 $(11 - 1) / 4 = 2.5$
 $(2.5 \times 6) + 2 = 17$
 $(17 - 1) / 4 = 4$
 $(4 \times 3) + 1 = 13$
 $(13 - 1) / 4 = 3$
 $(3 - 1) / 4 = 0.5$
 $(0.5 \times 6) + 2 = 5$
 $(5 - 1) / 4 = 1$

Formamos un conjunto con los números impares:

237 || 59 || 89 || 67 || 101 || 25 || 19 || 29 || 7 || 11 || 17 || 13 || 3 || 5 || 1 ||

Y calculamos las secuencia de los impares para desarrollar gráficamente la parte del fractal donde se encuentran los números impares obtenidos con el algoritmo.



Al igual que existen infinitos números impares, podemos calcular infinitas sucesiones cuya cota inferior será un número impar.

Como que todas y cada una de las sucesiones se forman con la misma razón o factor $(4m+1)$ y son acotadas inferiormente, todos sus términos llegarán a dicha cota al aplicarles $(m-1)/4$.

Todas las sucesiones se enlazan unas con otras ordenadamente, por medio de su primer impar (cota inferior de la sucesión) con un término de la sucesión siguiente, siempre siguiendo el mismo orden que los resultados del algoritmo.

Cuando el resultado del algoritmo es un número par o un medio, quiere decir que la sucesión enlaza con la siguiente en ese punto. Cuando el resultado del algoritmo al aplicar $(m-1)/4$ es un número impar, quiere decir que son términos de la misma sucesión.

Cualquier término de cualquier sucesión llegará a la cota inferior de la misma al aplicar iteradamente la fórmula $(m-1)/4$. La cota inferior de todas las sucesiones enlaza con un término de la siguiente sucesión que al aplicarle $(m-1)/4$ llega también a su cota inferior, que a su vez enlaza con la siguiente sucesión y así sucesivamente hasta llegar a la sucesión inicial cuya cota inferior es el 1. Esta es la causa por la que cualquier número natural, incluso su mitad, llega al 1 al aplicar el algoritmo.

El algoritmo es una variante del que Collatz utilizó en su conjetura, por lo que la explicación es la misma.

Todos los números naturales descienden hasta el 1 al aplicarles este algoritmo.

Inicio : Si el número es par, dividirlo entre 2 las veces necesarias hasta llegar a un impar (m).

Restarle 1 a ese impar y dividir el resultado entre 4. $(m-1)/4$.

Repetir hasta que el resultado sea un número par o un número decimal.

Cuando el resultado sea un número par hacer $(3m+1)/4$ y continuar aplicando $(4m-1)/4$.

Si el resultado es un número decimal hacer $(3m+1)/2$ y continuar aplicando $(4m-1)/4$.

Al final siempre llegaremos al 1.

Ejemplo: Empezamos con el número 277

$$(277-1)/4=69$$

$$(69-1)/4=17$$

$$(17-1)/4=4 \text{ como es par hacemos } (3 \cdot 17+1)/4=13$$

$$(13-1)/4=3$$

$$(3-1)/4=0,5 \text{ como es decimal hacemos } (3 \cdot 3+1)/2=5$$

$$(5-1)/4=1$$

$$(1-1)/4=0 \text{ como es par hacemos } (3 \cdot 1+1)/4=1$$

La sucesión formada por el algoritmo es 277, 69, 17, 13, 3, 5, 1

En este otro ejemplo vemos la ruta del impar 764693 hasta llegar al 1.

$$(764693-1)/4=191173,$$

$$(191173-1)/4=47793,$$

$$(47793-1)/4=11948, \text{ como es par hacemos } (3 \cdot 47793+1)/4=35845,$$

$$(35845-1)/4=8961,$$

$$(8961-1)/4=2240, \text{ como es par hacemos } (3 \cdot 8961+1)/4=6721,$$

$$(6721-1)/4=1680, \text{ como es par hacemos } (3 \cdot 6721+1)/4=5041,$$

$$(5041-1)/4=1260, \text{ como es par hacemos } (3 \cdot 5041+1)/4=3781,$$

$$(3781-1)/4=945,$$

$$(945-1)/4=236, \text{ como es par hacemos } (3 \cdot 945+1)/4=709,$$

$$(709-1)/4=177,$$

$(177-1)/4=44$, como es par hacemos $(3*177+1)/4=133$,

$(133-1)/4=33$,

$(33-1)/4=8$, como es par hacemos $(3*33+1)/4=25$,

$(25-1)/4=6$, como es par hacemos $(3*25+1)/4=19$,

$(19-1)/4=4,5$ como es un número decimal hacemos $(3*19+1)/2=29$,

$(29-1)/4=7$,

$(7-1)/4=1,5$ como es decimal hacemos $(3*7+1)/2=11$,

$(11-1)/4=2,5$ como es decimal hacemos $(3*11+1)/2=17$,

$(17-1)/4=4$, como es par hacemos $(3*17+1)/4=13$,

$(13-1)/4=3$,

$(3-1)/4=0,5$ como que es decimal hacemos $(3*3+1)/2=5$,

$(5-1)/4=1$

$(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*1+1)/4=1$

La sucesión formada por el algoritmo es 764693, 191173, 47793, 35845, 8961, 6721, 5041, 3781,

945, 709, 177, 133, 33, 25, 19, 29, 7, 11, 17, 13, 3, 5, 1.

La conjetura de Collatz y la sucesión que siempre acaba en el 1.

Podemos suprimir los números pares de la sucesión porque los números importantes son los impares. Aplicando el método que he desarrollado se forman un número indeterminado de sucesiones decrecientes de números impares que se conectan entre sí.

Mi método es el siguiente : dado un número entero (m) :

Si es un número par, lo dividiremos entre dos hasta llegar a un número impar.

Si es un número impar aplicamos $(m-1)/4$.

Si el resultado es un número par haremos $(3m+1)/4$.

Si el resultado es un número decimal haremos $(3m+1)/2$.

Cada número obtenido con este algoritmo es un término de una sucesión de números impares que acaba cuando el resultado es un número par o un número decimal.

Un ejemplo : Comenzamos con el número 38228. Como es un número par, lo dividimos entre 2 las veces necesarias hasta llegar al 9557. Seguimos $(9557-1)/4=2389$. $(2389-1)/4=597$. $(597-1)/4=149$. $(149-1)/4=37$. $(37-1)/4=9$. $(9-1)/4=2$. Como es un número par, esto nos indica que la sucesión acaba con el número impar 9.

Otro ejemplo : Comenzamos por el 469. $(469-1)/4=117$. $(117-1)/4=29$. $(29-1)/4=7$. $(7-1)/4=1,5$. Como es un número decimal, esto nos indica que la sucesión termina con el número 7.

Otras sucesiones están formadas solamente por un solo número impar : El número 966 par, lo dividimos entre 2 y obtenemos el impar 483. $(483-1)/4=120,5$ La sucesión acaba con el 483.

Aunque esta sucesión esté formada solamente por el impar 483, podemos saber todos los impares anteriores aplicando $4*m+1$, donde m es el número impar : $4*483+1=1933$. $4*1933+1=7733$. $4*7733+1=30933$ En cualquier sucesión podemos hacer lo mismo.

Para saber a qué impar conecta cada sucesión a través de su último impar, haremos :

Si el último impar ha dado un número par, como es el caso del 9 en el ejemplo anterior, haremos $(3*9+1)/4=7$. La sucesión que termina en 9 estará unida a otra sucesión mediante el impar 7.

Si el último par ha dado como resultado un número decimal, como es el caso del 7 en el ejemplo anterior, haremos $(3*7+1)/2=11$. La sucesión que termina en 7 estará unida a otra sucesión mediante el impar 11.

Todas las sucesiones unidas entre sí forman un fractal infinito, cuyo tronco principal es la sucesión de los números impares que acaban en 1. ($4*1+1=5$, $4*5+1=21$, $4*21+1=85$, $4*85+1=341$, ...). Este tronco principal tiene a su vez conectadas a cada número otras sucesiones, también infinitas, a las cuales también hay conectadas otras sucesiones, que también conectan otras sucesiones, etc.

El último número del tronco principal antes de llegar al 1 es el 5, que conecta con la sucesión que calculamos de esta manera : $(4*5-2)/6=3$, $4*3+1=13$, $4*13+1=53$, $4*53+1=213$, ...

Calculo de los impares que conectan con los impares de la forma $6n-1$, que sus dígitos suman 5, 2, 8 aplicamos $(m*4-2)/6$, donde m es el impar al que conectan.

Si los impares son de la forma $6n-5$ que sus dígitos suman 1, 7, 4 aplicamos $(m*4-1)/3$

Hay impares que no forman ninguna sucesión porque no llegan a ellos ningún impar. Son los impares de la forma $6n-3$ que sus dígitos suman 3, 9, 6.

La sucesión que se forma con el enunciado de la conjetura de Collatz sin los números pares, la forman números impares que forman parte de otras sucesiones de impares perfectamente organizadas con una distancia entre ellos siempre igual. La distancia entre los impares en todas las sucesiones es la misma y es $(m-1)/4$, motivo por el cual siempre llegamos al 1 a través de las diferentes sucesiones conectadas entre sí.

El 1 es el principio de todos los caminos. Es el inicio de la partida pero también es el final del regreso. El principio del camino es el final a la vuelta.

[illegible]

A continuación las diferentes sucesiones que intervienen en el gráfico anterior.

Las sucesiones que intervienen											
verticales						horizontales					
3413	11605	19797	68949	122197	107861	1	5	21	85	341	1365
853	2901	4949	17237	30549	26965	17	69	277	1109	4437	17749
213	725	1239	4309	7637	6741	7	29	117	469	1877	7509
53	181	309	1077	1909	1685	25	101	405	1621	6485	25941
13	45	77	269	477	421	179	717	2869	11477	45909	183637
3	11	19	67	119	105	79	317	1269	5077	20309	81237

Los números en amarillo son los números que conectan las diferentes sucesiones que interviene para formar la sucesión principal que, aplicando el algoritmo de Collatz, empieza en el número 421 hasta acabar en el 1.

Pollensa, 24 de Julio de 2018

M	Fórmula	n	1	2	3	4	5	
1	$(1 \cdot 4^n - 1)/3$	1		5	21	85	341	
7	$(7 \cdot 4^n - 1)/3$	9		37	149	597	2389	
13	$(13 \cdot 4^n - 1)/3$	17		69	277	1109	4437	
19	$(19 \cdot 4^n - 1)/3$	25		101	405	1621	6485	
25	$(25 \cdot 4^n - 1)/3$	33		133	533	2133	8533	
.....								
				$(3 \cdot \text{Impar} + 1)/2^{2n+2} = M$				

M	Fórmula	n	1	2	3	4	5	
5	$(5 \cdot 4^n - 2)/6$	3		13	53	213	853	
11	$(11 \cdot 4^n - 2)/6$	7		29	117	469	1877	
17	$(17 \cdot 4^n - 2)/6$	11		45	181	725	2901	
23	$(23 \cdot 4^n - 2)/6$	15		61	245	981	3925	
29	$(29 \cdot 4^n - 2)/6$	19		77	309	1237	4949	
.....								
				$(3 \cdot \text{Impar} + 1)/2^{2n+1} = M$				

Cálculo de los impares que llegan a los impares de la forma $6n-5$ (sus dígitos suman 1, 7, 4)

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 1 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 7 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 13 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 19 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 25 después de aplicarles el problema de Collatz

Podemos seguir con los impares "M" de la forma $6n-5$ y calcular los impares que llegan a ellos.

Cálculo de los impares que llegan a los impares de la forma $6n-1$ (sus dígitos suman 5, 2, 8)

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 5 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 11 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 17 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 23 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 29 después de aplicarles el problema de Collatz

Podemos seguir con los impares "M" de la forma $6n-1$ y calcular los impares que llegan a ellos.

DEMOSTRACIÓN VISUAL DE LA CONJETURA DE COLLATZ

Con esta definición se describe en la [Wikipedia](#) el concepto de "Demostración sin palabras":

"En matemáticas, una prueba sin palabras es una demostración de una declaración de identidad o matemática que puede demostrarse como autoevidente mediante un diagrama sin ningún texto explicativo que la acompañe. Dichas pruebas se pueden considerar más elegantes que las pruebas más formales, y son matemáticamente rigurosas debido a su naturaleza evidente. Cuando el diagrama demuestra un caso particular de una afirmación general, para ser una prueba, debe ser generalizable".

La [conjetura de Collatz](#) será cierta si se demuestra que se cumple con todos los números naturales, sea cual sea el número inicial.

El primer paso para llegar a la demostración es admitir que en esta tabla podríamos escribir todos los números naturales.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	...
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	...
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164	172	180	188	196	204	212	...
8	24	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200	216	232	248	264	280	296	312	328	344	360	376	392	408	424	...
16	48	80	112	144	176	208	240	272	304	336	368	400	432	464	496	528	560	592	624	656	688	720	752	784	816	848	...
32	96	160	224	288	352	416	480	544	608	672	736	800	864	928	992	1056	1120	1184	1248	1312	1376	1440	1504	1568	1632	1696	...
64	192	320	448	576	704	832	960	1088	1216	1344	1472	1600	1728	1856	1984	2112	2240	2368	2496	2624	2752	2880	3008	3136	3264	3392	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Un ejemplo de secuencia obtenida: 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1,

Visualizamos el desarrollo de la secuencia en la tabla anterior:

					inicio																																
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	...										
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	...										
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164	172	180	188	196	204	212	...										
8	24	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200	216	232	248	264	280	296	312	328	344	360	376	392	408	424	...										
16	48	80	112	144	176	208	240	272	304	336	368	400	432	464	496	528	560	592	624	656	688	720	752	784	816	848	...										
32	96	160	224	288	352	416	480	544	608	672	736	800	864	928	992	1056	1120	1184	1248	1312	1376	1440	1504	1568	1632	1696	...										
64	192	320	448	576	704	832	960	1088	1216	1344	1472	1600	1728	1856	1984	2112	2240	2368	2496	2624	2752	2880	3008	3136	3264	3392	...										
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...										

Cada número impar es el término cota inferior de una sucesión geométrica sin límite superior y razón igual a 2. Hay 5 números impares incluido el 1 y hay 5 sucesiones implicadas por las que el número 11 sigue la ruta hasta el final. Cuando la sucesión llega al número impar, el próximo número de la secuencia es un elemento de otra sucesión y este proceso se repite hasta llegar a la sucesión cuya cota inferior es el número 1.

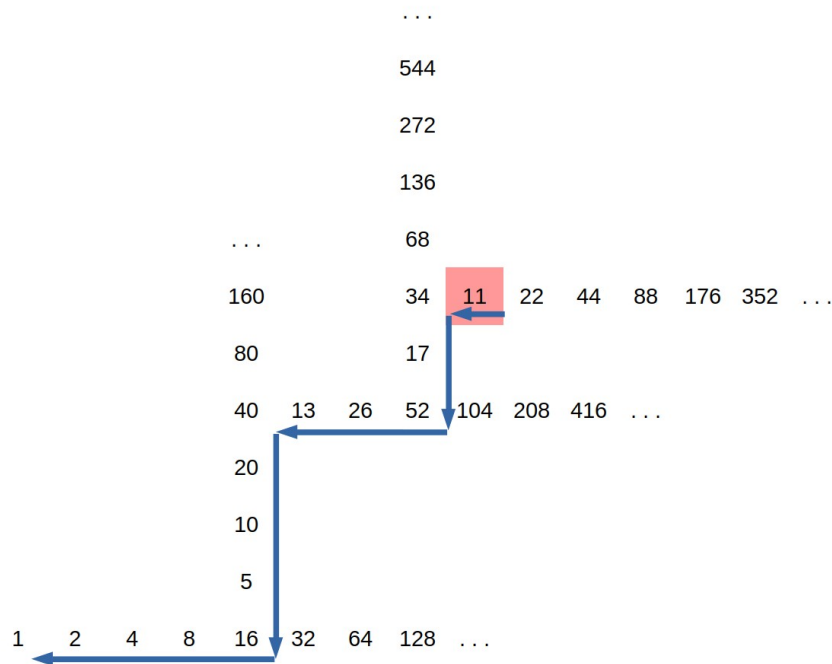
El objetivo de las operaciones del algoritmo de la secuencia de Collatz es que las diferentes sucesiones se unan unas con otras: la cota inferior impar de una y un elemento par de otra, con el mismo valor de n .

$2n-1$ se une a $6n-2$:
 $2*6-1=11$ y $6*6-2=34$
 $2*9-1=17$ y $6*9-2=52$
 $2*7-1=13$ y $6*7-2=40$
 $2*3-1=5$ y $6*3-2=16$

Las cinco sucesiones implicadas en la secuencia del ejemplo son estas:

- 1) - ... , 352, 176, 88, 44, 22, 11.
- 2) - ... , 544, 272, 136, 68, 34, 17.
- 3) - ... , 416, 208, 104, 52, 26, 13.
- 4) - ... , 160, 80, 40, 20, 10, 5.
- 5) - ... , 32, 16, 8, 4, 2, 1.

Ahora las unimos en el mismo orden de la tabla:



En este diagrama no solamente vemos la ruta que ha seguido el número 11 hasta llegar al 1, sino que vemos también la ruta que seguiría cualquier elemento de las cinco sucesiones infinitas, de haber sido el número inicial de la conjetura.

También podemos imaginar otras sucesiones unidas a estas cinco primeras del diagrama con sus elementos de la forma $6n-2$: 64, 256, ... 10, 160, ... 208, 832, ... 136, 544, ... y las terceras sucesiones que se unirían a las segundas, y las cuartas, ... No hay uniones a las sucesiones con los términos que son múltiplos de 3.

Cualquier número con el que empecemos la secuencia estará en la tabla y será un elemento de una sucesión geométrica que después de aplicar a su cota inferior número impar la operación del algoritmo, resultará un número par, elemento de otra sucesión geométrica, a la cual se unirá, porque en todas las sucesiones hay números $2n-1$ y $6n-2$ con el mismo valor de n para unirse.

Podemos generalizar este ejemplo de la secuencia empezada con el número 11, ya que siendo el mismo proceso para todos los números, el resultado siempre será el mismo con cualquier otro número.

El origen del diagrama siempre es la primera sucesión de la tabla, cuyo primer elemento es el número 1, con valor de $n=1$. Pero la segunda sucesión no es la que tiene el número 3 como cota inferior, sino que puede ser la que se una con cualquiera de los elementos de la forma $6n-2$: 16, 64, 256, ... de la primera.

El bucle final del 4, 2, 1 se produce porque el impar $2n-1$ cuyo valor de $n=1$ es el número 1 y el par de la forma $6n-2$ es el número 4 y ambos son elementos de la misma sucesión.

TABLA ORDENADA DE LOS NÚMEROS NATURALES

Una tabla con los números naturales pero adaptada a cada secuencia y formada de manera distinta.

Escribir en ella los números ordenadamente, de forma que los impares queden en la primera fila y los demás números debajo del que es su mitad.

Empezar por el número 1 hasta el número impar mayor de la secuencia, de uno en uno ordenadamente, no por filas ni columnas.

El resultado es éste:

[illegible]

En la primera fila están los números impares $2n-1$ y en las demás filas están los pares $2^n(2n-1)$.

La proporción y disposición de los números será siempre la misma en cualquier tabla y cualquier cantidad de números escritos en ella.

Los números pares quedan colocados en la mitad izquierda de la tabla y allí es donde llegan los impares sometidos a la operación del algoritmo $3(2n-1)+1$.

Estos números pares sometidos a n divisiones entre 2 llegan a los números impares de su columna, que ocupan la primera mitad de la tabla, menores que los de la segunda mitad y agrupados más cerca de la primera columna que es la del impar 1.

Algunos ejemplos con secuencias desarrolladas en esa tabla:

[illegible]

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	...
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	...					
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	...																	
8	24	40	56	72	88	...																								
16	48	80	...																											
32	96	...																												
64	...																													
...																														

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	...
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62															
4	12	20	28	36	44	52	60	...																						
8	24	40	56	...																										
16	48	...																												
32	...																													
...																														

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	...
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	...															
4	12	20	28	36	44	52	60	...																						
8	24	40	56	...																										
16	48	...																												
32	...																													
...																														

Estas son representaciones de secuencias que resultan de aplicar las operaciones del algoritmo siguiendo estrictamente su enunciado con estas dos operaciones:

Si el número m es impar hacer $3*m+1$ y si el número es par hacer $m/2$ las veces necesarias hasta llegar a un número impar, con el que se repite el proceso.

Pero voy a desarrollar la secuencia en la tabla aplicando a los números tres operaciones y no dos:

Si el número m es impar, la primera operación es $3*m$.

La segunda operación es sumar 1 a $3*m$.

Si el número es par, $m/2$ las veces que se pueda.

La misma secuencia empezada con el número 11 ahora es ésta:

11, 33, 34, 17, 51, 52, 26, 13, 39, 40, 20, 10, 5, 15, 16, 8, 4, 2, 1.

Su desarrollo en la tabla:

Visualmente la diferencia entre la secuencia obtenida con dos operaciones y la obtenida con tres operaciones es notoria y esta última denota, primero el avance que sufre la secuencia al triplicar a un número impar y segundo el retroceso que sufre al sumar 1 al impar triplicado.

La ruta de la secuencia tiene cuatro líneas azules que señalan las operaciones 3^*m , cuatro líneas verdes que señalan las operaciones de 3^*m+1 y cuatro líneas rojas que señalan las operaciones $(3^*m+1)/2^n$.

En todas las tablas hay la misma cantidad de números pares que de impares.

Los números impares están en la primera fila. La mitad son impares de la forma $4n-1$ y la otra mitad son de la forma $4n-3$.

Los números pares se distribuyen en las siguientes filas de esta manera:

La mitad de ellos en la segunda y llegan a un impar de la forma $4n-1$ con una sola división entre 2.

1/3 de ellos en la tercera fila y llegan a un impar de la forma $4n-3$ con dos divisiones entre 2.

1/4 de ellos en la cuarta fila y llegan a un impar de la forma $4n-3$ con tres divisiones entre 2.

1/8 de ellos en la quinta fila y llegan a un impar de la forma $4n-3$ con cuatro divisiones entre 2.

1/16 de ellos en la sexta fila y llegan a un impar de la forma $4n-3$ con cinco divisiones entre 2.

1/16 de ellos en la séptima fila y llegan a un impar de la forma $4n-3$ con seis divisiones entre 2.

Las oscilaciones ascendentes y descendentes que experimenta una secuencia se deben a la forma que tienen los números impares que intervienen en ella.

Los de la forma $4n-1$ provocan que la secuencia sea ascendente y los de la forma $4n-3$ que sea descendente. Los números pares son el "puente" por el que un impar llega hasta el próximo impar.

La probabilidad de que en la secuencia haya impares de una forma o de otra es la misma, porque en la tabla hay la misma cantidad. Pero hay unos que juegan con ventaja, porque mientras que los impares que provocan que la secuencia sea ascendente, aumentan al próximo número impar siempre en la misma proporción, con el valor de n , los que provocan que la secuencia sea descendente disminuyen al siguiente impar en mayor proporción, de manera progresiva: $(n-1)/2$, $(5n-3)/4$, $(13n-7)/8$, $(29n-15)/16$, $(61n-31)/32$, ...

Sabiendo que las secuencias pueden ser infinitas, ¿es posible una secuencia en la que todos los números impares sean de la forma $4n-1$ y ascienda siempre?

Simplifico la tabla, eliminando de ella los números que no participan en la formación de las secuencias.

Tabla con los números del 1 al 119. No están las columnas de los impares múltiplos de 3, porque sus elementos no intervienen en las secuencias de Collatz. Puede haber algunos de esos números al principio de la secuencia si el número inicial pertenece a una de esas columnas, pero no habrá más números múltiplos de 3 en la secuencia, por lo que en esta tabla no tienen importancia.

La cantidad de números por fila que hay en la tabla con los números naturales hasta el 63 se corresponde con 2^n y en amarillo los números de Mersenne. En tablas con más números se podrán ver más números de Mersenne, que serán también la cantidad de números que tendrá cada fila de la tabla menos 1.

32	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	...
16	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	...																
8	4	12	20	28	36	44	52	60	...																								
4	8	24	40	56	...																												
2	16	48	...																														
1	32	...																															
...																																	

UNA TABLA CON LOS NÚMEROS NATURALES (TNN)

Si escribimos ordenadamente los números naturales colocándolos de forma que los impares queden en la primera fila y los demás números debajo del que es su mitad, formaremos una tabla con los números naturales. Escribiremos los números ordenadamente: 1, 2, 3, 4, . . . no por filas ni columnas. Los primeros 80 números quedan colocados como los vemos en esta tabla.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78																					
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76																															
8	24	40	56	72																																				
16	48	80																																						
32																																								
64																																								

Cualquier cantidad de números escritos, estarán siempre en la misma disposición: (m) números impares en la primera fila, m/2 en la segunda, m/4 en la tercera, m/8 en la cuarta, m/16 en la quinta, m/32 en la sexta, . . . Los números pares quedan colocados en la mitad izquierda de la tabla. En la segunda fila están los que son 2m, en la tercera los 4m, en la cuarta los 8m, . . .

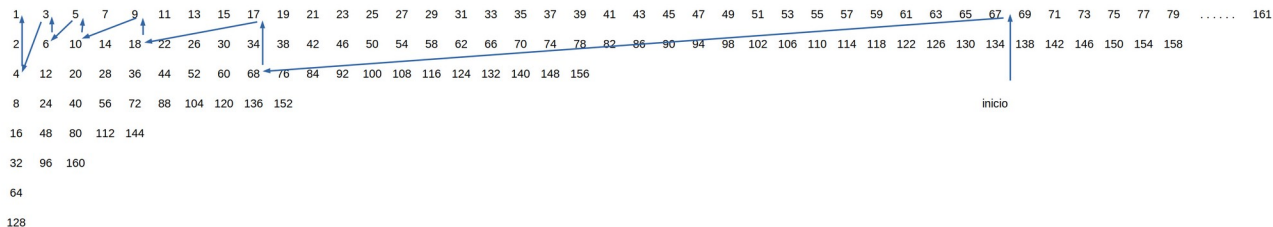
ALGUNAS SECUENCIAS DE NÚMEROS QUE VISUALIZAMOS EN LA TABLA

Formar una secuencia aplicando a un número inicial cualquiera, estas operaciones:

Si el número es impar sumarle 1 y si el número es par dividirlo entre 2 las veces que se pueda. Repetir con cada resultado hasta llegar al 1.

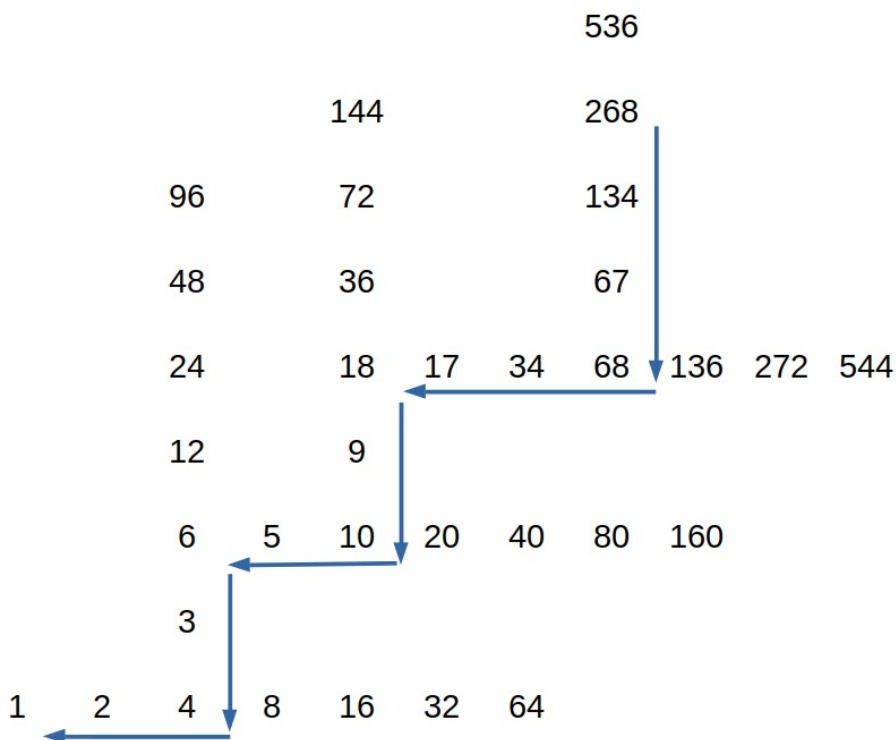
Empezando con el número 134 la secuencia que obtenemos es: 134, 67, 68, 34, 17, 18, 9, 10, 5, 6, 3, 4, 2, 1.

Visualizamos en la tabla TNN la secuencia obtenida con las operaciones propuestas.



A cada iteración en la que sumamos 1 al número impar la secuencia desciende a los números más cercanos al 1.

Si a cada columna de la tabla la consideramos una progresión geométrica, con las que intervienen en esta secuencia formamos un diagrama con las progresiones (columnas) unidas siguiendo el desarrollo de la secuencia en la tabla.



Este diagrama no solo nos indica la ruta que ha seguido el número 134 hasta llegar al 1, sino que nos muestra la ruta que seguirá cualquier número de sus seis progresiones y cada progresión es infinita.

Formar una secuencia aplicando a un número inicial cualquiera estas operaciones:

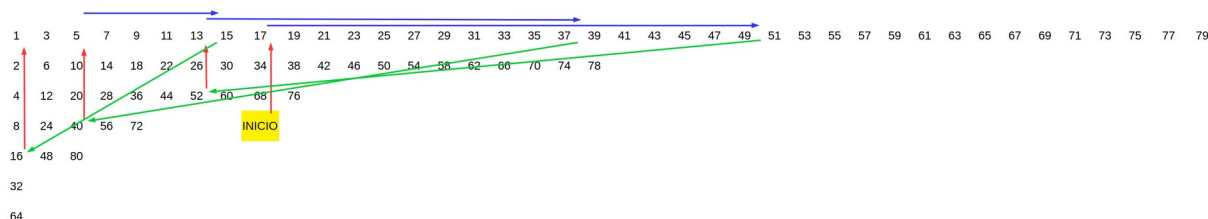
Si el número es impar multiplicarlo por 3 y sumar 1 al resultado.

Si el número es par dividirlo entre 2 las veces que se pueda.

Repetir con cada resultado hasta llegar al 1.

Empezando con el número 68 la secuencia que obtenemos es: 68, 34, 17, 51, 52, 26, 13, 39, 40, 20, 10, 5, 15, 16, 8, 4, 2, 1.

Visualizamos en la tabla TNN la secuencia obtenida con las operaciones propuestas.



UN ALGORITMO DIFERENTE

En la misma tabla se visualiza el desarrollo de una secuencia que se forma aplicando a la mitad de cualquier número natural $1/2 \cdot N$ las siguientes operaciones:

Número par, multiplicar por 3 y sumar 1 al resultado.

Mitad de un número impar, multiplicar por 6 y sumar 2 al resultado.

Número impar, restar 1 y dividir entre 4 el resultado.

Las secuencias siempre acaban en 1, 0, 1.

La tabla construida es ésta:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	...					
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	...																											
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	...																																					
8	24	40	56	72	...																																											
16	48	80	...																																													
32	...																																															
64																																																
0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	10.5	11	11.5	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	16	16.5	17	17.5	18	18.5	19	19.5	20	20.5	21	...					
		0				0.5				1				1.5				2				2.5				3				3.5				4				4.5				5						
											0																									0.5												1
																																													0			

En la base los números en rojo son el resultado de aplicar la operación del algoritmo a todos los números impares de la primera fila, que repito en las filas inferiores, también en rojo.

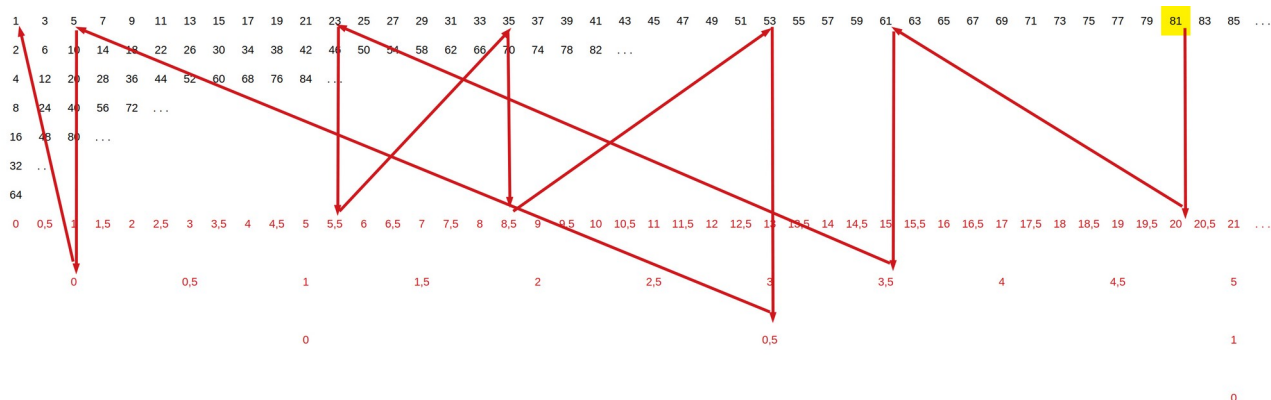
Unos ejemplos:

Empezando con el número 81 la secuencia obtenida es: 81, 20, 61, 15, 3.5, 23, 5.5, 35, 8.5, 53, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0, 1.

Los cálculos aplicados:

$(81 - 1) \div 4$	$= 20$
$(20 \times 3) + 1$	$= 61$
$(61 - 1) \div 4$	$= 15$
$(15 - 1) \div 4$	$= 3.5$
$(3.5 \times 6) + 2$	$= 23$
$(23 - 1) \div 4$	$= 5.5$
$(5.5 \times 6) + 2$	$= 35$
$(35 - 1) \div 4$	$= 8.5$
$(8.5 \times 6) + 2$	$= 53$
$(53 - 1) \div 4$	$= 13$
$(13 - 1) \div 4$	$= 3$
$(3 - 1) \div 4$	$= 0.5$
$(0.5 \times 6) + 2$	$= 5$
$(5 - 1) \div 4$	$= 1$
$(1 - 1) \div 4$	$= 0$
$(0 \times 3) + 1$	$= 1$

Su desarrollo en la tabla:

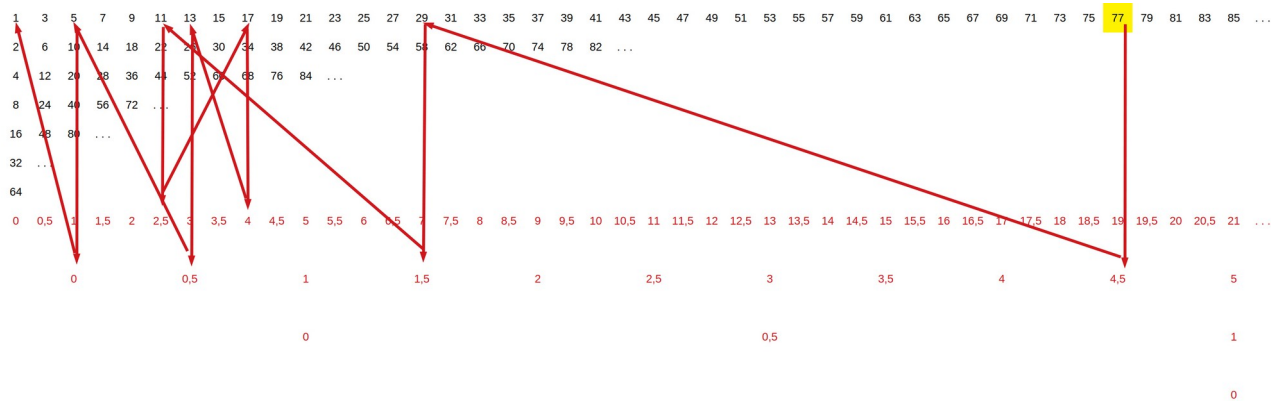


Empezando con el número 77 la secuencia obtenida es: 77, 19, 4.5, 29, 7, 1.5, 11, 2.5, 17, 4, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0, 1.

Los cálculos aplicados:

$$\begin{aligned}
 (77 - 1) / 4 &= 19 \\
 (19 - 1) / 4 &= 4.5 \\
 (4.5 \times 6) + 2 &= 29 \\
 (29 - 1) / 4 &= 7 \\
 (7 - 1) / 4 &= 1.5 \\
 (1.5 \times 6) + 2 &= 11 \\
 (11 - 1) / 4 &= 2.5 \\
 (2.5 \times 6) + 2 &= 17 \\
 (17 - 1) / 4 &= 4 \\
 (4 \times 3) + 1 &= 13 \\
 (13 - 1) / 4 &= 3 \\
 (3 - 1) / 4 &= 0.5 \\
 (0.5 \times 6) + 2 &= 5 \\
 (5 - 1) / 4 &= 1 \\
 (1 - 1) / 4 &= 0 \\
 (0 \times 3) + 1 &= 1
 \end{aligned}$$

Su desarrollo en la tabla:

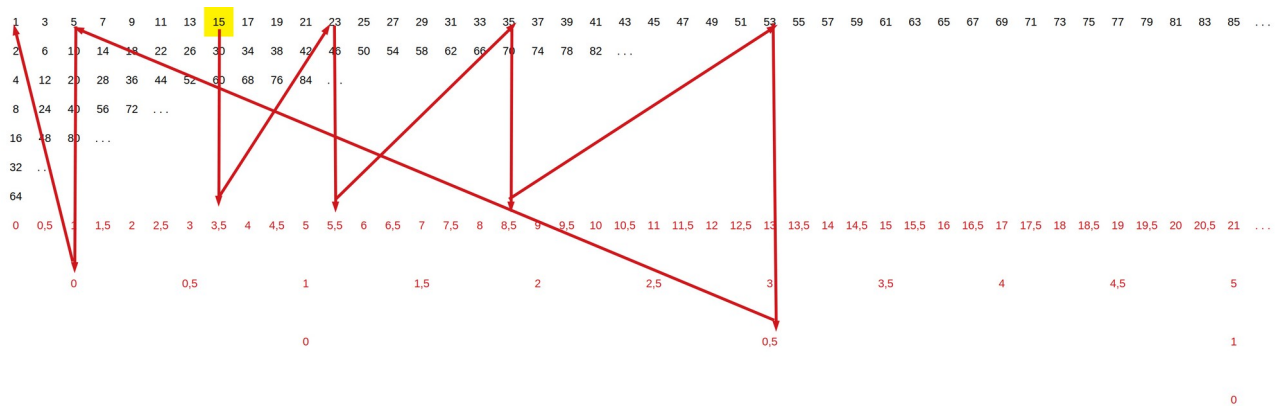


Empezando con el número 15 la secuencia obtenida es: 15, 3.5, 23, 5.5, 35, 8.5, 53, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0, 1.

Los cálculos aplicados:

$$\begin{aligned}(15 - 1) / 4 &= 3.5 \\ (3.5 \times 6) + 2 &= 23 \\ (23 - 1) / 4 &= 5.5 \\ (5.5 \times 6) + 2 &= 35 \\ (35 - 1) / 4 &= 8.5 \\ (8.5 \times 6) + 2 &= 53 \\ (53 - 1) / 4 &= 13 \\ (13 - 1) / 4 &= 3 \\ (3 - 1) / 4 &= 0.5 \\ (0.5 \times 6) + 2 &= 5 \\ (5 - 1) / 4 &= 1\end{aligned}$$

Su desarrollo en la tabla:



En esta tabla se evidencia que la secuencia es ascendente cuando el resultado de la iteración del número impar está en la primera línea roja y que es descendente cuando el resultado está por debajo de esa línea. La iteración del 15, 23 y 35 provocan que la secuencia sea creciente y el número 53 desciende al número 5.

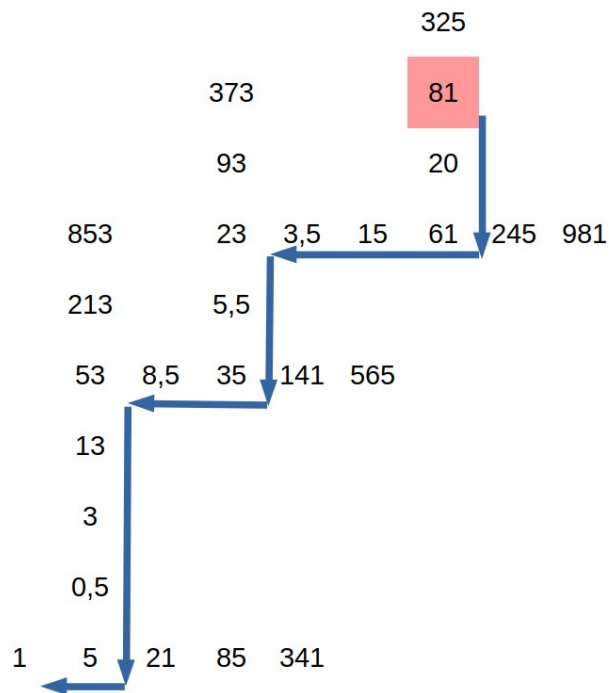
En cada iteración de $(m-1)/4$ el resultado es $1/2N$, por lo que puede ser un número impar, un número par o la mitad de un impar.

En cada iteración de $3m+1$ y de $6m+1$ el resultado es un número impar.

Cuando el resultado es la mitad de un impar, la secuencia es ascendente, porque el impar que resulta es mayor que el anterior.

Cuando el resultado es un número par o impar, la secuencia es descendente, porque el impar que resulta es menor que el anterior.

Diagramas con la ruta que siguen las secuencias.



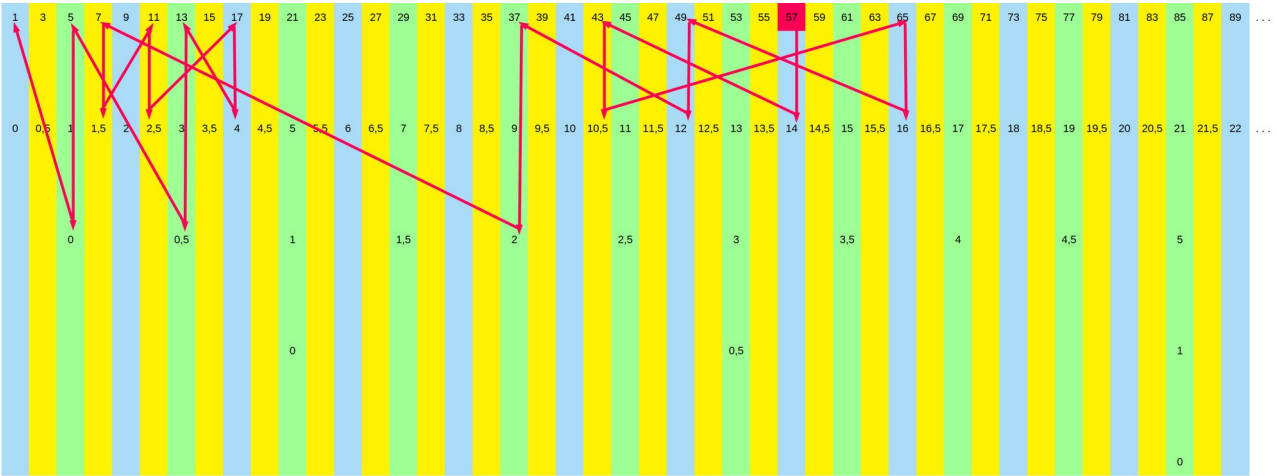
							309		
				725			77		
				181			19		
		853		45			4,5		
		213		11	1,5	7	29	117	469
		53		2,5					
		13	4	17	69	277			
		3							
		0,5							
	1	5	21	85	341				

En esta tabla, con el desarrollo de la secuencia empezada con el número 57, están diferenciados a color los tres posibles resultados de aplicar el algoritmo a los números impares de la primera fila:

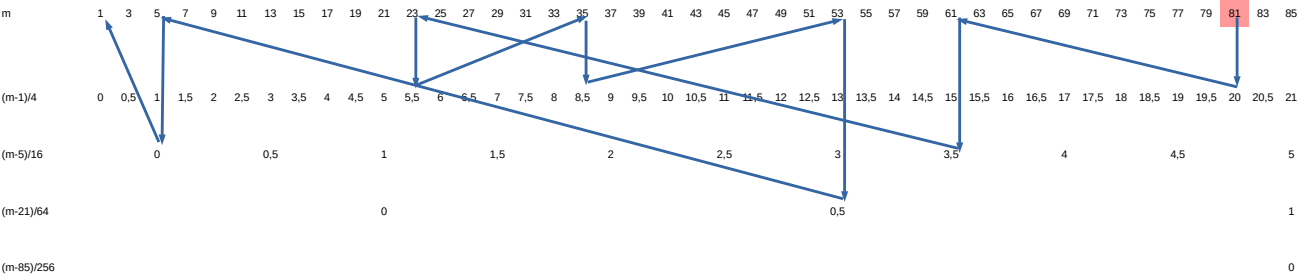
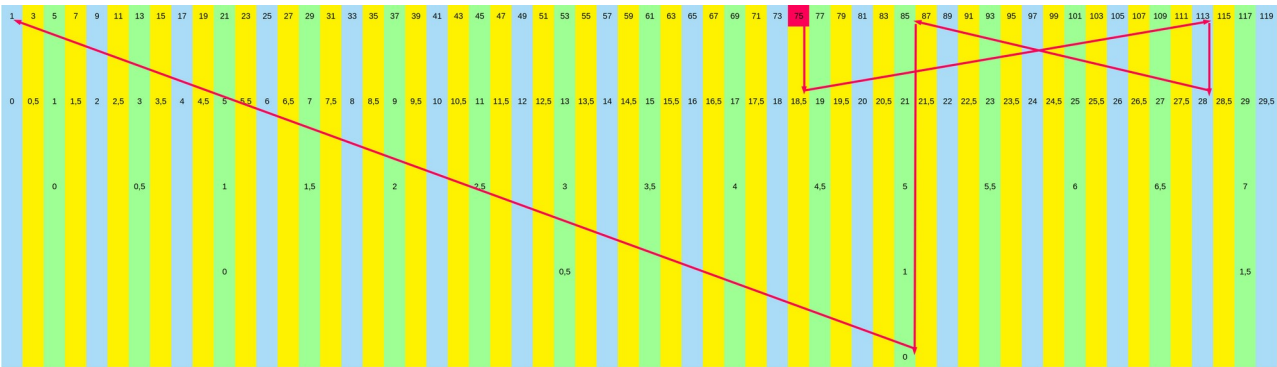
Los impares en amarillo hacen que la secuencia ascienda, siempre el valor de n .

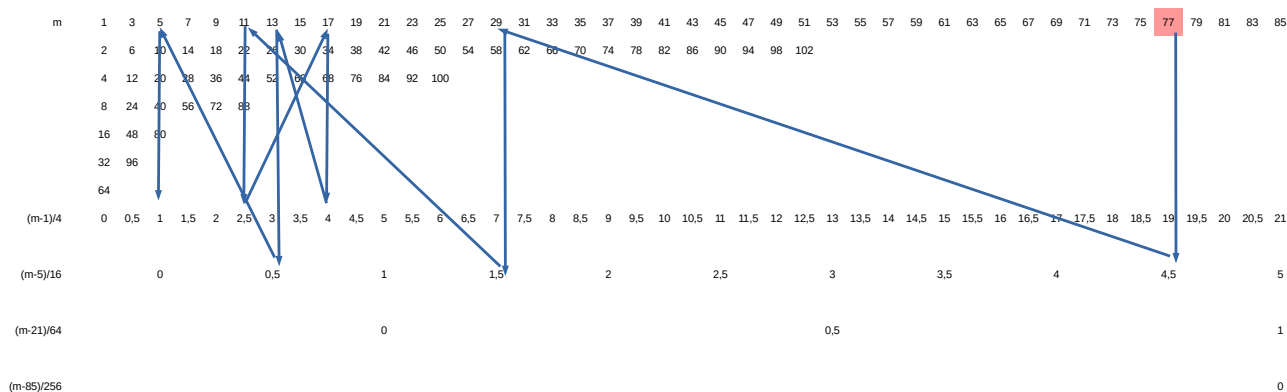
Los impares en azul hacen que la secuencia descienda, siempre el valor de $(n-1)/2$.

Los impares en verde hacen que la secuencia descienda desde el valor de $(5n-3)/4$, $(13n-7)/8$, $(29n-15)/16$, $(61n-31)/32$,
...



Secuencia empezada con el número 75:





$(m-1)/4, (m-5)/16, (m-21)/64, (m-85)/256, \dots$

1, 5, 21, 85, 341, ... [A002450](#) $a(n) = (4^n - 1)/3$.

En el sistema binario estos números son: 1, 101, 10101, 1010101, etc.

En una secuencia de Collatz esos números provocan que alcance el 1 en 2^n pasos, porque $3 \cdot ((4^n - 1)/3) + 1 = 4^n$

4, 16, 64, 256, 1024, ... [A000302](#) $a(n) = 4^n$.

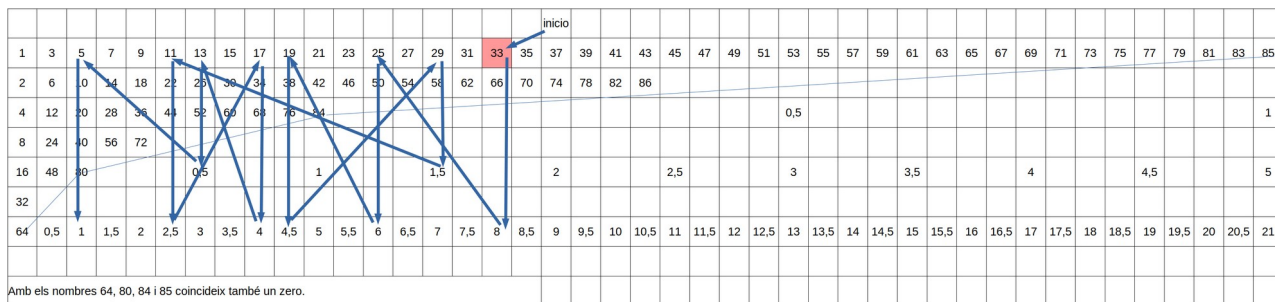
$(m - (4^n - 1)/3)/4^n \implies$

Ejemplo con $m=21$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} (-1 + 4^{-n} (1 + 3m)) = -\frac{1}{3} \approx -0.333333$$

$$\frac{1}{3} ((3m + 1) \times 4^{-n} - 1)$$

n	$\frac{1}{3} (4^{3-n} - 1)$	approximation
1	5	5
2	1	1
3	0	0
4	$-\frac{1}{4}$	-0.25
5	$-\frac{5}{16}$	-0.3125
6	$-\frac{21}{64}$	-0.328125
7	$-\frac{85}{256}$	-0.332031
8	$-\frac{341}{1024}$	-0.333008
9	$-\frac{1365}{4096}$	-0.333252
10	$-\frac{5461}{16384}$	-0.333313
11	$-\frac{21845}{65536}$	-0.333328
12	$-\frac{87381}{262144}$	-0.333332
13	$-\frac{349525}{1048576}$	-0.333333
14	$-\frac{1398101}{4194304}$	-0.333333
15	$-\frac{5592405}{16777216}$	-0.333333



La funció també puede ser : Si el número m es par, aplicar $3m/4$
 Si el número m es impar, aplicar $(m-1)/4$
 Si el número m es mitad de un impar, aplicar $6m+2$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	...	
2	6	10	14	18	...						
4	12	20	...								
8	...										
16											
...											

Siguiendo el proceso de creación de la tabla lógica, cada uno de los diez números impares de la tabla genera su propio itinerario que termina el número 1.

- 1) $1+1=2$, $2/2=1$
- 2) $3+1=4$, $4/2=2$ y $2/2=1$
- 3) $5+1=6$, $6/2=3$, $3+1=4$, $4/2=2$ y $2/2=1$
- 4) $7+1=8$, $8/2=4$, $4/2=2$ y $2/2=1$
- 5) $9+1=10$, $10/2=5$, $5+1=6$, $6/2=3$, $3+1=4$, $4/2=2$ y $2/2=1$
- 6) $11+1=12$, $12/2=6$, $6/2=3$, $3+1=4$, $4/2=2$ y $2/2=1$
- 7) $13+1=14$, $14/2=7$, $7+1=8$, $8/2=4$, $4/2=2$ y $2/2=1$
- 8) $15+1=16$, $16/2=8$, $8/2=4$, $4/2=2$ y $2/2=1$
- 9) $17+1=18$, $18/2=9$, $9+1=10$, $10/2=5$, $5+1=6$, $6/2=3$, $3+1=4$, $4/2=2$ y $2/2=1$
- 10) $19+1=20$, $20/2=10$, $10/2=5$, $5+1=6$, $6/2=3$, $3+1=4$, $4/2=2$ y $2/2=1$
- ...

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
		1	4	2	6	3	8	4	10	5	
			2	1	3	4	4	2	5	6	
			1		4	2	2	1	6	3	
					2	1	1		3	4	
					1				4	2	
									2	1	
									1		

En una escalera ficticia en la que los peldaños son los valores n de la tabla, ocupados por los números impares, los números bajan peldaños, pero no los suben.

n (peldaño)	1	2	3	4	5	6	7	...
Número 1	3	5	7	9	11	13	...	

El número 1 no se moverá del primer peldaño, porque $1+1=2$ y $2/2=1$.

El número 3, que está en el segundo peldaño, bajará al primero.

El número 5 del tercer peldaño bajará al segundo, del número 3 y después al primero, del número 1.

El número 7 bajará de un salto del cuarto al primero.

El número 9, del quinto, pasará por el tercero y el segundo antes de llegar al primero.

El número 11 bajará del sexto peldaño al segundo antes de llegar al primero.

El número 13 bajará al cuarto y después al primero.

El número 15, del octavo, saltará directamente al primero.

El número 17 del noveno bajará al quinto, tercero, segundo y primero.

El número 19 del décimo, bajará al tercero, segundo y primero.

Todos los números impares son $2n-1$ y $(2n-1+1)/2=n \rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$ y este proceso genera repetida e indefinidamente, números impares.

SEGUNDO: Una escalera infinita.

Entendemos que los números pares de esta tabla son el resultado de sumar 1 a los números impares, concentrándose en la mitad izquierda de la tabla y en mayor densidad en las columnas donde están los números impares menores. Esta es una tabla lógica que representa a los números pares y a los números impares a los que llegarán al dividirlos entre 2^n .

[illegible]

En la conjetura de Collatz, al multiplicar por 3 a los números impares, el número obtenido sigue siendo un número impar y al sumarle 1 y dividir entre 2 a los números pares, estamos ante el mismo proceso descrito anteriormente.

- 1) $1 \times 3 = 3, 3 + 1 = 4, 4/2 = 2, 2/2 = 1$
- 2) $3 \times 3 = 9, 9 + 1 = 10, 10/2 = 5, 5 \times 3 = 15, 15 + 1 = 16, 16/2 = 8, 8/2 = 4, 4/2 = 2, 2/2 = 1$
- 3) $5 \times 3 = 15, 15 + 1 = 16, 16/2 = 8, 8/2 = 4, 4/2 = 2, 2/2 = 1$
- 4) $7 \times 3 = 21, 21 + 1 = 22, 22/2 = 11, 11 \times 3 = 33, 33 + 1 = 34, 34/2 = 17, 17 \times 3 = 51, 51 + 1 = 52, 52/2 = 26, 26/2 = 13, 13 \times 3 = 39, 39 + 1 = 40, 40/2 = 20, 20/2 = 10, 10/2 = 5, 5 \times 3 = 15, 15 + 1 = 16, 16/2 = 8, 8/2 = 4, 4/2 = 2, 2/2 = 1$
- 5) $9 \times 3 = 27, 27 + 1 = 28, 28/2 = 14, 14/2 = 7, 7 \times 3 = 21, 21 + 1 = 22, 22/2 = 11, 11 \times 3 = 33, 33 + 1 = 34, 34/2 = 17, 17 \times 3 = 51, 51 + 1 = 52, 52/2 = 26, 26/2 = 13, 13 \times 3 = 39, 39 + 1 = 40, 40/2 = 20, 20/2 = 10, 10/2 = 5, 5 \times 3 = 15, 15 + 1 = 16, 16/2 = 8, 8/2 = 4, 4/2 = 2, 2/2 = 1$
- 6) $11 \times 3 = 33, 33 + 1 = 34, 34/2 = 17, 17 \times 3 = 51, 51 + 1 = 52, 52/2 = 26, 26/2 = 13, 13 \times 3 = 39, 39 + 1 = 40, 40/2 = 20, 20/2 = 10, 10/2 = 5, 5 \times 3 = 15, 15 + 1 = 16, 16/2 = 8, 8/2 = 4, 4/2 = 2, 2/2 = 1$
- 7) $13 \times 3 = 39, 39 + 1 = 40, 40/2 = 20, 20/2 = 10, 10/2 = 5, 5 \times 3 = 15, 15 + 1 = 16, 16/2 = 8, 8/2 = 4, 4/2 = 2, 2/2 = 1$
- 8) $15 \times 3 = 45, 45 + 1 = 46, 46/2 = 23, 23 \times 3 = 69, 69 + 1 = 70, 70/2 = 35, 35 \times 3 = 105, 105 + 1 = 106, 106/2 = 53, 53 \times 3 = 159, 159 + 1 = 160, 160/2 = 80, 80/2 = 40, 40/2 = 20, 20/2 = 10, 10/2 = 5, 5 \times 3 = 15, 15 + 1 = 16, 16/2 = 8, 8/2 = 4, 4/2 = 2, 2/2 = 1$
- 9) $17 \times 3 = 51, 51 + 1 = 52, 52/2 = 26, 26/2 = 13, 13 \times 3 = 39, 39 + 1 = 40, 40/2 = 20, 20/2 = 10, 10/2 = 5, 5 \times 3 = 15, 15 + 1 = 16, 16/2 = 8, 8/2 = 4, 4/2 = 2, 2/2 = 1$
- 10) $19 \times 3 = 57, 57 + 1 = 58, 58/2 = 29, 29 \times 3 = 87, 87 + 1 = 88, 88/2 = 44, 44/2 = 22, 22/2 = 11, 11 \times 3 = 33, 33 + 1 = 34, 34/2 = 17, 17 \times 3 = 51, 51 + 1 = 52, 52/2 = 26, 26/2 = 13, 13 \times 3 = 39, 39 + 1 = 40, 40/2 = 20, 20/2 = 10, 10/2 = 5, 5 \times 3 = 15, 15 + 1 = 16, 16/2 = 8, 8/2 = 4, 4/2 = 2, 2/2 = 1$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19		
3	9	15	21	27	33	39	45	51	57		
4	10	16	22	28	34	40	46	52	58		
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29		
1	15	4	33	7	51	10	69	13	87		
	16	2	34	21	52	5	70	39	88		
	8	1	17	22	26	15	35	40	44		
	4		51	11	13	16	105	20	22		
	2		52	33	39	8	106	10	11		
	1		26	34	40	4	53	5	33		
			13	17	20	2	159	15	34		
			39	51	10	1	160	16	17		
			40	52	5		80	8	51		
			20	26	15		40	4	52		
			10	13	16		20	2	26		
			5	39	8		10	1	13		
			15	40	4		5		39		
			16	20	2		15		40		
			8	10	1		16		20		
			4	5			8		10		
			2	15			4		5		
			1	16			2		15		
				8			1		16		
				4					8		
				2					4		
				1					2		
									1		

Este proceso también ha formado los 10 primeros escalones de una escalera infinita, en la que los números impares suben y bajan.

El número 1 del primer peldaño sube al segundo del número 3 y vuelve a bajar al primero.

El número 3 del segundo peldaño sube al quinto del número 9, baja al tercero del número 5, sube al octavo del número 15 y baja al primero del número 1.

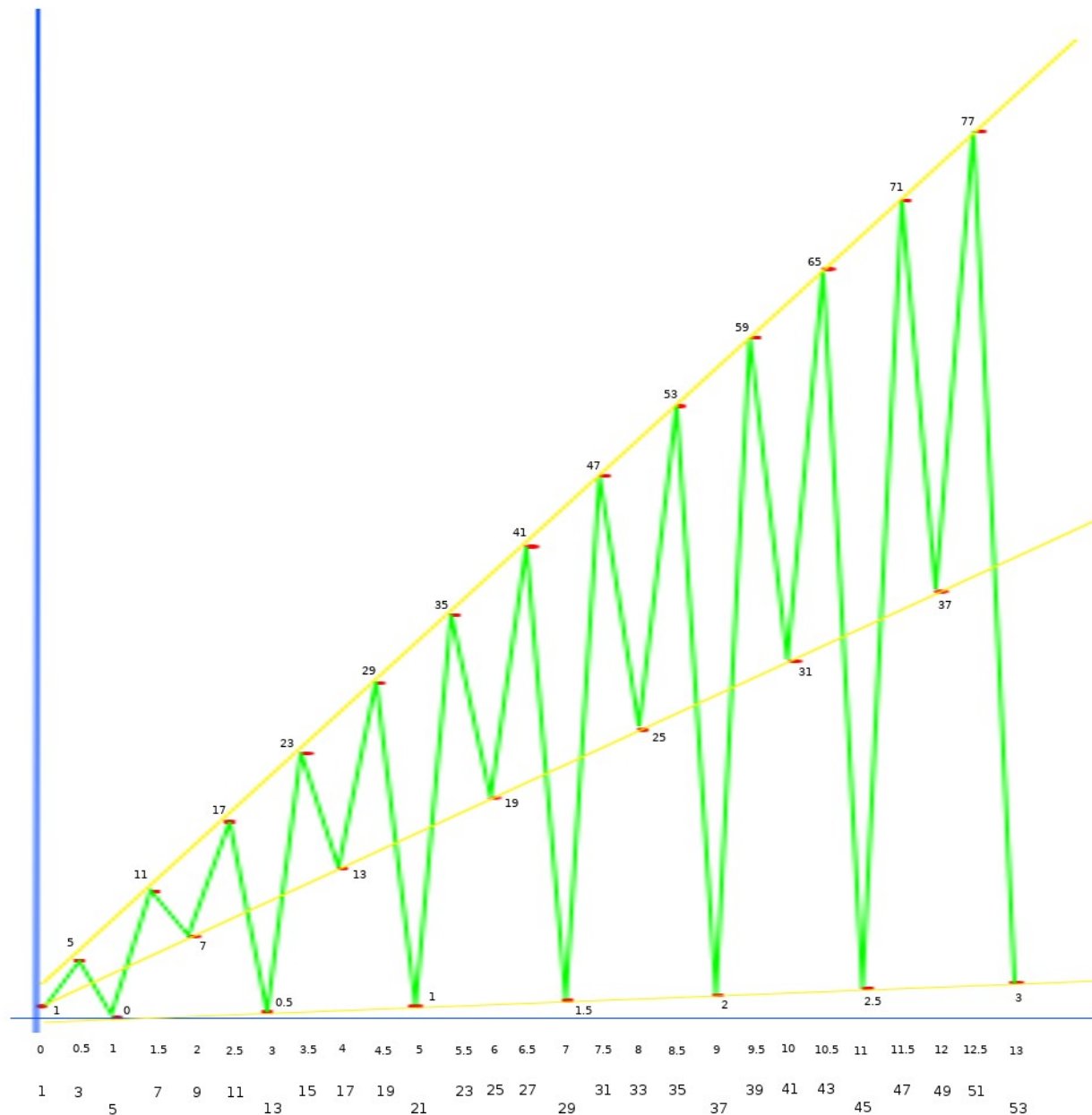
El número 5 del tercer peldaño sube al octavo del número 15 y baja al primero del número 1.

El número 7 del cuarto sube al 11 del sexto, al 33 del decimoséptimo, baja al 17 del noveno, sube al 51 del vigesimosexto, baja al 13 del séptimo, sube al 39 del vigésimo, baja al 5 del tercero y baja al primero del número 1.

El número 9 del quinto peldaño sube al 27 del decimocuarto, baja al cuarto del número 7, sube al 21 del decimoprimer, baja al sexto del número 11, ...

*En toda escalera, el primer peldaño es el primero subiendo y el último bajando. Quiere decirse, que si se sube, no hay ningún escalón antes de él y cuando se baja, no hay ninguno más después de él.
Esta afirmación es trivial, pero es importante.*

Todos los números impares son $2n-1$ y $3(2n-1)+1=3n-1 \rightarrow 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots$ y este proceso genera repetida e indefinidamente, números impares.



En la fila inferior los números impares que son la cota inferior de las secuencias. Sobre cada uno de ellos, sus "puentes de enlace" que resultan de aplicarles $(n-1)/4$, que enlazan la secuencia con el número indicado sobre ellos en el diagrama que son los términos de la secuencia a la que enlazan.

Los impares de la fila inferior 5, 13, 21, 29, 37, 45, 53, . . . no son cota inferior de las secuencias, sino que son términos intermedios y son impares de la forma $8n+5$. Sobre ellos en la segunda fila los términos que les siguen en las secuencias.

Ejemplos:

Cota inferior 25, puente de enlace: $(25-1)/4=6$ y término de la secuencia que enlaza: $3*6+1=19$.

Cota inferior 41, puente de enlace: $(41-1)/4=10$, término de la secuencia que enlaza: $3*10+1=31$.

Cota inferior 23, puente de enlace: $(23-1)/4=5,5$, término de la secuencia que enlaza: $6*5,5+2=35$.

$a(n) = 1, 3, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 23, 25, 27, 31, 33, 35, 39, 41, 43, \dots$

$8n+5$

$a(n) = 5, 13, 21, 29, 37, 45, 53, 61, 69, 77, 85, 93, 101, 109, 117, \dots$

$(5n + 15n^2 + 10n^3 - a(n) - 2na(n) - n^2a(n) - a(1+n) - na(1+n) - n^2a(1+n))/n^2$

$a(n) = 1, 5, 11, 7, 17, 23, 13, 29, 35, 19, 41, 47, 25, 53, 59, 31, 65, 71, 37, 77, \dots$

Formamos una progresión geométrica con cota inferior un número impar, sin cota superior y factor $4n+1$.

El primer número de la sucesión (cota inferior) puede ser cualquier número impar que no sea de la forma $8n-3$, (5, 13, 21, 29, 37, ...) porque esos son los demás términos de las sucesiones.

Hacemos la sucesión con cota inferior 23:

23, 93, 373, 1493, 5973, 23893, 95573, 382293, 1529173, 6116693, 34466773, 97867093, ...

La misma sucesión puede ser decreciente con cota inferior igual a 23 y cota superior igual a un término cualquiera de la misma sucesión. En este caso el factor es $(n-1)/4$. Sirve el mismo ejemplo anterior leído de derecha a izquierda. Después de (n) iteraciones de $(n-1)/4$ llegaremos al 23.

En las sucesiones decrecientes conocemos que hemos llegado a su cota inferior cuando el resultado de $(n-1)/4$ no es un número impar, sino un número par o un medio impar ($\frac{1}{2}$ impar).

Entonces aplicamos a este resultado la operación siguiente:

Si es un número par lo multiplicamos por 3 y le sumamos 1, $(3n+1)$ y si es medio impar lo multiplicamos por 6 y le sumamos 2, o sea, $2(3n+1)$.

Aplicando estas operaciones a los resultados de forma iterada, se llega siempre al número 1, sea cual sea el impar (cota superior) inicial.

En el ejemplo anterior, empezando por el número 1493 las operaciones son las siguientes:

$$(1493 - 1) / 4 = 373$$

$$(373 - 1) / 4 = 93$$

$$(93 - 1) / 4 = 23$$

$$(23 - 1) / 4 = 5.5$$

$$(5.5 \times 6) + 2 = 35$$

$$(35 - 1) / 4 = 8.5$$

$$(8.5 \times 6) + 2 = 53$$

$$(53 - 1) / 4 = 13$$

$$(13 - 1) / 4 = 3$$

$$(3 - 1) / 4 = 0.5$$

$$(0.5 \times 6) + 2 = 5$$

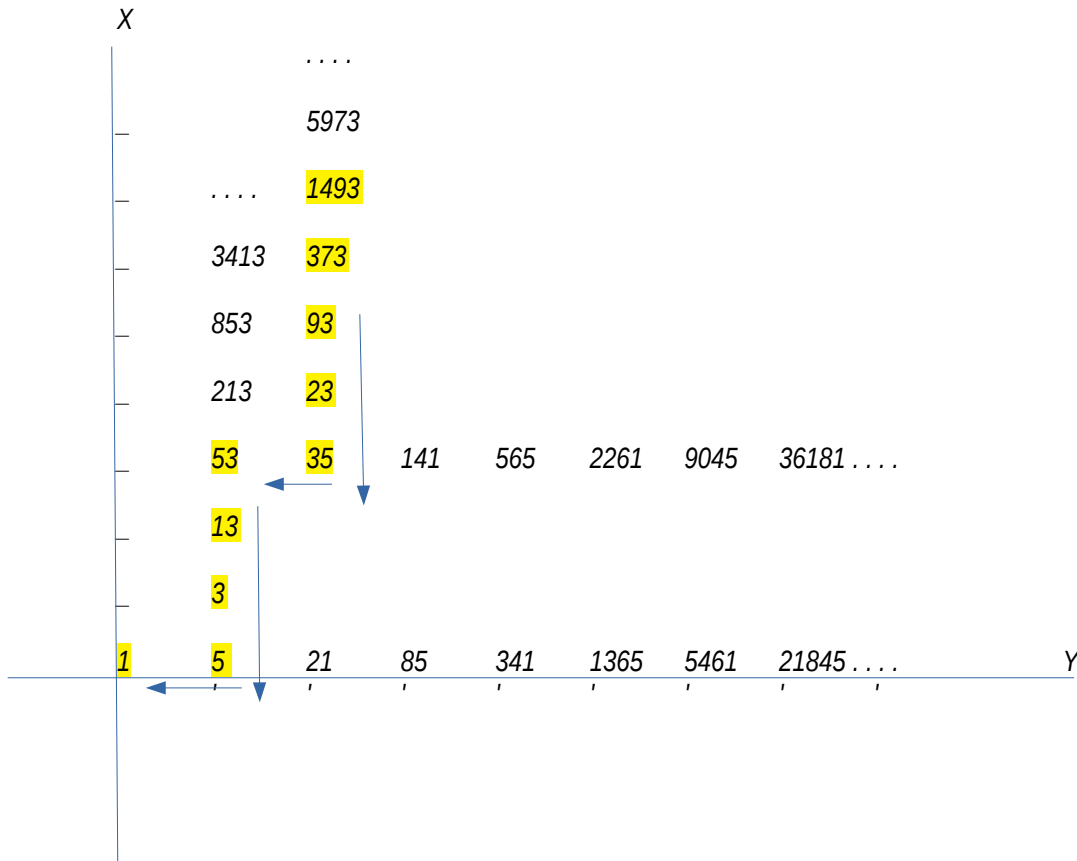
$$(5 - 1) / 4 = 1$$

El orden de los impares obtenidos ha sido éste: 373, 93, 23, 35, 53, 13, 3, 5, 1.

Desarrollamos una secuencia con cada uno de los impares obtenidos que no son de la forma $8n-3$:

23, 93, 373, 1493, 5973, ...
 35, 141, 565, 2261, 9045, ...
 3, 13, 53, 213, 853, 3413, ...
 1, 5, 21, 85, 341, 1365, 5461, ...

Colocadas estas sucesiones adecuadamente, el diagrama muestra el camino recorrido por el término 1493 hasta llegar a 1.



Las secuencias colocadas en un plano cartesiano con origen el término 1 nos señala la altitud o nivel (A) en la X y la latitud (L) en la Y.

La secuencia de cota inferior 1 está en el nivel de altitud 0 y tiene infinitas latitudes. Es una secuencia de altitud.

La secuencia de cota inferior 3 está en latitud 1 y tiene infinitos niveles de altitud. Es una secuencia de latitud.

La secuencia de cota inferior 35 está en el nivel de altitud 3 y tiene infinitas latitudes. Es una secuencia de altitud.

La secuencia de cota inferior 23 está en latitud 2 y tiene infinitos niveles de altitud. Es una secuencia de latitud.

La ruta del término 1493 para llegar al inicio 1:

altitud 7 - latitud 2

altitud 3 - latitud 2

altitud 3 - latitud 1

altitud 0 - latitud 1

altitud 0 - latitud 0

Ha necesitado 4 desplazamientos, 2 de altitud (A) y 2 de latitud (L). La ruta desde el 1 ha sido L1, A3, L1, A4.

El número de conexiones entre las secuencias son 4 y sus "puentes de enlace" son:

El 23 con el 35: $(23-1)/4=5,5$

El 35 con el 53: $(35-1)/4=8,5$

El 3 con el 5: $(3-1)/4=0,5$

Los tres puentes de enlace resultan ser medios impares porque el término al que enlazan los tres son impares de la forma $6n-1$ que sus dígitos suman 2, 5, 8.

Cuando enlazan a impares de la forma $6n-5$ que sus dígitos suman 1, 4, 7 el puente de enlace es un número par.

No hay ninguna secuencia que enlace a los términos de la forma $6n-3$ que sus dígitos suman 3, 6, 9.

Podemos conocer la cota inferior de la secuencia que enlaza a cualquier término receptivo con esta operación:

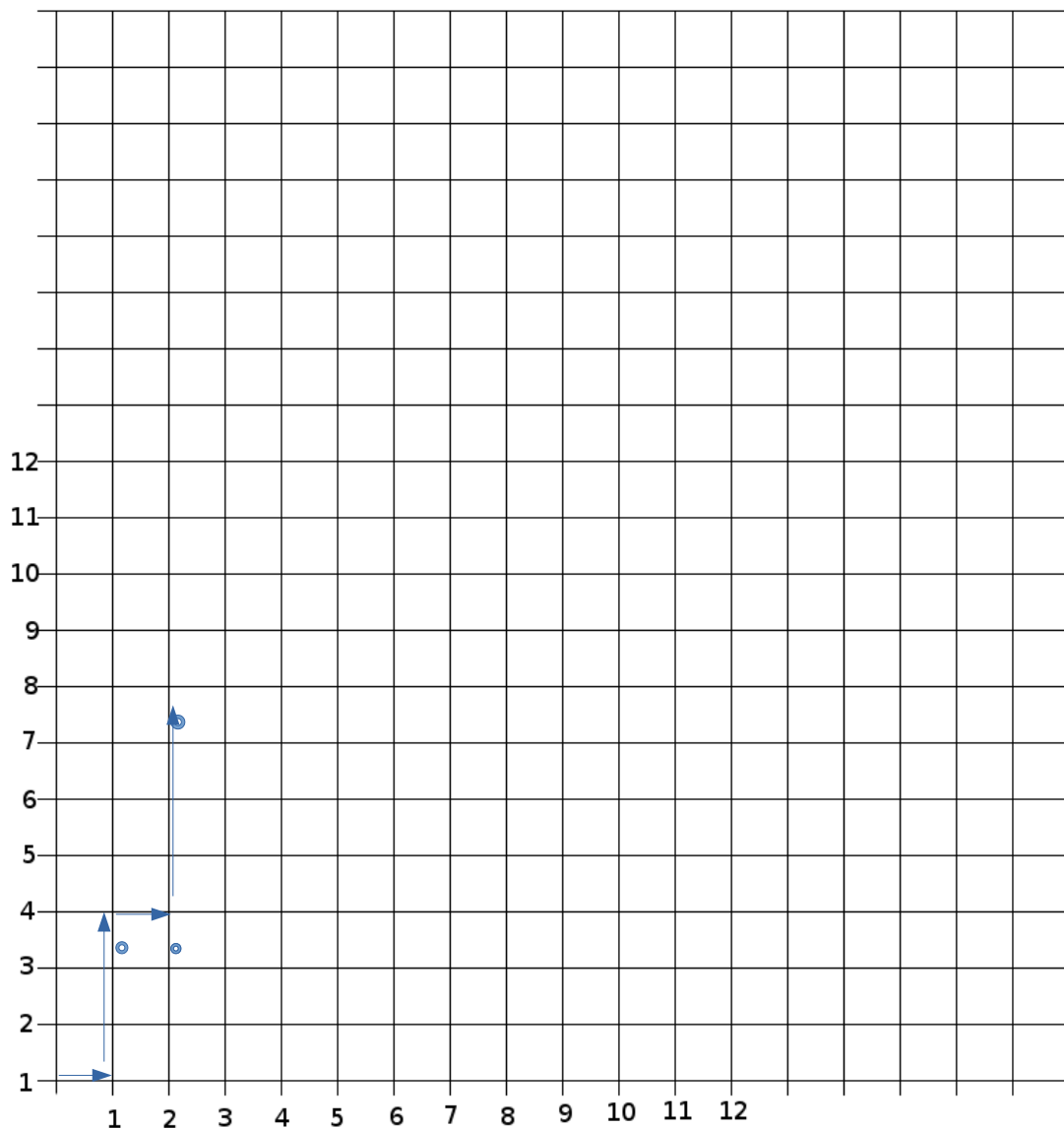
Si el término receptivo (R) es un impar de la forma $6n-5$ que sus dígitos suman 1, 4, 7 el término cota inferior de la secuencia que le enlaza es igual a $(R*4-1)/3$

Si el término receptivo (R) es un impar de la forma $6n-1$ que sus dígitos suman 2, 5, 8 el término cota inferior de la secuencia que le enlaza es igual a $(R*4-2)/6$

Podemos desarrollar la secuencia a partir de ese término cota inferior obtenido, multiplicándolo por 4 y sumando 1 al resultado, repitiendo en cada término para obtener el siguiente. Pero también todos los términos de la secuencia se pueden obtener mediante $(R*4^n-1)/3$ si el término receptivo (R) es un impar de la forma $6n-5$. O mediante $(R*4^n-2)/6$ si el término receptivo (R) es un impar de la forma $6n-1$.

Si conocemos la ruta completa en (L) y (A) de un término, podremos llegar a él sin conocer la identidad de dicho término.

Por ejemplo: Si sabemos la trayectoria del diagrama L1, A3, L1, A4, hallamos el término de esta manera



$$1 \cdot 4 + 1 = 5 \text{ (tenemos L1)}$$

$$(5 \cdot 4 - 2) / 6 = 3. \quad 3 \cdot 4 + 1 = 13. \quad 13 \cdot 4 + 1 = 53 \text{ (tenemos A3)}$$

$$(53 \cdot 4 - 2) / 6 = 35 \text{ (tenemos L1)}$$

$$(35 \cdot 4 - 2) / 6 = 23. \quad 23 \cdot 4 + 1 = 93. \quad 93 \cdot 4 + 1 = 373. \quad 373 \cdot 4 + 1 = 1493 \text{ (tenemos A4)}$$

El término es el 1493.

m	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85			
2m	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86																								
4m	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84																																			
8m	8	24	40	56	72																																									
16m	16	48	80																																											
32m	32																																													
64m	64																																													

Los números señalados en color gris son los impares múltiplos de 3, que resultan de multiplicar por 3 a los números impares. Los números señalados en amarillo son los números que resultan de sumar 1 a estos impares múltiplos de 3. Para formar una secuencia de Collatz con los primeros 86 números naturales, tenemos que plantearla en una tabla que contenga los números naturales $3 \cdot 85 + 1$, que es hasta el número 256. Pero puede no ser suficiente si es necesario multiplicar por 3 alguno de sus impares. Entonces el mayor número de la tabla podría ser enorme. Pero para explicar la importancia de esta tabla y entender la conjetura es suficiente hacerlo con esta. La mayor cantidad de pares que son el resultado de $3m+1$ se concentran en la columna del impar 1 con tres números. En segundo lugar la columna del 5 con dos números y le siguen con un número cada una las columnas del 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 35 y 41.

m	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	103
2m	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102																										
4m	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100																																							
8m	8	24	40	56	72	88	104																																													
16m	16	48	80																																																	
32m	32	96																																																		
64m	64																																																			

Vemos como quedan colocados los números en la tabla y la proporción de los números pares en cada fila 2^n . Los impares en la primera fila y con el mismo color los pares que producen al sumarles 1.

A continuación todos los impares en la primera fila y debajo de cada uno de ellos el resultado de aplicarles $(m-1)/4$

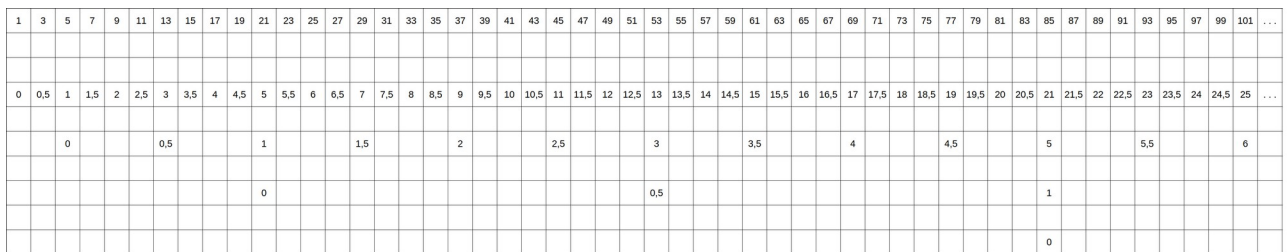
La secuencia obtenida: 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 y los números impares de la secuencia: 23, 35, 53, 5, 1. No están los números 13 y 3 porque son elementos de la misma progresión que el número 53.

El desarrollo de la secuencia vista en la tabla:

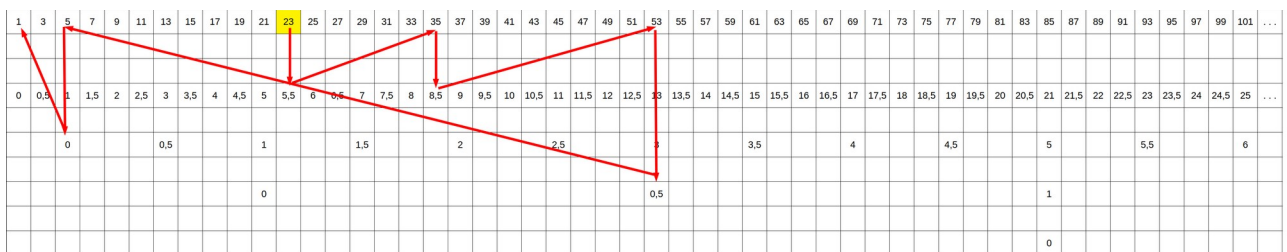


En esta tabla se visualiza que los resultados que son un número fraccionario provocan que el siguiente número impar sea mayor y la secuencia ascendente. Cuando el resultado es un número impar, el número siguiente es menor y la secuencia descendente. Ocurre igual cuando el resultado es un número par.

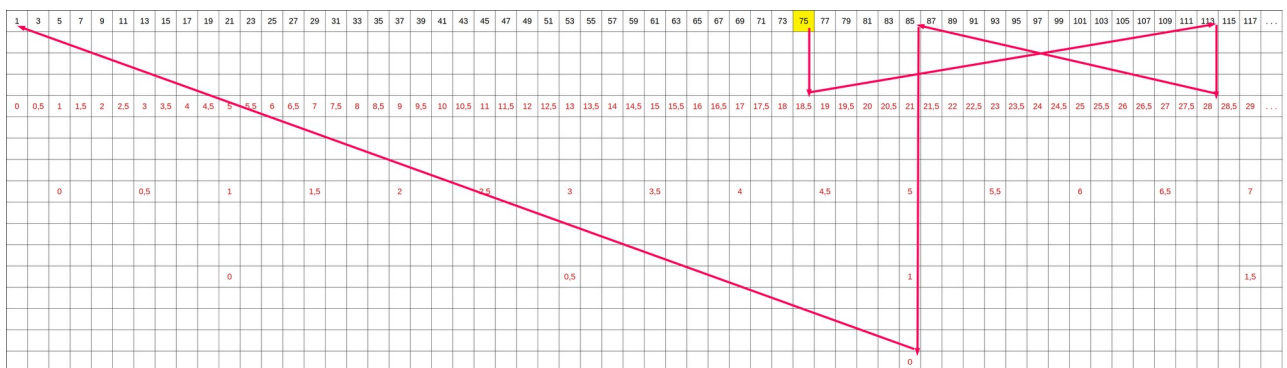
En la tabla siguiente hemos puesto también los resultados del algoritmo de los segundo impares:



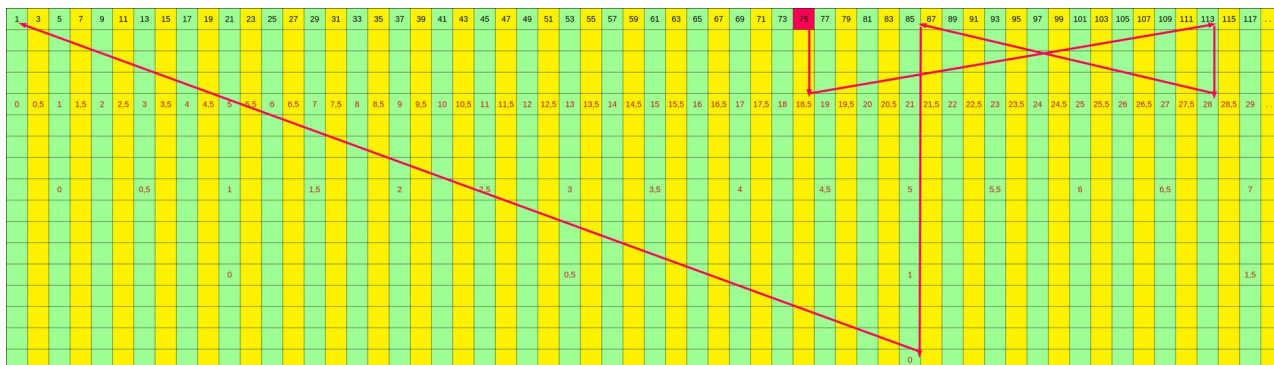
Y con el desarrollo de la misma secuencia anterior que empieza con el número 23:



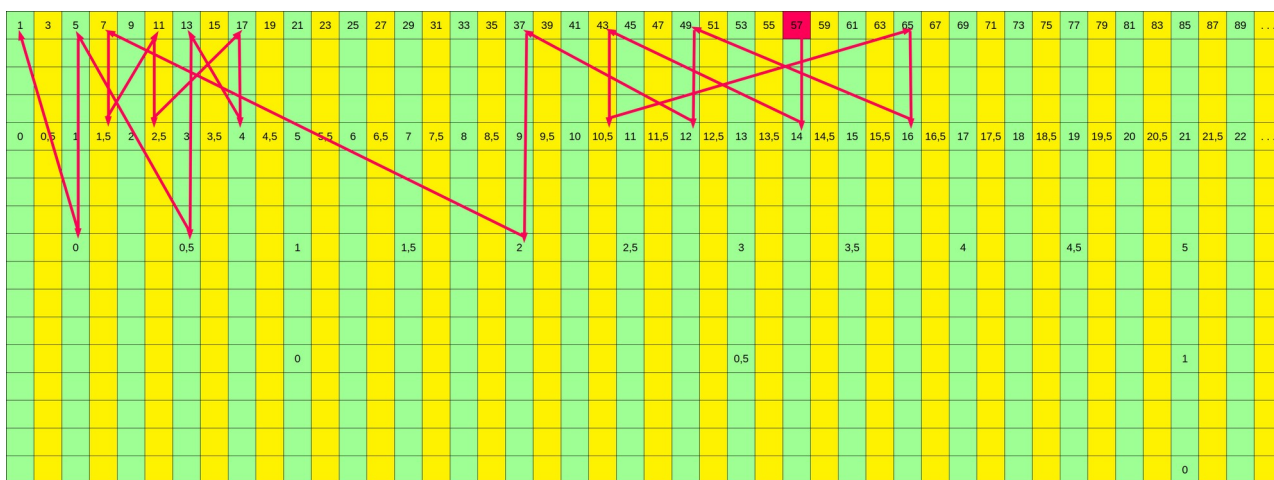
Otra secuencia comenzando con el número 75:
75, 18.5, 113, 28, 85, 5, 1, 0.



Los impares de la forma $4n-3$ situados en las columnas en amarillo son los que hacen que la secuencia sea ascendente y los de la forma $4n-1$ que están en las columnas verdes son los responsables de que la secuencia descienda.



En el desarrollo de la secuencia empezada con el 57, un poco más caótica que la anterior, vemos que hay 3 impares amarillos y 7 verdes.



Existe la misma cantidad de impares amarillos que de impares verdes y la secuencia tiene la misma probabilidad de encontrar a unos o a otros.

Los impares de la forma $4n-3$ que provocan que la secuencia sea ascendente, aumentan al próximo número impar siempre en la misma proporción, con el valor de n , mientras que los de la forma $4n-1$ que provocan que la secuencia sea descendente disminuyen al siguiente impar en mayor proporción, de manera progresiva: $(n-1)/2$, $(5n-3)/4$, $(13n-7)/8$, $(29n-15)/16$, $(61n-31)/32$, ...

Ejemplos: El impar 23 ($2n-1$), $n=12$. El próximo impar será $23+12=35$.
El impar 35, $n=18$. El próximo impar será el $35+18=53$.

Ejemplos: El impar 89, $n=45$. El próximo impar será $89-(45-1)/4 = 67$.
El impar 29, $n=15$. El próximo impar será $29-(5*15-3)/4 = 11$.
El impar 101, $n=51$. El próximo impar será $101-(13*51-7)/8 = 19$.

Si la probabilidad es la misma, ¿podría haber una secuencia que no acabase en el impar 1?

Si la hubiese, tendría que ser infinita y esto no es posible porque en la secuencia siempre habrá impares verdes que la harán descender.

OTRA TABLA DIFERENTE

Ahora a continuación una tabla con los números impares y el valor de n de todos ellos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	...
2n-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	...

A continuación la misma tabla con el valor de $3n-1$. Esto es porque los impares $2n-1$ que son de la forma $4n-3$ aumentan con el valor de su n al próximo impar y son los responsables de que la secuencia sea ascendente, entonces es $3n-1$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	...
2n-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	...
3n-1	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	...

En la tabla siguiente están también los resultados de dividir entre 2 a los números pares $3n-1$ hasta que llegan al próximo impar:

[illegible]

Los impares $2n-1$ son $k(1)$ y los impares $3n-1$ son $k(2)$.

Ahora formaremos una sucesión de números aplicando a un número natural inicial $k(1)$ estas dos operaciones:

Si es impar le sumaremos el valor de su n .

Si es par lo dividiremos entre 2.

Repetir con cada resultado obtenido hasta llegar a 1.

$k(1)$ y $k(2)$ son impares, o sea $2n+1$ y $k(2)$ es igual a $k(1)+n$. Ejemplo $k(1)=7$ y $k(2)=7+4=11$.

O sea, $k(2) = (k(1) + n) / 2^n$

2^n es la mayor potencia de 2 que divide a $(k(1) + n)$. Puede ser 2^0 , o sea $(k(1) + n)/1$

Sumarle n al impar es lo mismo que triplicarlo, sumarle 1 y dividirlo entre 2.

29, 44, 22, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

$$\begin{array}{l} 29+15 = 44 \\ 44/2 = 22 \\ 22/2 = 11 \\ 11+6 = 17 \\ 17+9 = 26 \\ 26/2 = 13 \\ 13+7 = 20 \\ 20/2 = 10 \\ 10/2 = 5 \\ 5+3 = 8 \\ 8/2 = 4 \\ 4/2 = 2 \\ 2/2 = 1 \end{array}$$
[illegible]

Otra secuencia empezando con el número 49:

49, 74, 37, 56, 28, 14, 7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

CALCULOS:

$49+25 = 74$
 $74/2 = 37$
 $37+19 = 56$
 $56/2 = 28$
 $28/2 = 14$
 $14/2 = 7$
 $7+4 = 11$
 $11+6 = 17$
 $17+9 = 26$
 $26/2 = 13$
 $13+7 = 20$
 $20/2 = 10$
 $10/2 = 5$
 $5+3 = 8$
 $8/2 = 4$
 $4/2 = 2$
 $2/2 = 1$

Su desarrollo en la tabla:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	...
2^n-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	...
$3n-1$	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	...
$(3n-1)/2$	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100	103	106	109	112	115	118	121	124	...
$(3n-1)/4$	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	...
$(3n-1)/8$	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100	103	106	109	112	115	118	121	124	...
$(3n-1)/16$	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	...
$(3n-1)/32$	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100	103	106	109	112	115	118	121	124	...

Es descendente con los impares que tienen el valor de n impar y es ascendente cuando el valor de n es par. Esta secuencia desciende con todos los impares a excepción del 11.

La rapidez con que la sucesión llegue al 1 depende del valor de 2^n que divide al impar $3n-1$. Si es $2^0=1$ entonces la sucesión es ascendente y es descendente desde $2^1=2$ hasta 2^∞ .

Así pues, podemos decir que cada término de la sucesión es igual a la suma del término anterior y su valor de n y su resultado dividido por la mayor potencia de 2 que se pueda.

Los números impares de la secuencia anterior empezada con el número 49:

$(49+25)/2=37$
 $(37+19)/2=28$
 $(28+14)/2=21$
 $(21+11)/2=16$
 $(16+7)/2=11$
 $(11+4)/2=7$
 $(7+3)/2=5$
 $(5+2)/2=3$
 $(3+1)/2=2$
 $(2+1)/2=1$

Tabla de otra secuencia empezada con el número 33:

[illegible]

Cada término de la secuencia es $k(n) = (3n-1)/2^n$ donde 2^n es la mayor potencia de 2 que divide a $3n-1$, desde $2^1=2$ hasta 2^∞ .

UNA TABLA DE LOS NÚMEROS NATURALES

En esta tabla, disponiendo de espacio y tiempo para escribirlos, podrían estar todos los números naturales. Los números impares $2n-1$ en la primera fila y en las filas siguientes los números pares $2(2n-1)$, $4(2n-1)$, $8(2n-1)$, . . .

[illegible]

Podrían estar todos los números, pero nunca los veríamos todos hasta un número “k” porque no podemos ver todos los impares. Por ejemplo, en la tabla vemos el número par 126, pero solamente hay impares hasta el número 63. Para poder ver todos los números hasta un número “k” tenemos que formar la tabla escribiendo en ella los números ordenadamente colocando los números impares en la primera fila y los números pares debajo del que es su mitad, de esta forma:

[illegible]

Ahora en esta tabla vemos todos los números ordenadamente hasta el 63 y también podrían estar todos los números naturales, disponiendo de espacio y tiempo para escribirlos.

Empezamos escribiendo 1, 2 y 3:

[illegible]

Cantidad de números en las filas: 2, 1.

A continuación escribimos los números 4, 5, 6 y 7:

[illegible]

Cantidad de números en las filas: 4, 2, 1.

Seguimos escribiendo los números ordenadamente hasta el 15:

[illegible]

Cantidad de números en las filas: 8, 4, 2, 1.

Ahora hasta el 31:

[illegible]

Cantidad de números en las filas: 16, 8, 4, 2, 1.

Hasta el 63:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	...
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	...
	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	...																
	4	12	20	28	36	44	52	60	...																								
	8	24	40	56	...																												
	16	48	...																														
	32	...																															
	...																																

Cantidad de números en las filas: 32, 16, 8, 4, 2, 1.

Destacar algunas curiosidades:

Los números de la primera fila que están en las columnas $n = 2^n$, son $2^{n+1}-1$.

Y 2^n es la cantidad de números que hay en cada fila.

Los números 2^n-1 señalados en la tabla:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	...
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	...
	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	...																
	4	12	20	28	36	44	52	60	...																								
	8	24	40	56	...																												
	16	48	...																														
	32	...																															
	...																																

En esta están señalados los números de Jacobsthal:

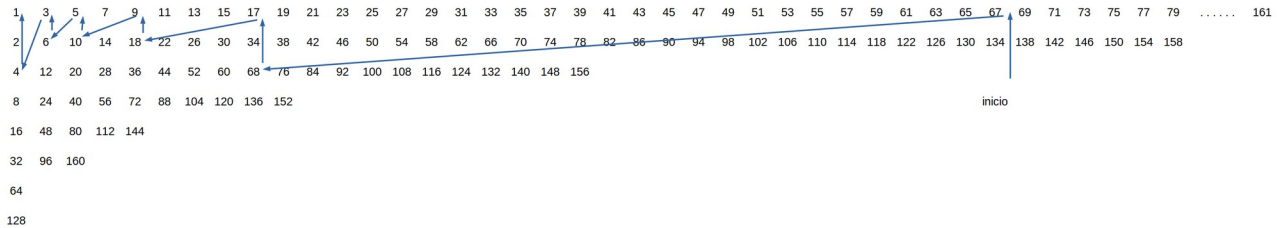
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	...				
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	...				
	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	...																										
	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	...																																				
	8	24	40	56	72	...																																										
	16	48	80	...																																												
	32	...																																														
	64	...																																														
	...																																															

La cantidad de números que hay en cada fila coinciden con los números de Jacobsthal.

También se pueden desarrollar secuencias con los números naturales y visualizarlas en la tabla.

Por ejemplo, formar una secuencia de números empezando con un número natural cualquiera, aplicándole las siguientes operaciones: Si el número es un impar, sumarle 1 y si el número es un par, dividirlo entre 2. Repetir el proceso en cada resultado obtenido hasta llegar al 1.

Empezando con el número 134 la secuencia que obtenemos es: 134, 67, 68, 34, 17, 18, 9, 10, 5, 6, 3, 4, 2, 1.



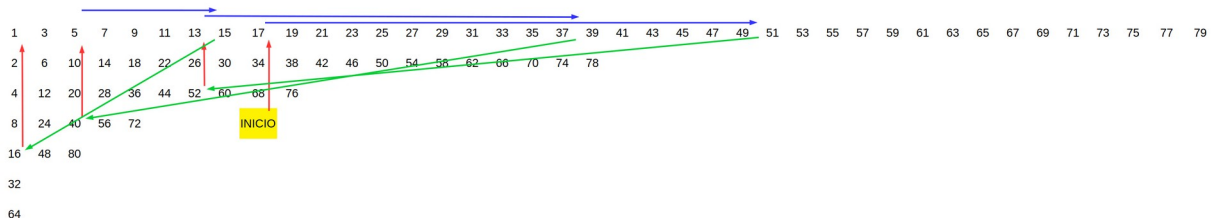
A cada iteración en la que sumamos 1 al número impar la secuencia desciende hasta llegar al 1.

En esta tabla también podemos desarrollar y visualizar una secuencia aplicando a los números las operaciones del algoritmo propuesto por Collatz en su conjetura.

Formar una secuencia aplicando a un número inicial cualquiera estas operaciones:
 Si el número es impar multiplicarlo por 3 y sumar 1 al resultado.
 Si el número es par dividirlo entre 2 las veces que se pueda.
 Repetir con cada resultado hasta llegar al 1.

Empezando con el número 68 la secuencia que obtenemos es: 68, 34, 17, 51, 52, 26, 13, 39, 40, 20, 10, 5, 15, 16, 8, 4, 2, 1.

Visualizamos en la tabla la secuencia obtenida:



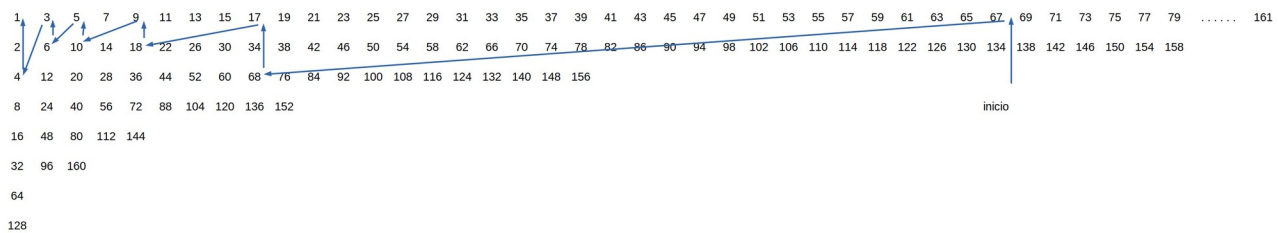
A cada iteración en la que sumamos 1 al número impar la secuencia es descendente, aunque para llegar al 1 necesite más iteraciones que en la anterior secuencia, debido a que se triplica a cada número impar obtenido y se hace más corta o más larga dependiendo si esto produce más números impares de la forma $4n-3$ o de la forma $4n-1$.

En la siguiente tabla vemos otra secuencia obtenida con el mismo algoritmo pero en la que no intervienen los impares una vez que se han triplicado, sino que va directamente al número par después de sumarle 1.

La secuencia empieza con el número 66 y resulta: 66, 33, 100, 50, 25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

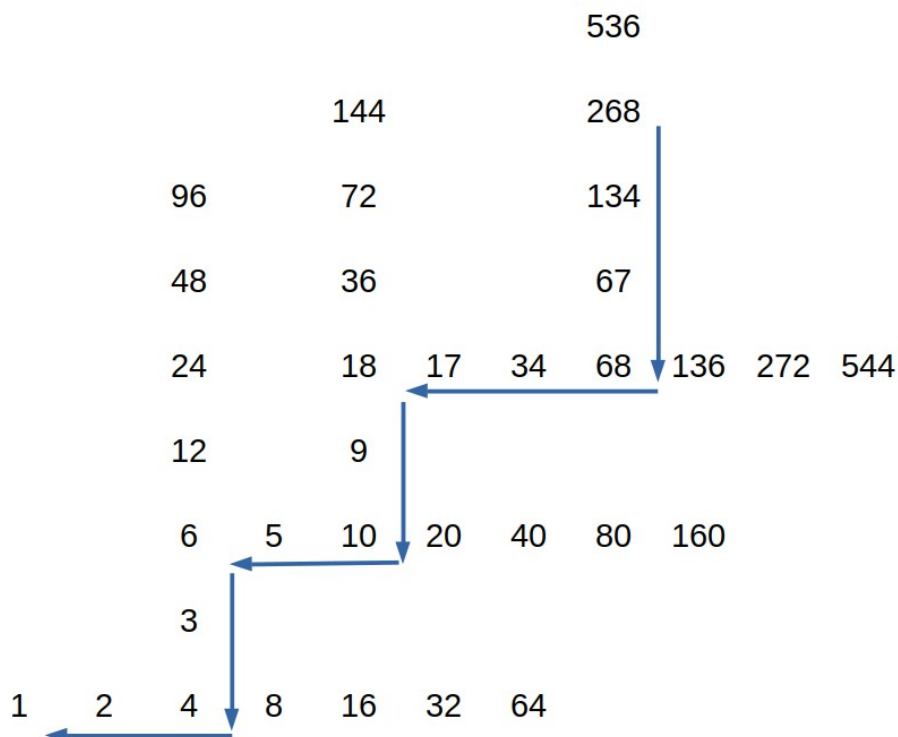
Empezando con el número 134 la secuencia que obtenemos es: 134, 67, 68, 34, 17, 18, 9, 10, 5, 6, 3, 4, 2, 1.

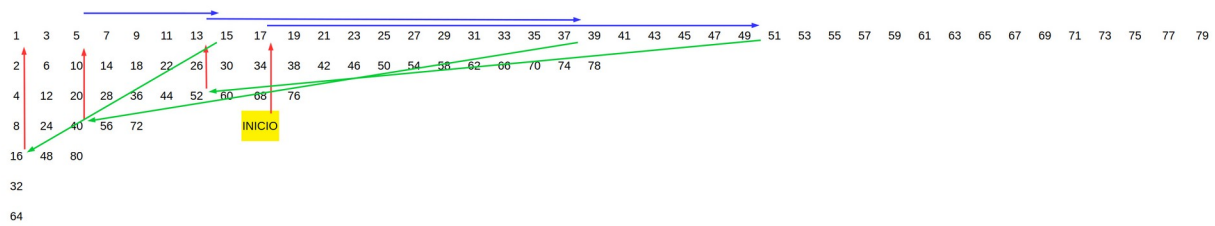
Visualizamos en la tabla TNN la secuencia obtenida con las operaciones propuestas.



A cada iteración en la que sumamos 1 al número impar la secuencia desciende a los números más cercanos al 1.

Si a cada columna de la tabla la consideramos una progresión geométrica, con las que intervienen en esta secuencia formamos un diagrama con las progresiones (columnas) unidas siguiendo el desarrollo de la secuencia en la tabla.





ORDEN EN LOS NÚMEROS DE LA SUCESIÓN DE COLLATZ

El objeto de este escrito es entender el orden en el caos aparente de los números granizo de la conjetura de Collatz. Seguramente no servirá como demostración, pero sí que le da sentido a la pregunta de porqué se comportan así los números.

LA CONJETURA DE COLLATZ

Propuesta en 1.937 por el matemático alemán Lothar Collatz, es conocida también como conjetura de Ulam, conjetura $3n+1$ o problema de Siracusa, entre otros nombres. A la fecha no hay ninguna explicación ni demostración y puede ser verdadera o falsa.

ENUNCIADO

Elegimos un número natural cualquiera (n) y realizamos los siguientes cálculos:

Si el número es par, se divide entre 2 y si el número es impar, se multiplica por 3 y se suma 1 al resultado. Estas operaciones se repiten a cada resultado obtenido hasta que se llega al 1. Si se continúa con el 1 la secuencia entra en un ciclo infinito con el 4, 2, 1. La Conjetura afirma que, comenzando desde cualquier entero positivo n , la iteración repetida de esta función produce finalmente el valor 1.

Un ejemplo empezando con el número 72:

$72/2 = 36$
 $36/2 = 18$
 $18/2 = 9$
 $3 \cdot 9 + 1 = 28$
 $28/2 = 14$
 $14/2 = 7$
 $3 \cdot 7 + 1 = 22$
 $22/2 = 11$
 $3 \cdot 11 + 1 = 34$
 $34/2 = 17$
 $3 \cdot 17 + 1 = 52$
 $52/2 = 26$
 $26/2 = 13$
 $3 \cdot 13 + 1 = 40$
 $40/2 = 20$
 $20/2 = 10$
 $10/2 = 5$
 $3 \cdot 5 + 1 = 16$
 $16/2 = 8$
 $8/2 = 4$
 $4/2 = 2$
 $2/2 = 1$

El número 72 ha necesitado 22 iteraciones hasta llegar al 1 y la secuencia obtenida es:

72, 36, 18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

La pregunta principal, para la que aún no hay una respuesta, es si es cierta la conjetura para cualquier número inicial y, se elija cual se elija, siempre se acaba en el 1.

Se ha comprobado con programas informáticos que para números hasta $87 \cdot 2^{60}$ la secuencia siempre acaba en 1, no obstante, como los números son infinitos, eso no es una prueba para todos los números naturales.

La segunda pregunta, también sin respuesta, es porqué se comportan así los números, pues no siguen ningún orden ni patrón lógicos.

PRIMERO

Si escribimos todos los números naturales colocándolos de forma que los impares queden en la primera fila y los demás números debajo del que es su mitad, formaremos una tabla en la que estarán todos los números naturales.

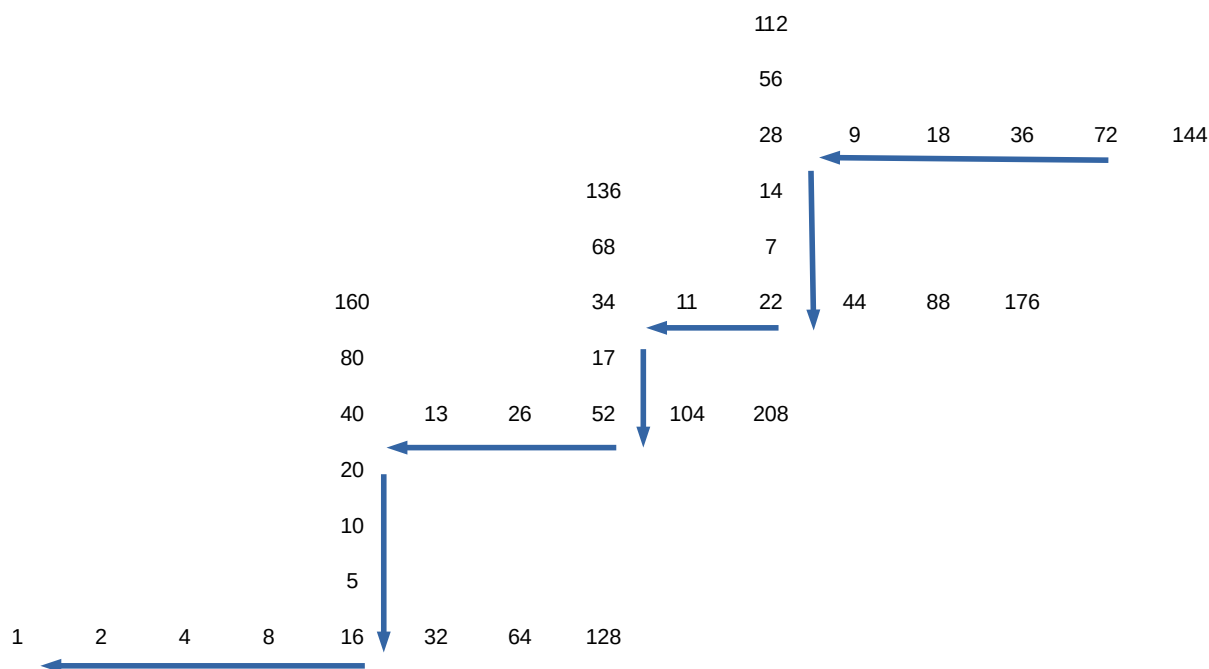
En esta tabla podemos escribir infinitos números y una sección de la misma se vería así:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100
8	24	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200
16	48	80	112	144	176	208	240	272	304	336	368	400
32	96	160	224	288	352	416	480	544	608	672	736	800
64	192	320	448	576	704	832	960	1088	1216	1344	1472	1600
128	384	640	896	1152	1408	1664	1920	2176	2432	2688	2944	3200

En el ejemplo que hemos puesto empezando la secuencia con el número 72, los números obtenidos forman grupos de uno o más números pares y un impar, que identificamos como elementos de las columnas de la tabla, que forman progresiones geométricas de razón igual a 2, cota inferior un número impar y sin cota superior.

72, 36, 18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Construyendo un diagrama que muestra la ruta seguida por el número 72 hasta llegar al 1, el orden de los números de esta secuencia tendrá sentido.



Para formar el diagrama escribimos el último grupo obtenido en la secuencia, empezando con el número 1, en horizontal y creciente de izquierda a derecha, dejando suficiente espacio en la parte superior para poder escribir las demás progresiones. Las completamos con más elementos para una mejor visualización del conjunto. Seguimos el mismo orden de la secuencia obtenida y disponemos las progresiones de manera que el impar del grupo se coloque junto al par del siguiente grupo, alternativamente en horizontal y vertical.

El diagrama lo forman las columnas de la tabla de los números naturales unidas con su cota inferior número impar y el elemento número par que resulta al aplicar la operación $3n+1$ del algoritmo. Cualquier sucesión obtenida de cualquier número natural puede representarse mediante un diagrama similar, porque en la tabla están todos los números naturales.

Si escribimos ordenadamente en una tabla los números naturales hasta el 80, quedarán situados de la siguiente manera: 40 impares en la primera fila. 20 pares en la segunda fila, 10 pares en la tercera fila. 5 pares en la cuarta fila. 3 pares en la quinta fila y un número par en la sexta y séptima fila.

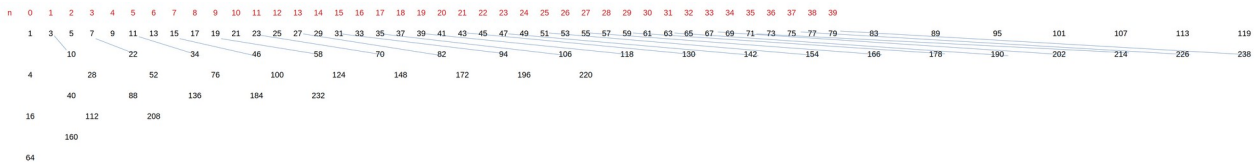
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79			
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78																							
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76																																	
8	24	40	56	72																																						
16	48	80																																								
32																																										
64																																										

Elegimos un número cualquiera de esta tabla, por ejemplo el 54. Es par y lo dividimos entre 2 las veces necesarias hasta llegar a un impar. Es suficiente una división y obtenemos el 27. Ahora buscamos en la tabla el siguiente número, el 28. Es par y lo dividimos entre 2 las veces necesarias hasta llegar a un impar. Con dos divisiones obtenemos el 7. Ahora vamos al número que le sigue, o sea el 8. Es par y lo dividimos entre 2 las veces necesarias hasta llegar a un impar. Con 3 divisiones llegamos al 1.

En las dos tablas siguientes hemos sustituido los números pares por los números obtenidos después de aplicar la operación del algoritmo de Collatz a los 40 números impares.

Cuando se aplica la operación del algoritmo a un número impar el resultado es un número par de la forma $6n+4$ con el mismo valor de n , porque $3*(2n+1)+1=6n+4$, y son los números pares a los que enlaza la progresión.

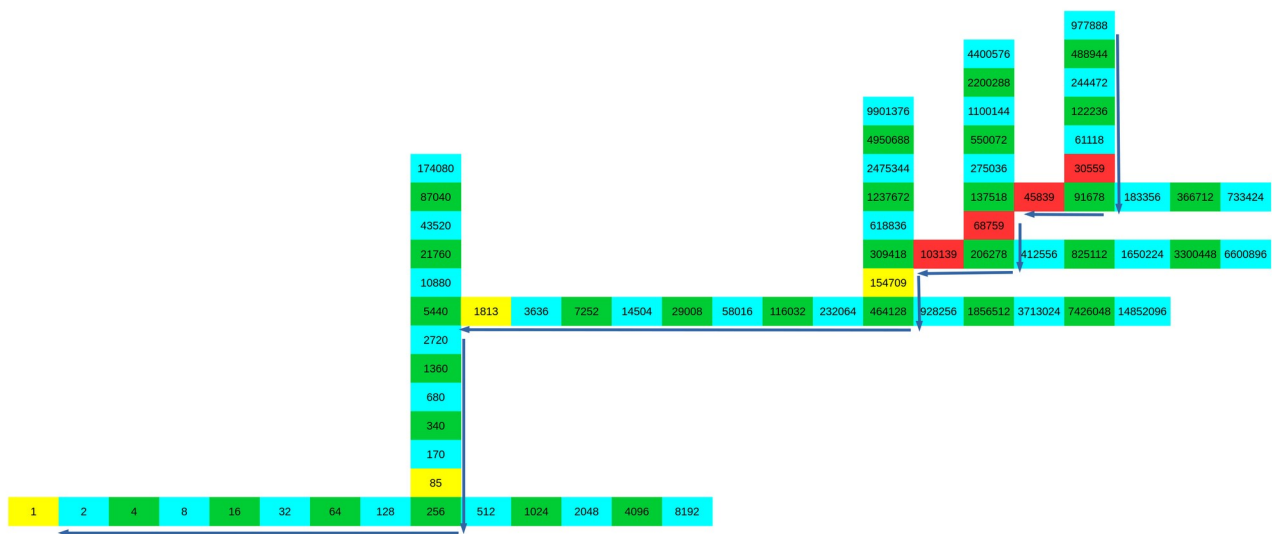
Cuando el número impar $(2n+1)$ tiene n impar, o sea todos los números de la forma $(4n+3)$, el número resultante siempre llega al siguiente impar con solo una división entre 2, por lo que el impar siempre es $(n+1)$ mayor que el anterior y la secuencia es ascendente.



Los elementos en azul, al no poder recibir nunca ninguna progresión que les una, provocan como mínimo dos

En color naranja las progresiones que sus elementos son múltiplos de 3, a las que no se une ninguna progresión. Los números pares a los que se unen estas progresiones provocan también una división entre 2.

En el diagrama distinguimos en rojo los impares 203, 43, 7 y 11 (todos valor de n impar) que han provocado que la secuencia sea ascendente en estos puntos.



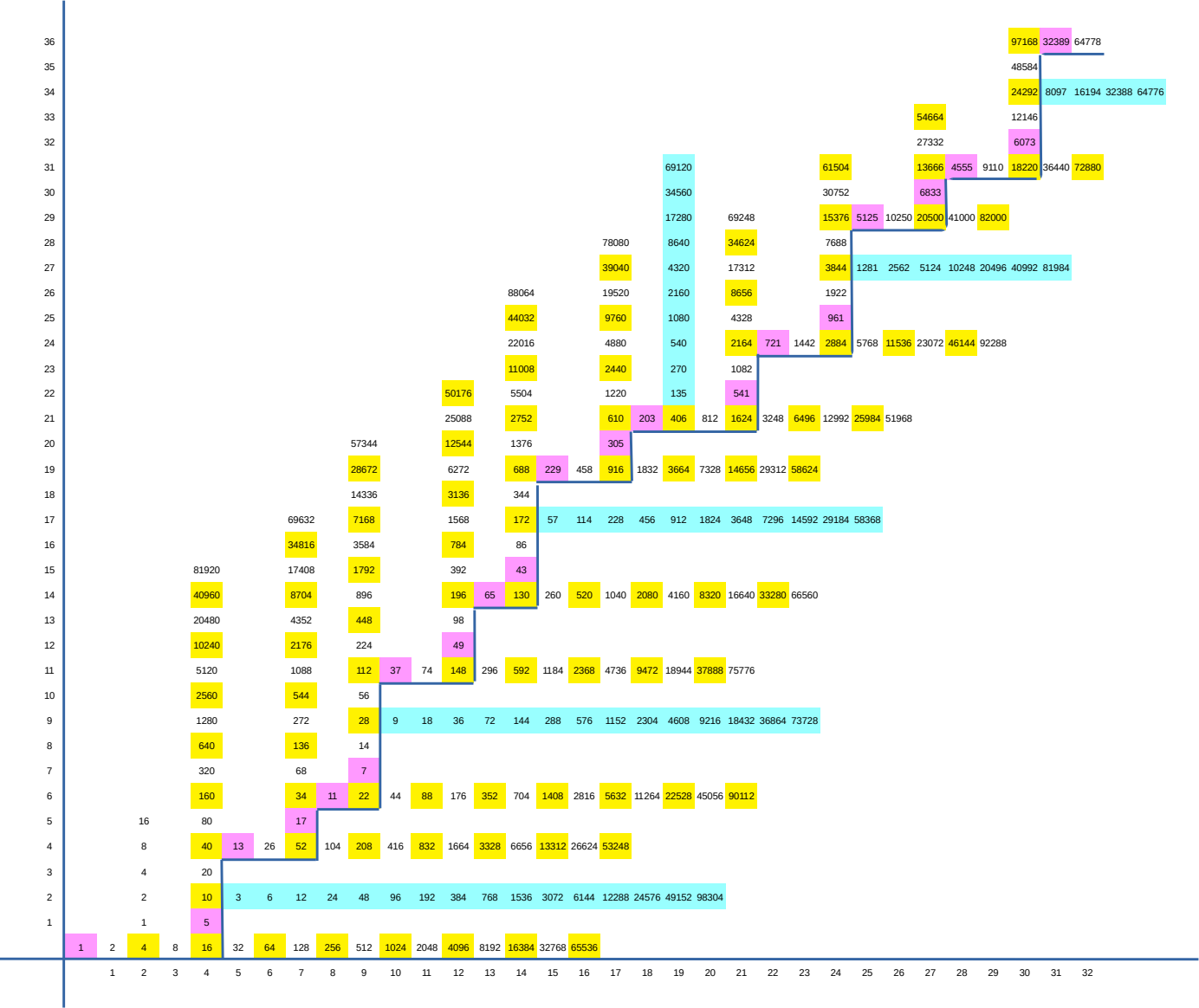
Este diagrama formado con las progresiones que intervienen en la secuencia empezando con el número 977888, es un buen ejemplo de la importancia que tienen los impares que tienen valor de n par, el 154709, 1813 y 85, que caen precipitadamente hasta el 1, porque se unen a la siguiente progresión con el elemento que ocupa, como mínimo, el tercer lugar de su progresión.

En cambio, los impares con valor de n impar, el 30559, 45839, 68759 y 103139 son los responsables de que la secuencia sea ascendente en ese tramo, porque todos ellos se unen a la siguiente progresión con el segundo elemento de la misma, el cual necesita solo una división entre 2 para llegar al siguiente impar, que resulta siempre $(n+1)$ mayor.

A continuación un diagrama al que hemos añadido las coordenadas cartesianas, de la secuencia empezando con el número 64778, que necesita 68 iteraciones (36 + 32) para llegar al 1.

La secuencia generada es: 64778, 32389, 97168, 48584, 24292, 12146, 6073, 18220, 9110, 4555, 13666, 6833, 20500, 10250, 5125, 15376, 7688, 3844, 1922, 961, 2884, 1442, 721, 2164, 1082, 541, 1624, 812, 406, 203, 610, 305, 916, 458, 229, 688, 344, 172, 86, 43, 130, 65, 196, 98, 49, 148, 74, 37, 112, 56, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Hay 26 pasos "estériles", que son los números pares que no unen progresiones (sin color) y los números pares que reciben las progresiones que tienen los elementos múltiplos de 3, que no les enlaza ninguna progresión. Estos números "estériles" son espacios entre dos impares y cada uno de ellos es una división entre 2, por lo que la secuencia es descendente.



Las progresiones marcadas en azul son las que no enlazan con ellas otras progresiones, porque sus elementos son múltiplos de 3.

Los números sin color son los elementos de las progresiones que no enlazan ninguna progresión.

La presencia de esos pasos "estériles" es lo que provoca que cualquier secuencia descienda hasta terminar en el 1.

Cualquier número de $X+Y$ (pasos) es posible para cualquier número de cualquier secuencia.

Si escribimos los números hasta el 80, la tabla obtenida sería esta:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													

Los números quedan situados de la siguiente forma: 40 impares en la primera fila. 20 pares en la segunda fila, 10 pares en la tercera fila. 5 pares en la cuarta fila. 3 pares en la quinta fila y un número par en la sexta y séptima fila.

Elegimos un número cualquiera de esta tabla, por ejemplo el 54. Es par y lo dividimos entre 2 las veces necesarias hasta llegar a un impar. Es suficiente una división y obtenemos el 27. Ahora buscamos en la tabla el siguiente número, el 28. Es par y lo dividimos entre 2 las veces necesarias hasta llegar a un impar. Con dos divisiones obtenemos el 7. Ahora vamos al número que le sigue, o sea el 8. Es par y lo dividimos entre 2 las veces necesarias hasta llegar a un impar. Con 3 divisiones llegamos al 1. Sucederá lo mismo con cualquier número que elijamos, acabando siempre con el 4, 2, 1.

En las dos tablas siguientes hemos sustituido los números pares por los números obtenidos después de aplicar la operación del algoritmo de Collatz a los 40 números impares.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39							
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	83	89	95	101	107	113	119	
4		10	22		34		46		58		70		82		94		106		118		130		142		154		166		178		190		202		214		226		238								
16		40		88		136		184		232																																					
64		160																																													

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39			
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79				
4			10		28		52		76		100		124		148		172		196		220																						
16			40		88		136		184		232																																
64			160																																								

Repetiendo el proceso de la primera tabla, también llegaremos siempre al 4, 2, 1. La diferencia está en que en la primera seguimos con el siguiente número del impar y en éstas seguimos con el número que ha resultado de aplicar $3n+1$ al impar.

EL PURGATORIO

Se cree que todo aquel que entra en el Purgatorio terminará entrando al Cielo tarde o temprano, pero antes tendrá que librarse de todos los pecados que cometió en vida.

Encontrará ángeles malos y ángeles buenos, el mismo número de malos que de buenos y su número es infinito, pero no los conocerá porque todos tienen el mismo semblante.

El que entra en el purgatorio es un $(2n+1)$ y (n) es el número de pecados que cometió. Su nombre es el número.

Cada vez que se encuentra con un ángel malo sus pecados se incrementan en $1/2(n+1)$.

Los encuentros con los ángeles buenos siempre disminuyen sus pecados en más o menos cantidad, dependiendo del tipo de ángel, pues los hay de muchos tipos diferentes. Los que menos le quitan son los que se llaman $(8n+1)$, que le limpian de una cuarta parte de todos sus pecados $1/4(n)$ pero también están los $(8n+5)$ que le quitan muchos más y los que, si tiene la suerte de encontrarlos, le quitarán la totalidad de los pecados. Estos son los ángeles buenos llamados $1/3(4^n-1)$.

No saldrá del purgatorio hasta que se haya purificado despojándole de todos los pecados y su (n) sea cero y entonces su nombre será Uno.

La probabilidad de encontrarse con un ángel malo o con un ángel bueno es la misma, el 50 por ciento, pero mientras que todos los ángeles malos que encuentra le aumentan sus pecados en $1/2(n+1)$, cada ángel bueno le puede quitar desde una cuarta parte hasta todos los pecados y el que entra en el purgatorio siempre sale porque allí el tiempo no cuenta.

Dos ejemplos:

Una persona cuyo nombre es Diecisiete y tiene 8 pecados cuando entra en el valle.

El primer encuentro es con un ángel bueno, que le quita $1/4$ de sus pecados, $1/4(n)$. Sigue con 6 pecados y su nombre es ahora 13.

El próximo encuentro es con otro ángel bueno que le quita 4 pecados, $1/8(5n+2)$. Sigue con 2 pecados y su nombre es ahora 5.

El próximo encuentro es también con otro ángel bueno que le quita los 2 pecados que le quedan.

Ya puede entrar al cielo, porque ya no tiene pecados y ahora su nombre es Uno.

Otro ejemplo de una persona llamada Nueve, con 4 pecados.

El primer encuentro es con un ángel bueno, que le quita $1/4$ de sus pecados. Ahora tiene 3 pecados y su nombre es Siete.

El siguiente encuentro es con un ángel malo, que le da 2 pecados, $1/2(n+1)$, y su nombre es ahora Once.

El siguiente encuentro es también con un ángel malo, quien le da 3 pecados, $1/2(n+1)$, y su nombre ahora es Diecisiete.

El siguiente encuentro es con un ángel bueno, que le quita 2 pecados, $1/4(n)$, quedándole 6 pecados y su nombre ahora es Trece.

Vuelve a encontrarse otro ángel bueno, que le quita 4 pecados, $1/8(5n+2)$. Ahora le quedan 2 pecados y su nombre es Cinco.

El siguiente encuentro es también con un ángel bueno, que le quita los dos pecados que le quedan.

Ahora su nombre es Uno y se irá al cielo, pues ya no le queda ningún pecado que purgar.

Los actores de esta historia:

Las almas son $(2n+1)$ y sus nombres son los de los números según los pecados cometidos (n) .

Los ángeles del mal son $(2n+1)$ con n impar.

Los ángeles del bien son $(2n+1)$ con n par.

El alma que entra en el purgatorio es el número con el que se empieza la secuencia de la conjetura de Collatz.

LA CONJETURA DE COLLATZ

Propuesta en 1.937 por el matemático alemán Lothar Collatz, es conocida también como conjetura de Ulam, conjetura $3n+1$ o problema de Siracusa, entre otros nombres. A la fecha no hay ninguna explicación ni demostración y puede ser verdadera o falsa.

ENUNCIADO

Elegimos un número natural cualquiera (n) y realizamos los siguientes cálculos:

Si el número es par, se divide entre 2 y si el número es impar, se multiplica por 3 y se suma 1 al resultado.

Estas operaciones se repiten a cada resultado obtenido hasta que se llega al 1.

Si se continúa con el 1 la secuencia entra en un ciclo infinito con el 4, 2, 1.

Un ejemplo empezando con el número 72:

$$72/2 = 36$$

$$36/2 = 18$$

$$18/2 = 9$$

$$3 \cdot 9 + 1 = 28$$

$$28/2 = 14$$

$$14/2 = 7$$

$$3 \cdot 7 + 1 = 22$$

$$22/2 = 11$$

$$3 \cdot 11 + 1 = 34$$

$$34/2 = 17$$

$$3 \cdot 17 + 1 = 52$$

$$52/2 = 26$$

$$26/2 = 13$$

$$3 \cdot 13 + 1 = 40$$

$$40/2 = 20$$

$$20/2 = 10$$

$$10/2 = 5$$

$$3 \cdot 5 + 1 = 16$$

$$16/2 = 8$$

$$8/2 = 4$$

$$4/2 = 2$$

$$2/2 = 1$$

El número 72 ha necesitado 22 iteraciones hasta llegar al 1 y la secuencia obtenida es:

72, 36, 18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

La pregunta principal, para la que aún no hay una respuesta, es si es cierta la conjetura para cualquier número inicial y, se elija cual se elija, siempre se acaba en el 1. Se ha comprobado con programas informáticos que para números hasta $87 \cdot 2^{60}$ la secuencia siempre acaba en 1, no obstante, como los números son infinitos, eso no es una prueba para todos los números naturales.

La segunda pregunta, también sin respuesta, es porqué se comportan así los números, pues no siguen ningún orden ni patrón lógicos.

LO QUE OCURRE

Si escribimos ordenadamente el conjunto de todos los números naturales colocándolos de forma que los impares queden en la primera fila y los demás números debajo del que es su mitad, formaremos una tabla en la que estarán todos los números naturales.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	...
2	6	10	14	18	22	...							
4	12	20	...										
8	24	...											
16	...												

En el ejemplo que hemos puesto empezando con el número 72 los números de la secuencia obtenida forman grupos de uno o más números pares y un impar, que identificamos como elementos de las columnas de la tabla, que forman progresiones geométricas de razón igual a 2.

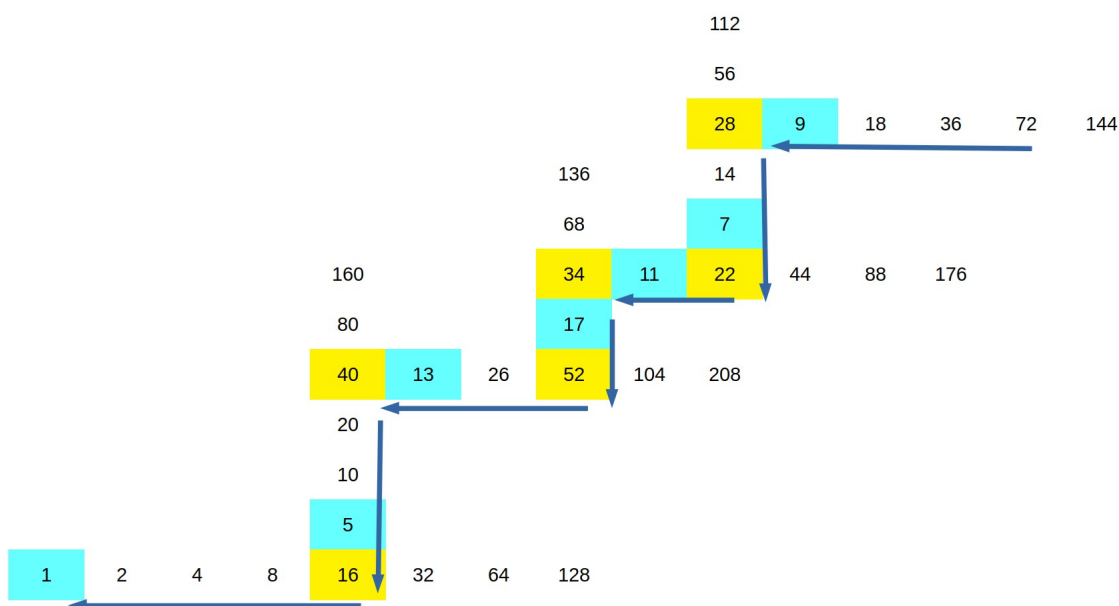
72, 36, 18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Gráficamente, construyendo un diagrama que muestra la ruta seguida por el número 72 hasta llegar al 1, el orden de los números de esta secuencia tendrá sentido.

Para ello escribimos el último grupo obtenido en la secuencia, empezando con el número 1, en horizontal y creciente de izquierda a derecha, dejando suficiente espacio en la parte superior para poder escribir las demás progresiones.

Podemos completarlas con más elementos para mejor visualización del conjunto. Seguimos el mismo orden de la secuencia obtenida y disponemos las progresiones de manera que el impar del grupo se coloque junto al par del siguiente grupo, alternativamente en horizontal y vertical.

El diagrama lo forman las columnas de la tabla de los números naturales unidas con su cota inferior número impar y el elemento número par que resulta al aplicar la operación $3n+1$ del algoritmo. Todos los números de la forma $6n+4$ enlazan con el impar cota inferior de otras progresiones.



La respuesta a la primera pregunta ¿Es cierta la conjetura para cualquier número inicial y, se elija cual se elija, siempre se acaba en el 1?. La respuesta es afirmativa porque en la tabla que hemos escrito hay un número infinito de progresiones, cuyos elementos también infinitos son todos los números naturales y son las progresiones que usamos en el diagrama para cualquier número. Cualquier número par es divisible por 2^n , resultando un impar y cualquier número impar $2n+1$ tiene el número par $6n+4$ con el que se pueden unir las dos progresiones.

¿Porqué todos los números naturales llegarán al número uno?

Cuando se aplica la operación del algoritmo a los números impares, que son la cota inferior de las progresiones, éstas se unen a la siguiente progresión a través de los pares que tienen el mismo valor de (n) . Por ejemplo el 13 se une al 40 porque ambos tienen $n=6$, o sea $2n+1=13$ y $6n+4=40$. Así pues, todos los números de la secuencia van bajando hasta el número 1 irremediablemente, incluso aunque algunos tramos de la secuencia sean ascendentes, como es el caso de los impares 11, 17 y 13 del diagrama. Numéricamente son ascendentes, pero realmente el 17 está más cerca del 1 que el 7. Asignando al diagrama un eje (y) que marca la altitud y un eje (x) que marca la latitud, se puede conocer la posición de los números de cualquier secuencia. Incluso la suma de $y + x$ es igual al número de iteraciones que necesita el número inicial para llegar al 1.

Los protagonistas en estas secuencias de Collatz son los números impares ya que los números pares tienen únicamente el cometido de convertirse en un impar tras dividirse entre 2^n .

Todos los impares son de la forma $2n+1$ pero debemos diferenciarlos en otras tres.

En los primeros 100 números naturales hay 50 impares, de los cuales 25 son de la forma $4n+1$ y 25 de la forma $4n+3$ y de estos 50 números hay 17 que son números impares de la forma $6n+3$.

La importancia de estas tres formas de impares la definimos a continuación.

Cuando el impar es de la forma $4n+1$ el par al que se une siempre necesita al menos dos divisiones entre 2 para llegar al próximo impar.

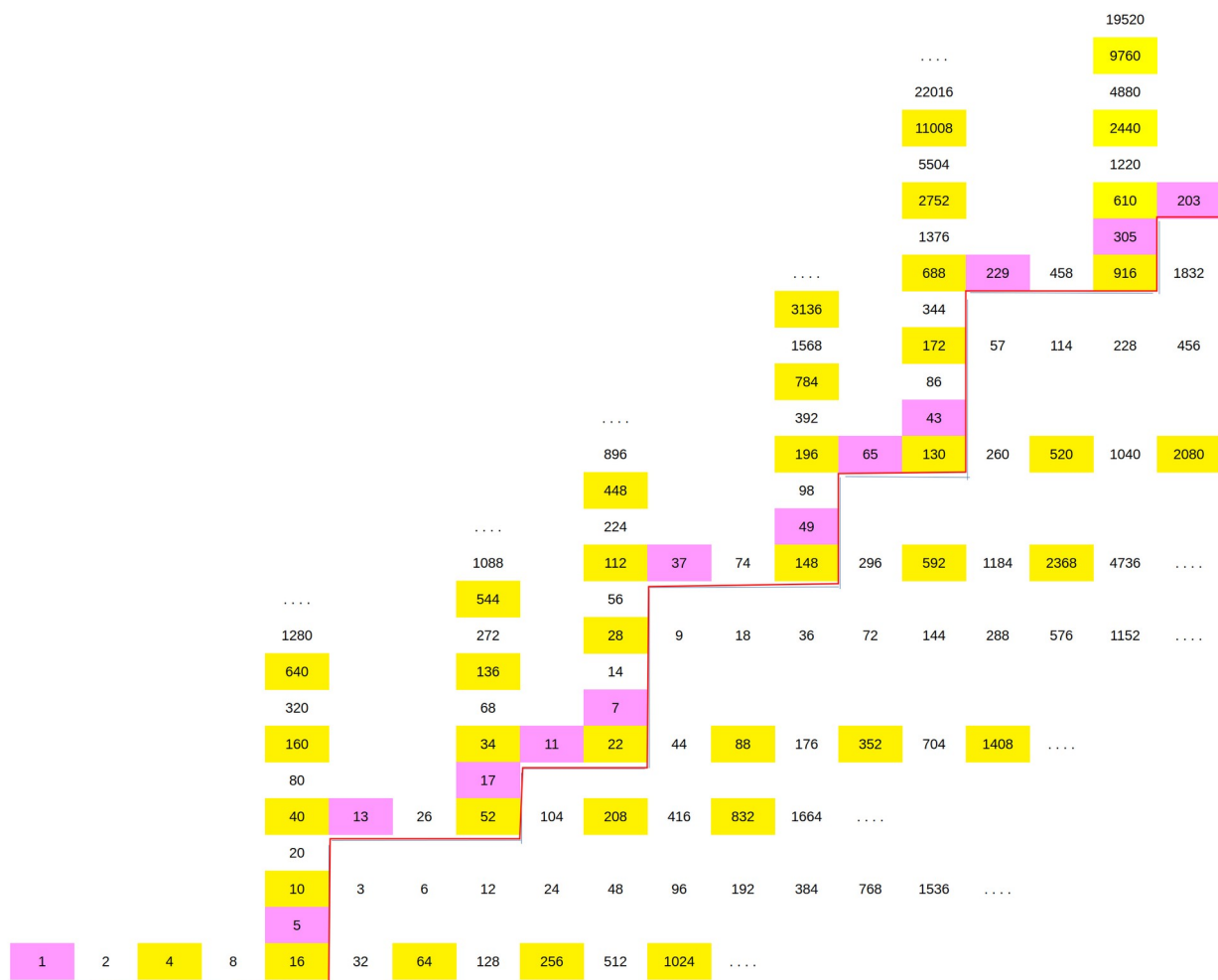
Si llega al impar con dos divisiones, éste es $n/2$ menor que el anterior.

Si el par necesita tres divisiones para llegar al impar, éste es $1/4(5n+2)$ menor que el anterior.

Si el par necesita cuatro divisiones entre 2 para llegar al impar, éste es $3/4(3n+1)$ menor que el anterior, . . .

La secuencia es descendente y acaba en el último impar 1.

Las variaciones ascendentes con los números impares que ocurren en las secuencias, son debidas a los impares de la forma $4n+3$, que enlazan siempre con el segundo elemento de la próxima progresión que solamente necesitan una división entre 2 para llegar al siguiente impar y éste es siempre $(n+1)$ mayor, por lo que la secuencia es ascendente y se aleja del 1.



Este es el diagrama formado con las progresiones que intervienen empezando con el número 203.

Los elementos marcados en amarillo son los pares $6n+4$ que reciben las otras progresiones a través de su impar cota inferior.

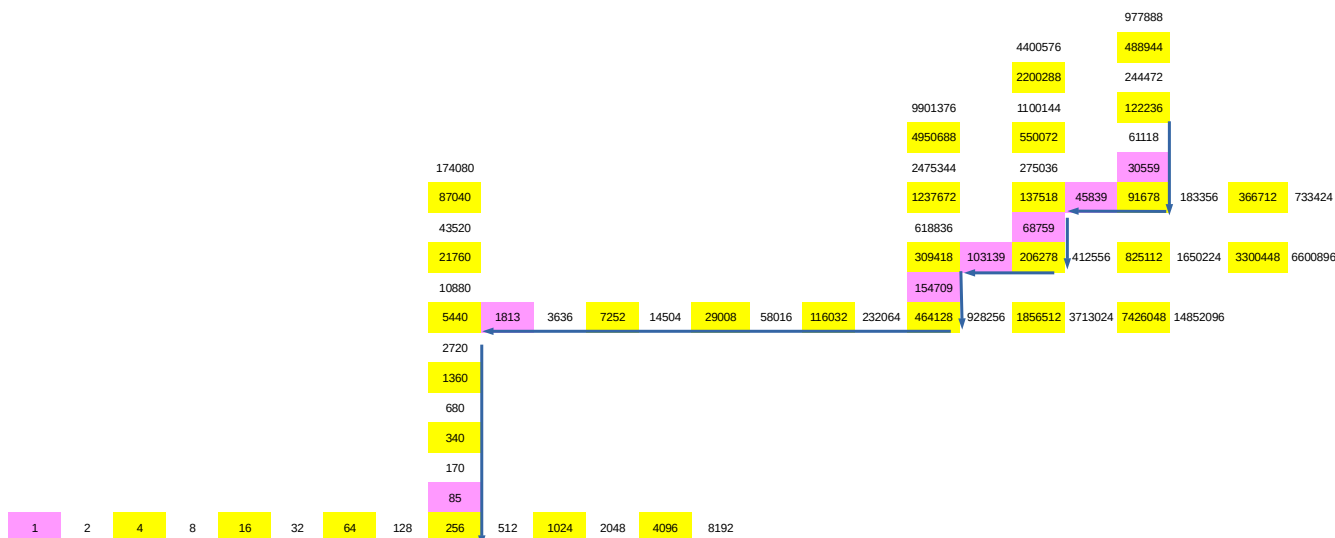
Los elementos sin marcar, de la forma $6n+2$, no reciben ninguna progresión que les una.

Las progresiones que sus elementos son múltiplos de 3 no se unen con ninguna otra.

El primer elemento, cota inferior de estas progresiones son los impares de la forma $6n+3$.

Los elementos marcados en magenta son los números impares cota inferior que enlazan la siguiente progresión por medio del elemento par que tiene su mismo valor de (n).

En el diagrama del número 203 vemos que los elementos que forman las progresiones son un número impar cota inferior seguido de números pares que son alternativamente de la forma $6n+4$ y de la forma $6n+2$. Los primeros pueden recibir otras progresiones pero no los segundos, lo que facilita que la secuencia sea descendente al ser necesarias al menos dos divisiones entre 2 hasta llegar al siguiente impar. De manera decisiva son también protagonistas las progresiones que sus elementos son múltiplos de 3 con las que no enlazan otras, pero que en la progresión a la que enlazan siempre hay, como mínimo, tres elementos pares que provocan tres divisiones entre 2.

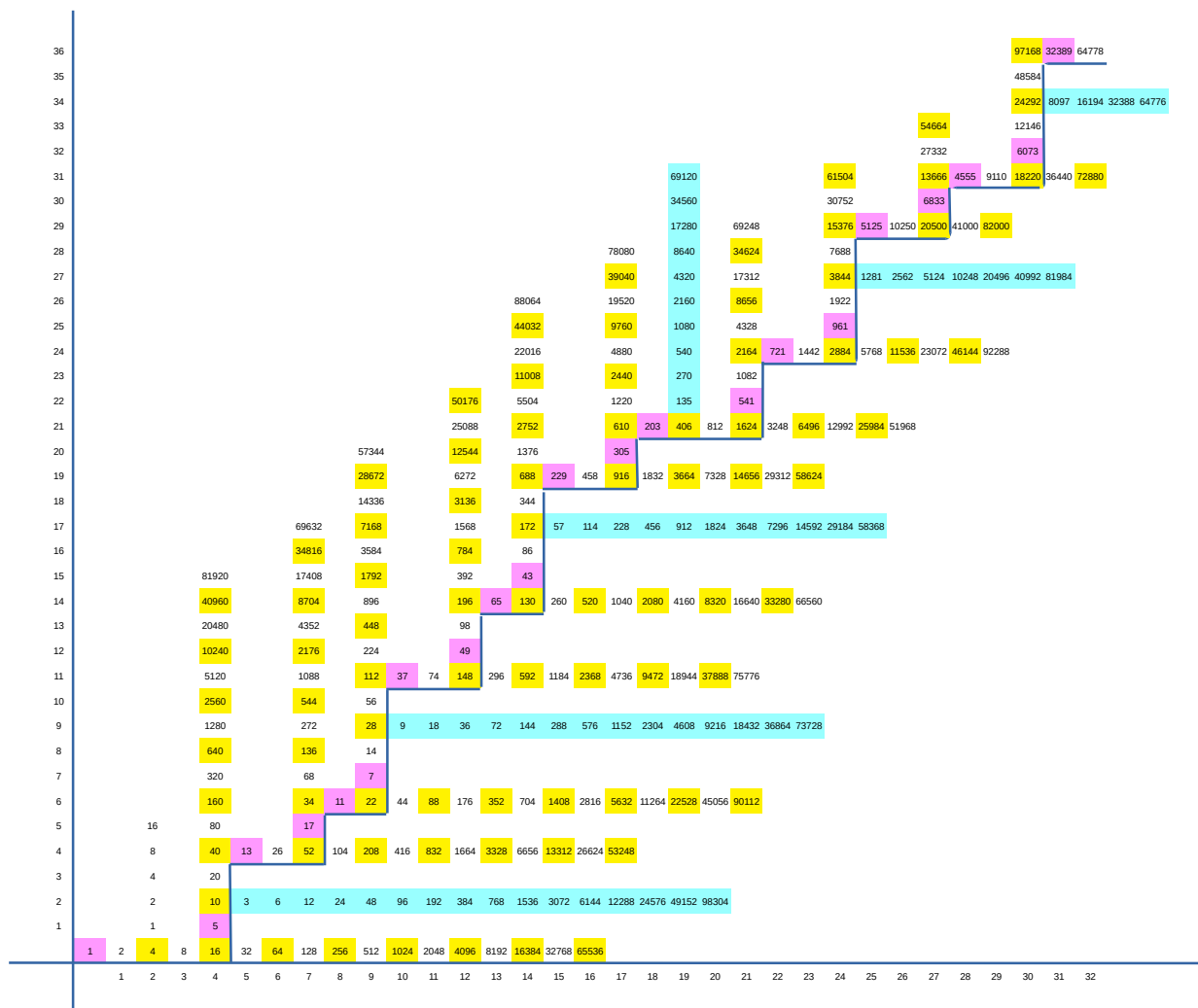


Este diagrama formado con las progresiones que intervienen en la secuencia de Collatz empezando con el número 122236, es un buen ejemplo de la importancia que tienen los impares de la forma $4n+1$, el 154709, 1813 y 85, que caen precipitadamente hasta el 1, porque se unen a la siguiente progresión con el elemento que ocupa, como mínimo, el tercer lugar. En cambio, los impares de la forma $4n+3$, el 30559, 45839, 68759 y 103139 son los responsables de que la secuencia sea ascendente en ese tramo, porque todos ellos se unen a la siguiente progresión con el segundo elemento, el cual solamente necesita una división entre 2 para llegar al siguiente impar, que resulta siempre $(n+1)$ mayor. Aunque los impares tengan orden ascendente, la secuencia sigue descendiendo y acercándose al 1 en cada operación sobre el impar.

A continuación un diagrama cartesiano de la secuencia empezando con el número 64778, que llega al 1 con 68 iteraciones $(36 + 32)$.

La secuencia generada es: 64778, 32389, 97168, 48584, 24292, 12146, 6073, 18220, 9110, 4555, 13666, 6833, 20500, 10250, 5125, 15376, 7688, 3844, 1922, 961, 2884, 1442, 721, 2164, 1082, 541, 1624, 812, 406, 203, 610, 305, 916, 458, 229, 688, 344, 172, 86, 43, 130, 65, 196, 98, 49, 148, 74, 37, 112, 56, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Hay 26 pasos que son "estériles", es decir, son pares de la forma $6n+2$ que no unen progresiones y números de la forma $6n+4$ que reciben las progresiones con los elementos que son múltiplos de 3 a las que no les enlaza ninguna progresión. Estos números "estériles" son espacios entre dos impares y cada uno de ellos es una división entre 2 y la secuencia es descendente.



Los números magenta son los impares cota inferior de las progresiones que enlazan con los números marcados en amarillo de otras progresiones, que son números pares de la forma $6n+4$.

Las progresiones marcadas en azul son las que no enlazan con ellas otras progresiones. Sus elementos son múltiplos de 3 y los impares cota inferior son impares de la forma $6n+3$.

Los números sin color son los elementos de las progresiones, pares de la forma $6n+2$ que no enlazan con ninguna progresión.

Lo que provoca que cualquier secuencia de Collatz descienda hasta el 1 es la presencia de los números pares $6n+2$ y de los números pares a los que enlazarían las secuencias que sus elementos son múltiplos de 3. En el ejemplo esas progresiones no participan en la secuencia, pero las hemos incluido en el diagrama para apreciar el "salto" que provocan en la progresión, siendo necesarias tres divisiones entre 2 para que ésta alcance el impar. En el diagrama el número 37 enlaza con el 112 que tiene que dividirse por 2^4 para alcanzar el impar 7, debido a dos números $6n+2$ y el que enlazaría con la progresión cota inferior 9.

UNA SECUENCIA DE NÚMEROS QUE SIEMPRE ACABA EN 1.

Se forma aplicando a un número inicial cualquiera, una de estas operaciones:

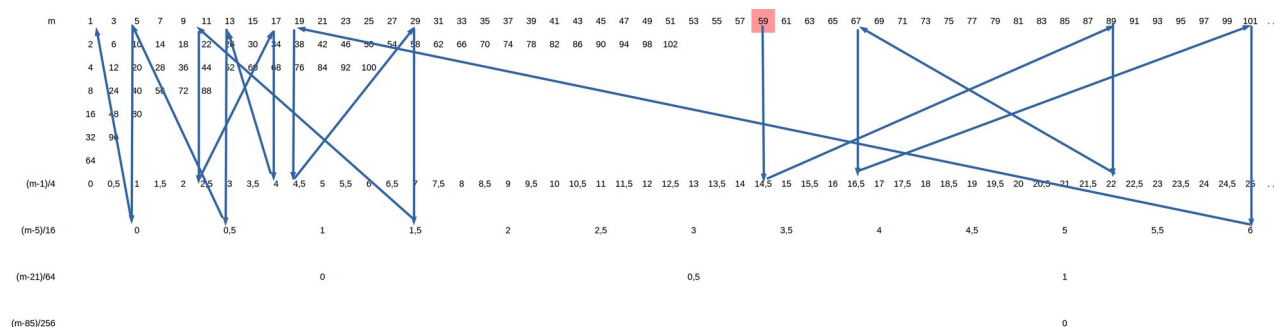
Si el número es impar restarle 1 y dividir entre 4 el resultado.

Si el número es par multiplicarlo por 3 y sumar 1 al resultado.

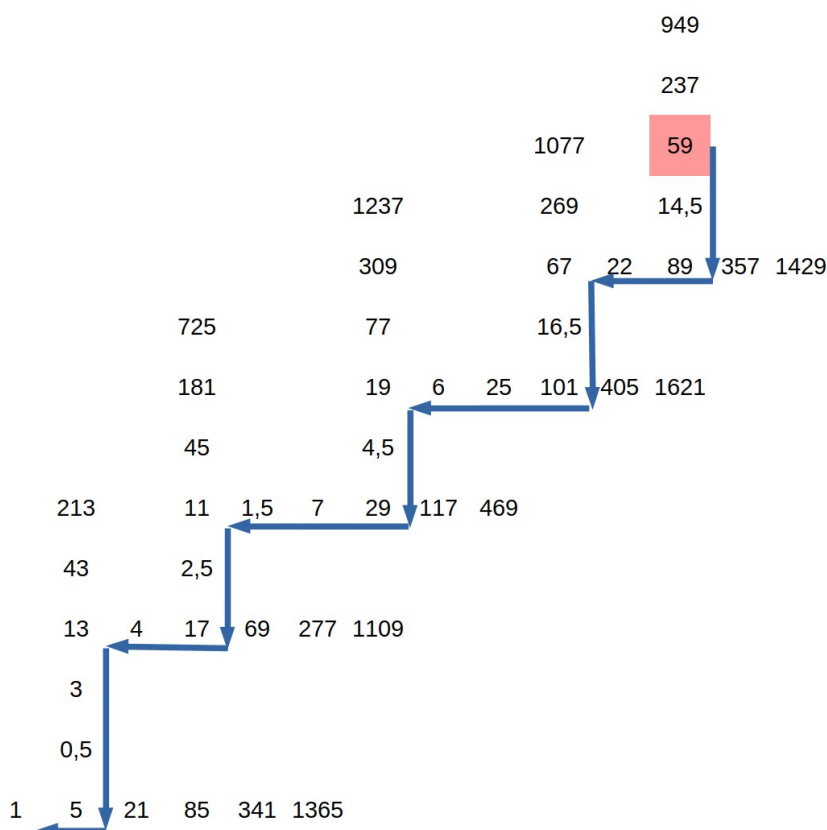
Si el número es la mitad de un impar ($m/2$) multiplicarlo por 6 y sumar 2 al resultado.

Empezando por el número 59 la secuencia que obtenemos es: 59, 14.5, 89, 22, 67, 16.5, 101, 25, 6, 19, 4.5, 29, 7, 1.5, 11, 2.5, 17, 4, 13, 3, 0.5, 5, 1,

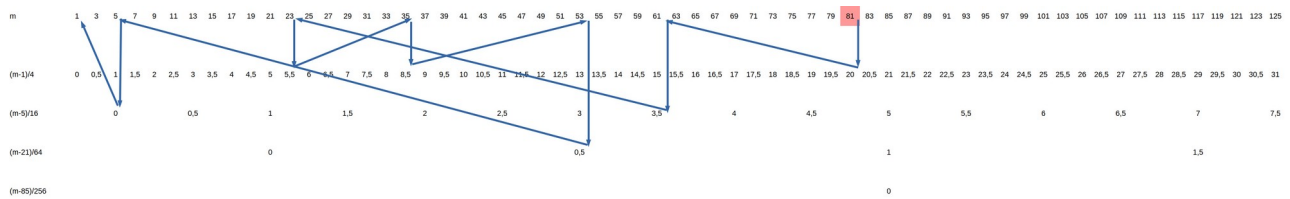
En esta tabla visualizamos la secuencia obtenida.



Siguiendo el desarrollo de la secuencia en la tabla, formamos un diagrama con progresiones geométricas que se forman con el impar y el resultado de aplicarle la operación, como la cota inferior de la progresión y su segundo elemento. A partir de estos dos elementos podemos contruir la progresión que tiene razón igual a $4m+1$.



Empezando con el número 81 la secuencia obtenida es: 81, 20, 61, 15, 3.5, 23, 5.5, 35, 8.5, 53, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0, 1.

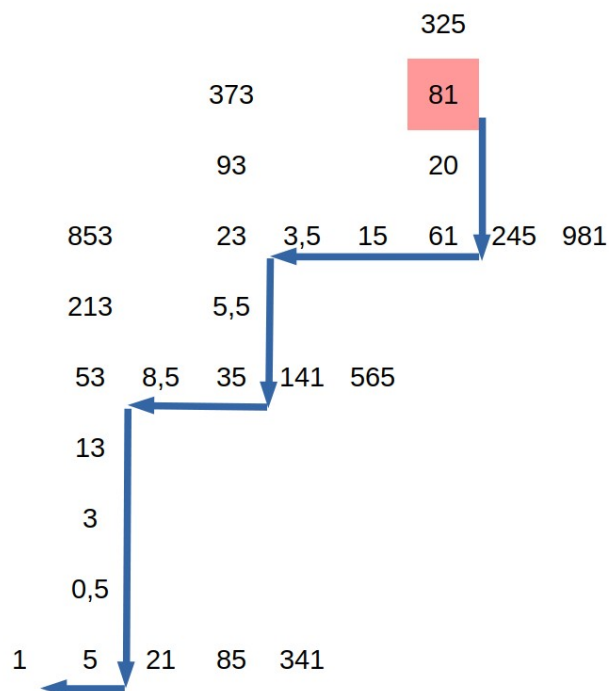


No hemos puesto los números pares en esta tabla, ya que son irrelevantes.

En cada iteración de $(m-1)/4$ en la que el resultado es la mitad de un impar, la secuencia es ascendente, pero cuando el resultado es un número par, la secuencia es descendente y cuando el resultado es un número impar la secuencia es MUY descendente.

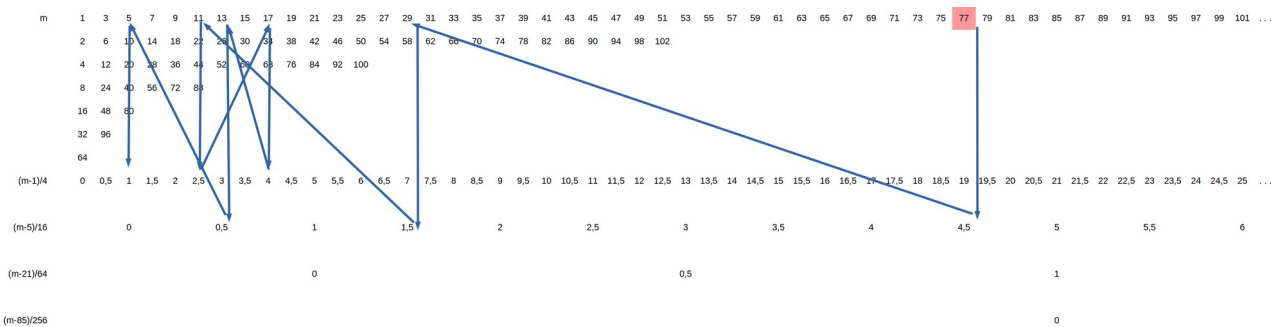
De los tres resultados posibles, dos de ellos provocan números más bajos y solamente uno provoca números más altos.

Tener en cuenta que los números más altos lo son siempre en la misma proporción, $(m+1)/2$, sin embargo los más bajos pueden descender muchísimo. Los primeros no pasan de $(m-1)/4$ y los segundos desde $(m-5)/16$ hasta infinito, $1/3((3m+1)4^{-n-1})$.

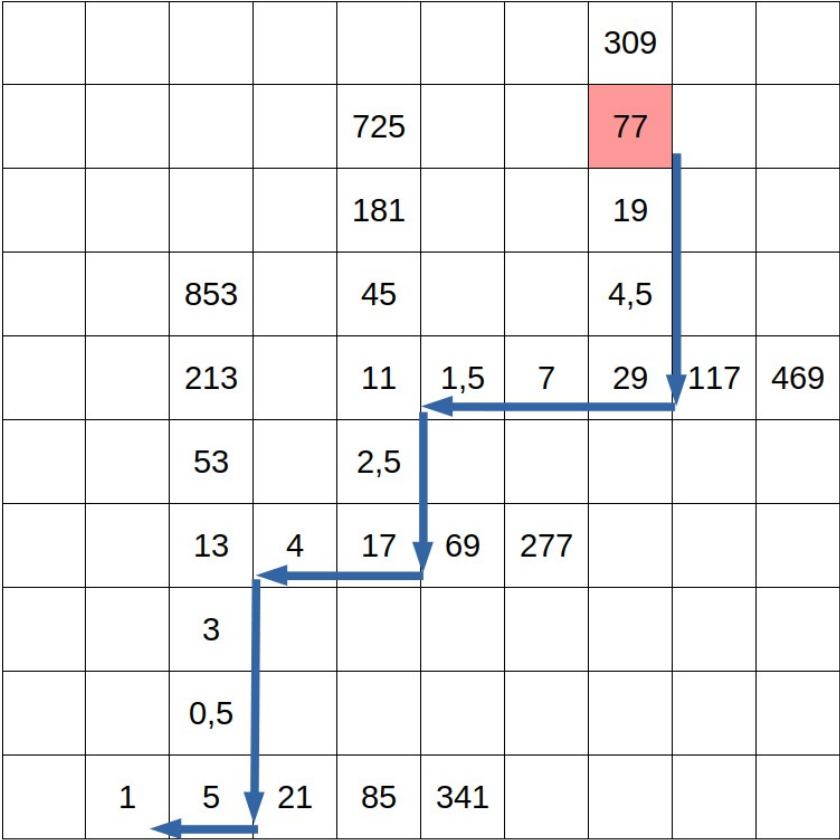


Otra secuencia empezada con el número 77:

77, 19, 4.5, 29, 7, 1.5, 11, 2.5, 17, 4, 13, 3, 0.5, 5, 1.

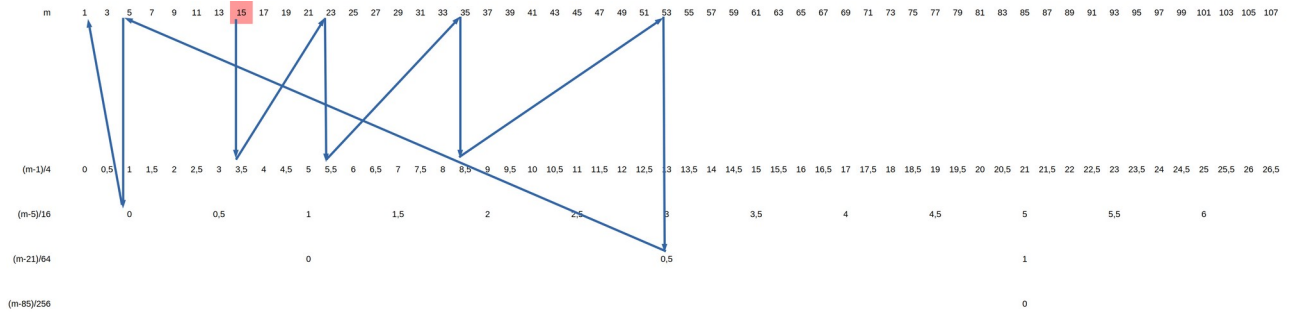


Y el diagrama de la ruta seguida por el número 77:



La secuencia formada empezando con el número 15 es 15, 3.5, 23, 5.5, 35, 8.5, 53, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0, 1, si consideramos al cero como un número par.

En esta tabla se evidencia que la secuencia es descendente cuando el resultado está por debajo de la línea de los $(m-1)/4$.



Teniendo en cuenta que las secuencias pueden ser infinitas, ¿es posible una secuencia en que todos los resultados del algoritmo no pasen la línea de los $(m-1)/4$ y sea creciente hasta el infinito?

UNA SECUENCIA DE NÚMEROS QUE SIEMPRE ACABA EN 1.

Se forma aplicando a un número inicial cualquiera, una de estas operaciones:

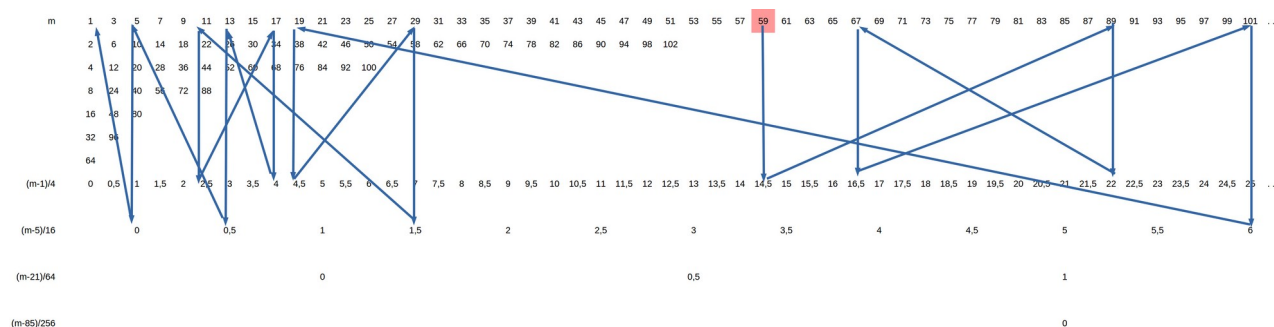
Si el número es impar restarle 1 y dividir entre 4 el resultado.

Si el número es par multiplicarlo por 3 y sumar 1 al resultado.

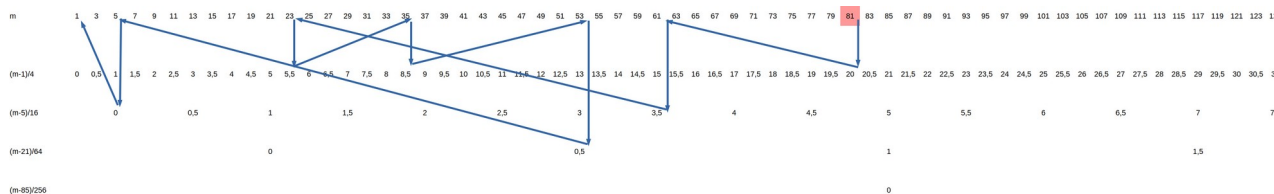
Si el número es la mitad de un impar ($m/2$) multiplicarlo por 6 y sumar 2 al resultado.

Empezando por el número 59 la secuencia que obtenemos es: 59, 14.5, 89, 22, 67, 16.5, 101, 25, 6, 19, 4.5, 29, 7, 1.5, 11, 2.5, 17, 4, 13, 3, 0.5, 5, 1.

En esta tabla visualizamos la secuencia obtenida.



Empezando con el número 81 la secuencia obtenida es: 81, 20, 61, 15, 3.5, 23, 5.5, 35, 8.5, 53, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0, 1.



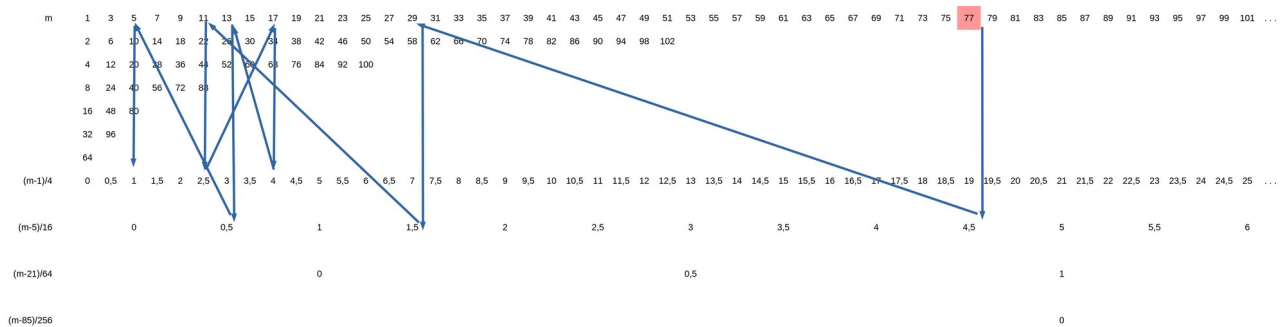
No hemos puesto los números pares en esta tabla, ya que son irrelevantes.

En cada iteración de $(m-1)/4$ en la que el resultado es la mitad de un impar, la secuencia es ascendente, pero cuando el resultado es un número par, la secuencia es descendente y cuando el resultado es un número impar la secuencia es MUY descendente.

De los tres resultados posibles, dos de ellos provocan números más bajos y solamente uno provoca números más altos. Además, los números más altos lo son siempre en la misma proporción, $(m+1)/2$, sin embargo los más bajos pueden descender muchísimo. Los primeros no pasan de $(m-1)/4$ y los segundos desde $(m-5)/16$ hasta infinito, $1/3((3m+1)4^n - n - 1)$.

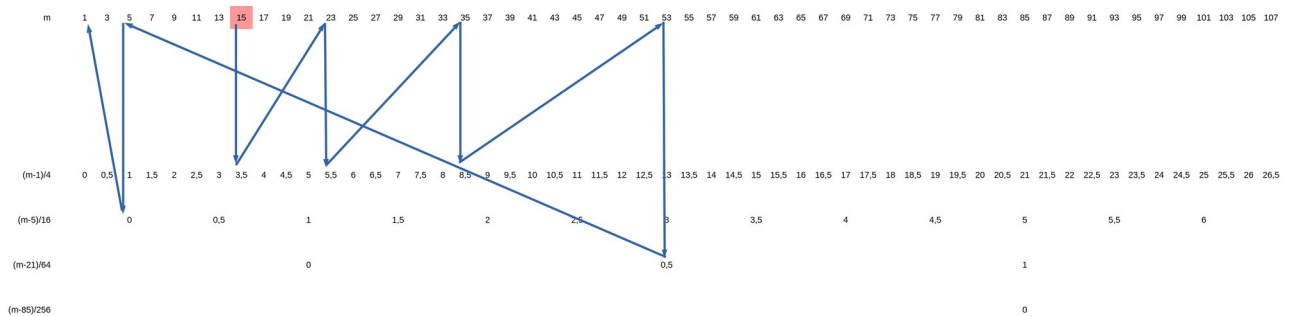
Otra secuencia empezada con el número 77:

77, 19, 4.5, 29, 7, 1.5, 11, 2.5, 17, 4, 13, 3, 0.5, 5, 1.



Empezando con el número 15, la secuencia es: 15, 3.5, 23, 5.5, 35, 8.5, 53, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0, 1, si consideramos al cero como un número par.

En esta tabla se evidencia que la secuencia es descendente cuando el resultado está por debajo de la línea de los $(m-1)/4$.



Teniendo en cuenta que las secuencias pueden ser infinitas, ¿es posible una secuencia en que todos los resultados del algoritmo no pasen la línea de los $(m-1)/4$ y sea creciente hasta el infinito?

UNA SECUENCIA QUE ACABA EN 0

Un algoritmo que aplicado a cualquier $1/2 \cdot N$ se forma una secuencia que acaba siempre en 1, 0.

Las operaciones son:

$3m+1$ si el número es par.
 $6m+2$ si el número es $1/2 \cdot N$.
 $(m-1)/4$ si el número es impar.

Con el número obtenido se repite el proceso sucesivamente y la secuencia acaba siempre con el 5, 1, 0. Si se sigue con el cero como número par, la se forma un ciclo infinito con el cero y el uno.

Un ejemplo:

Secuencia formada con el número el 23 como primer número:

Los cálculos:

$$(23 - 1) / 4 = 5.5$$

$$(5.5 \times 6) + 2 = 35$$

$$(35 - 1) / 4 = 8.5$$

$$(8.5 \times 6) + 2 = 53$$

$$(53 - 1) / 4 = 13$$

$$(13 - 1) / 4 = 3$$

$$(3 - 1) / 4 = 0.5$$

$$(0.5 \times 6) + 2 = 5$$

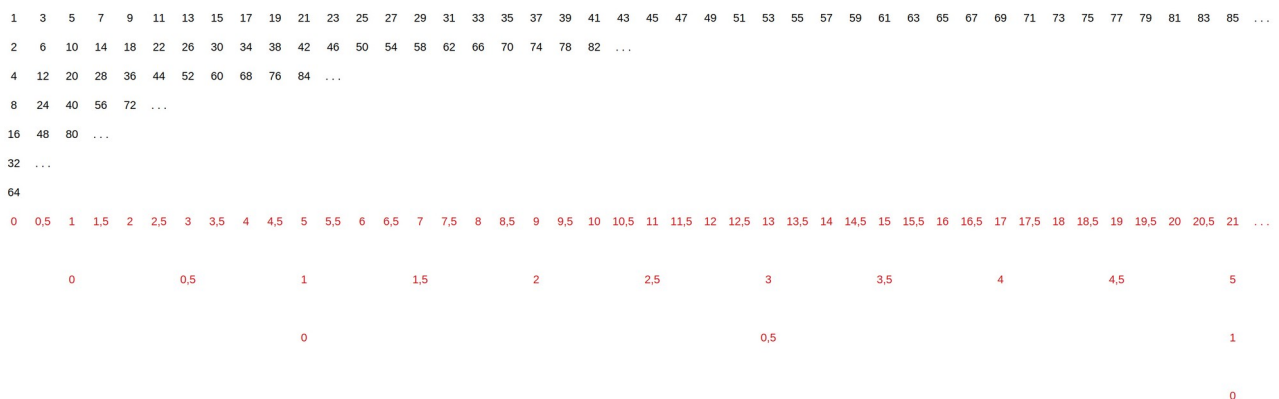
$$(5 - 1) / 4 = 1$$

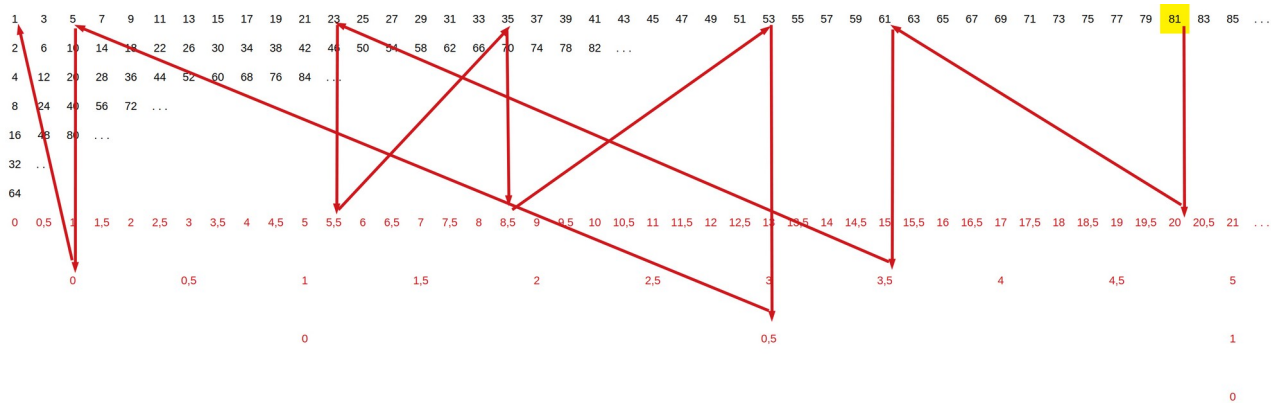
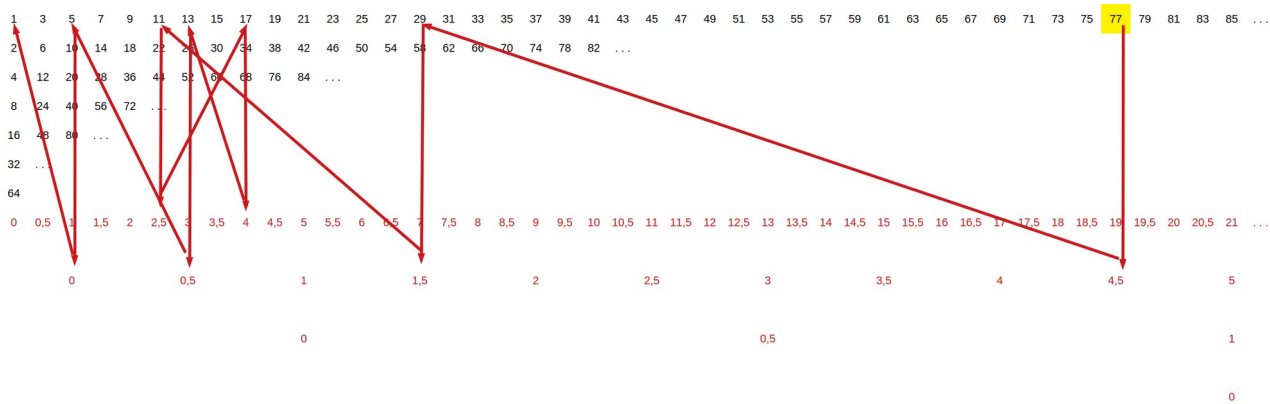
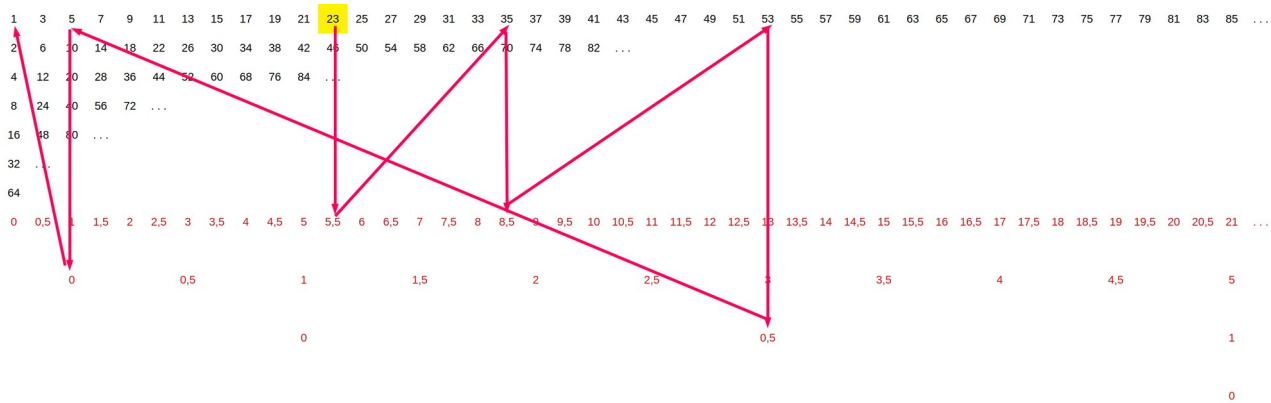
$$(1 - 1) / 4 = 0$$

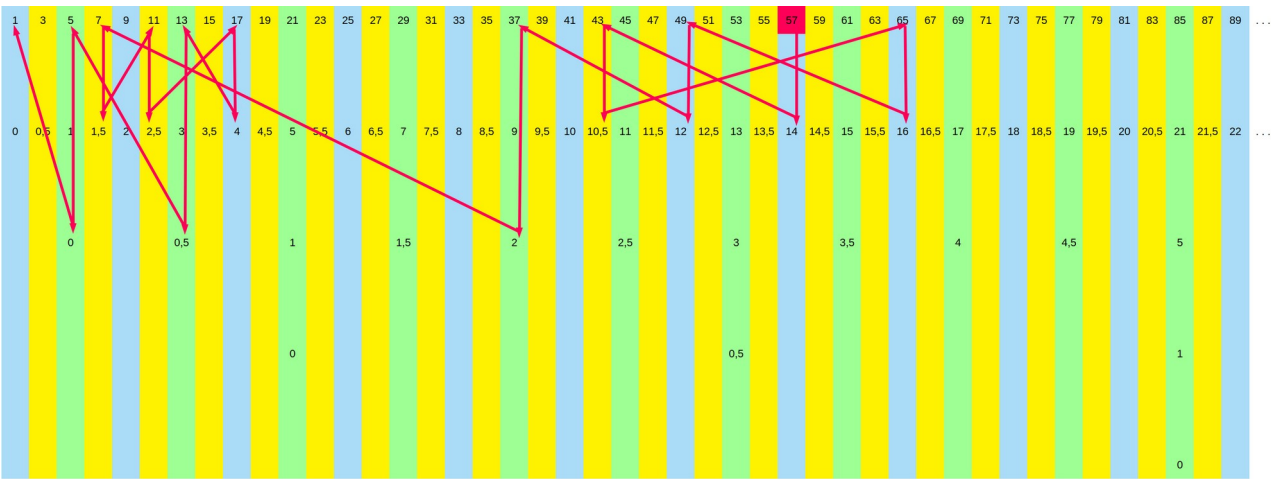
$$(3 \times 0) + 1 = 1$$

Secuencia obtenida:

23, 5.5, 35, 8.5, 53, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0, 1.







UNA SECUENCIA DE NUMEROS QUE SIEMPRE ACABA EN 5, 1, 0.

Empiezo con un número entero o por la mitad de un número impar cualquiera, o sea que puedo elegir la mitad de cualquier número natural $N/2$ y le aplico los siguientes cálculos:

Si es un número par lo multiplico por 3 y le sumo 1 al resultado.

Si es un número impar le resto 1 y divido el resultado entre 4.

Si es la mitad de un impar lo multiplico por 6 y le sumo 2 al resultado.

Con el número obtenido repito el proceso sucesivamente y la secuencia acaba siempre con el 5, 1, 0. Si sigo con el cero como número par, entro en un ciclo infinito con el cero y el uno.

Un ejemplo:

Escogemos para empezar el número el 23

CÁLCULOS:

$$(23 - 1) / 4 = 5.5$$

$$(5.5 \times 6) + 2 = 35$$

$$(35 - 1) / 4 = 8.5$$

$$(8.5 \times 6) + 2 = 53$$

$$(53 - 1) / 4 = 13$$

$$(13 - 1) / 4 = 3$$

$$(3 - 1) / 4 = 0.5$$

$$(0.5 \times 6) + 2 = 5$$

$$(5 - 1) / 4 = 1$$

SECUENCIA OBTENIDA:

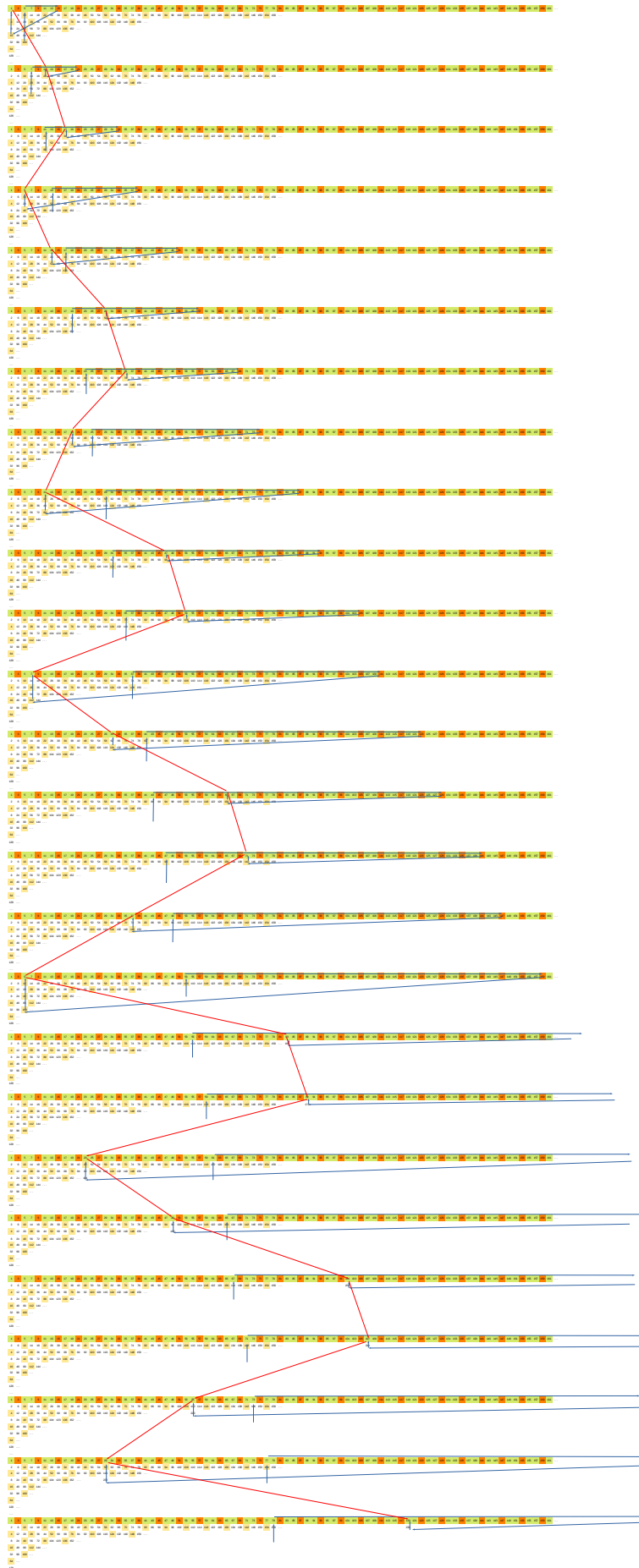
23, 5.5, 35, 8.5, 53, 13, 3, 0.5, 5, 1

$$3*((3*((3*((3*((3*((x+1)/2)+1)/2)+1)/2)+1)/2)+1)/2)+1$$

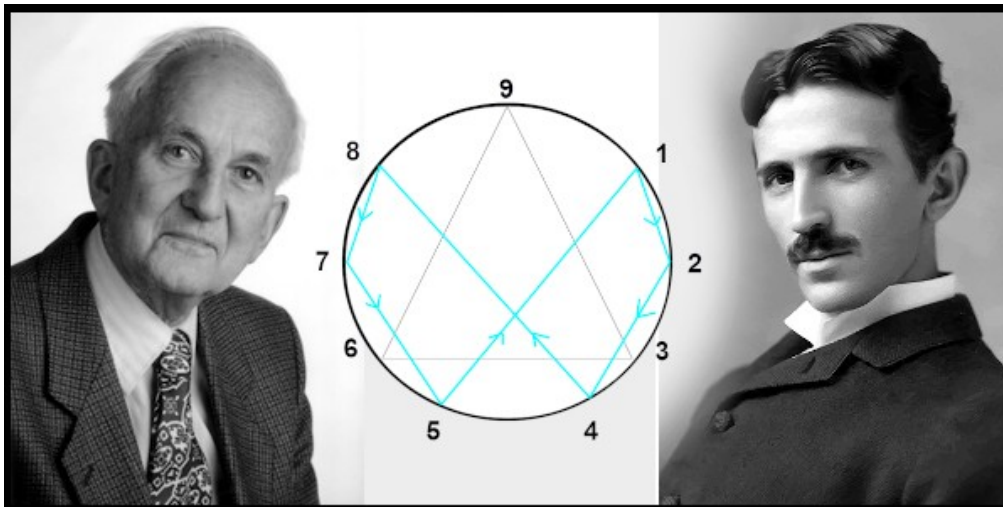
$$3\left(\frac{1}{2}\left(3\left(\frac{1}{2}\left(3\left(\frac{1}{2}\left(3\left(\frac{1}{2}\left(3\left(\frac{x+1}{2}+1\right)+1\right)+1\right)+1\right)+1\right)+1\right)+1\right)+1\right)+1\right)+1$$

$$1 + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} (3(1+x)) \right) \right) \right) \right) \right) \right)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{3(x+1)}{2} + 1 \right) + 1 \right) + 1 \right) + 1 \right) + 1$$



¿Conoció LOTHAR COLLATZ a NIKOLA TESLA y sus afirmaciones sobre los números 3, 6 y 9?



$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{if } n \text{ is even} \\ 3n + 1 & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

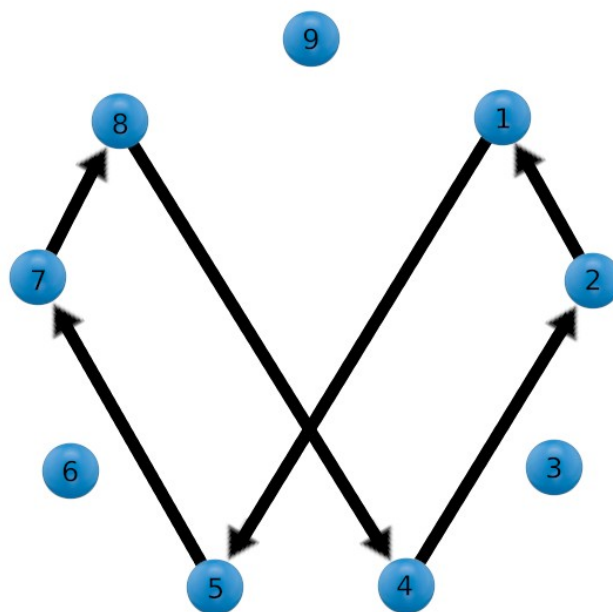
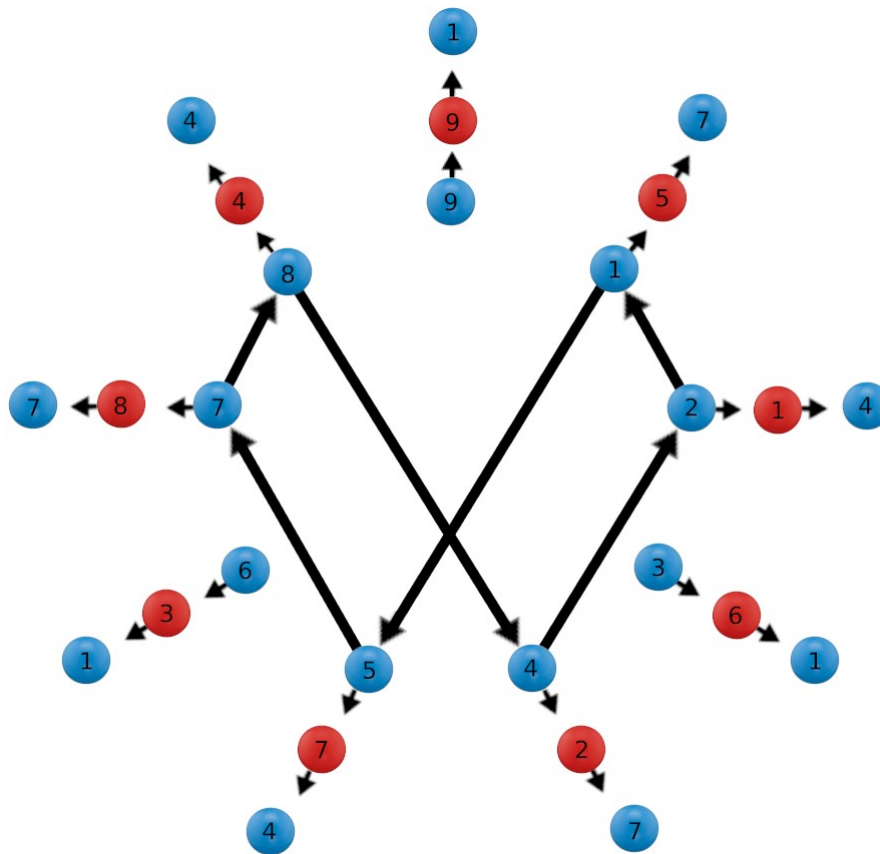


Diagrama que representa los nueve grupos de números naturales, clasificados según su raíz digital. Al ser divididos entre 2, los números pares iteran entre ellos, según el sentido de las flechas, en un ciclo sin fin. Los números impares, sometidos a la función $3n+1$, iteran a un número par con raíz digital 1, 4 ó 7. A continuación, el mismo diagrama con las iteraciones de los números impares, en color rojo.



Las iteraciones de los números de una secuencia de Collatz suceden siempre siguiendo el mismo patrón, según su raíz digital, en estos tres ciclos:

Ciclo A

Las iteraciones de los números pares $rd(3)$ generan números pares e impares $rd(6)$.
 Las iteraciones de los números pares $rd(6)$ generan números pares e impares $rd(3)$.
 Las iteraciones de los números impares $rd(3)$ y $rd(6)$ generan números pares $rd(1)$.

Ciclo B

Las iteraciones de los números pares $rd(9)$ generan números pares e impares $rd(9)$.
 Las iteraciones de los números impares $rd(9)$ generan números pares $rd(1)$.

Ciclo C

Las iteraciones de los números pares $rd(5)$ generan números pares e impares $rd(7)$.
 Las iteraciones de los números pares $rd(7)$ generan números pares e impares $rd(8)$.
 Las iteraciones de los números pares $rd(8)$ generan números pares e impares $rd(4)$.
 Las iteraciones de los números pares $rd(4)$ generan números pares e impares $rd(2)$.
 Las iteraciones de los números pares $rd(2)$ generan números pares e impares $rd(1)$.
 Las iteraciones de los números pares $rd(1)$ generan números pares e impares $rd(5)$.
 Las iteraciones de los números impares $rd(5)$, $rd(8)$ y $rd(2)$ generan números pares $rd(7)$.
 Las iteraciones de los números impares $rd(7)$, $rd(4)$ y $rd(1)$ generan números pares $rd(4)$.

Los números de los ciclos A y B pueden aparecer solamente al principio de una secuencia de Collatz, hasta que iteran a un número impar y entran en el ciclo C con un número par $rd(1)$.

Estos números no volverán a aparecer en la misma secuencia.

Diagrama de los ciclos A y B

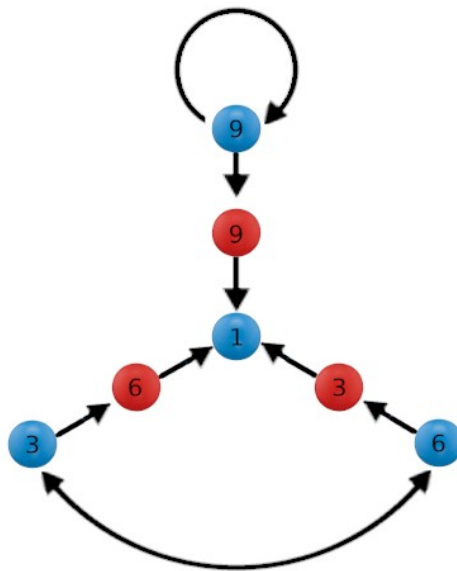
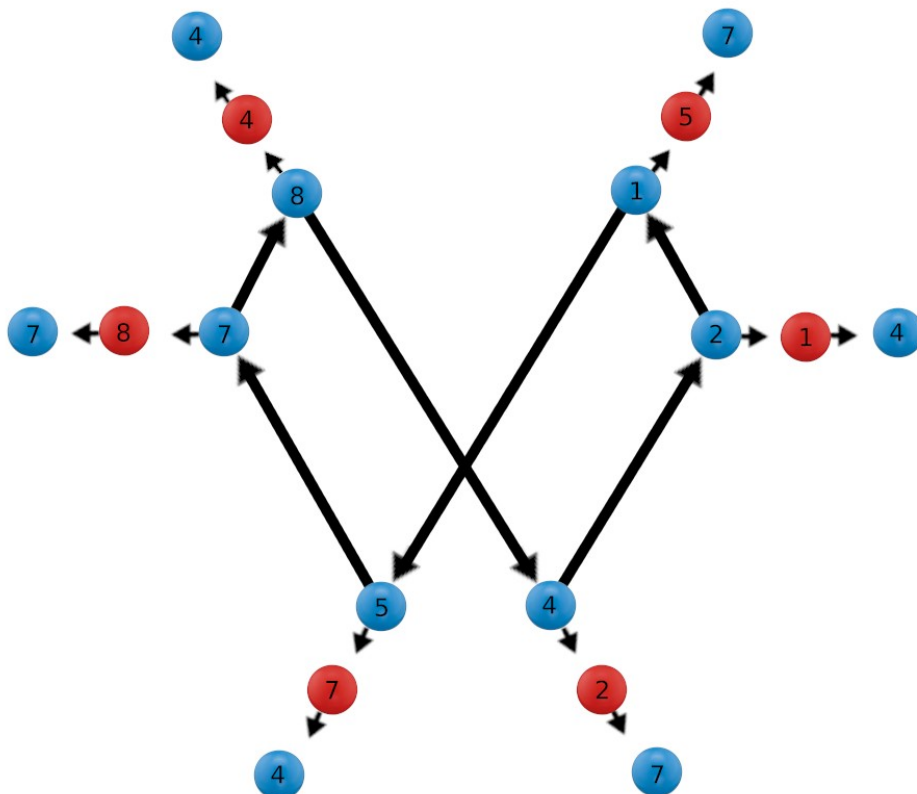
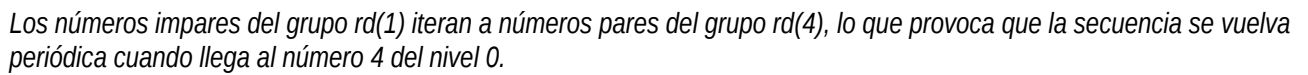


Diagrama del ciclo C



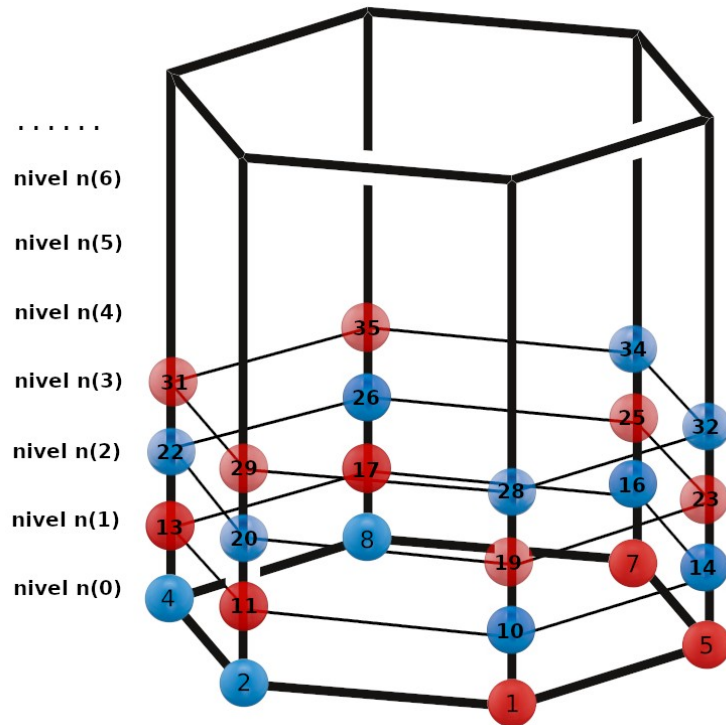
El ciclo C, donde iteran los números de los grupos $rd(5, 7, 8, 4, 2, 1)$ es un ciclo cerrado sin final, en el que los números pares son divididos entre 2 y aunque en esas iteraciones aparecen números impares, todos ellos iteran nuevamente a números pares de los grupos $rd(4)$ y $rd(7)$.



EN LOS GRUPOS LOS NÚMEROS ESTÁN EN DIFERENTES NIVELES
Los movimientos de los números de Collatz en un prisma hexagonal.

Imaginemos que los números son objetos físicos, como partículas en movimiento que van de un grupo a otro y a diferentes niveles, en cada iteración.

Gráfico 3D en el que puede haber tantos niveles como números, con los seis grupos $rd(n)$ en las aristas del prisma y sus números pares e impares.



La siguiente tabla clasifica a los números naturales que participan en una secuencia de Collatz después del primer impar de la misma. El valor de (n) indica el nivel de los números de su columna.

		n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	..
Números con raíz digital 8	$9n+8$		8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	..
Números con raíz digital 4	$9n+4$		4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	..
Números con raíz digital 2	$9n+2$		2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173	..
Números con raíz digital 1	$9n+1$		1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154	163	172	..
Números con raíz digital 5	$9n+5$		5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	..
Números con raíz digital 7	$9n+7$		7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	160	169	178	..

Ejemplos: El número 136 está en el nivel $n(15)$ del grupo de números pares $rd(1)$.

El número 169 está en el nivel $n(18)$ del grupo de números impares $rd(7)$.

Los cambios de nivel que experimentan los números de una secuencia de Collatz suceden de la siguiente forma:

Los números pares $p(n \text{ par})$ iteran a un número del nivel $(n/2)$ y $p(n \text{ impar})$ iteran a un número del nivel $((n-1)/2)$.

Los números impares k , que están en el nivel $k/9$ iteran a un número par $p(k/3)$, y éste itera a otro número par $p(k/6)$.

Resultados teniendo en cuenta el cociente, sin los decimales.

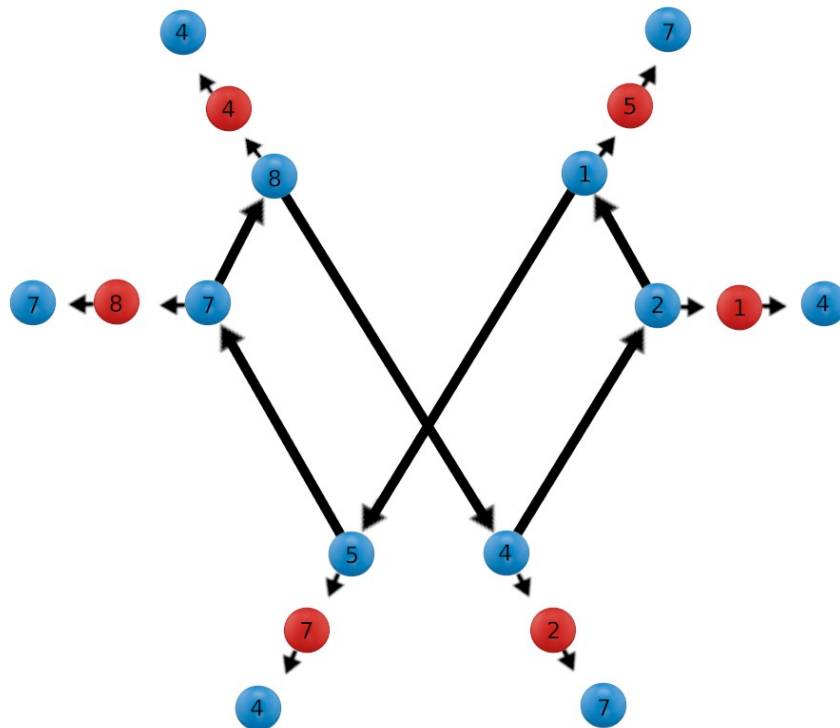
Ejemplos:

El número 47 del nivel $n(5)$ sube al nivel $a(1/3*b) = a(15)$ y éste baja al nivel $a(1/2*1/3*b-1) = b(7)$.

$B=67$ del nivel $b(7)$ sube al nivel $a(1/3*b) = a(22)$ y éste baja al nivel $a(1/2*1/3*b) = b(11)$.

Aproximadamente es $3/2$ de subida real.

PERIODO 4, 2, 1 DE LAS SECUENCIAS



Descripción del diagrama: El color azul representa los grupos de los números pares enteros positivos y el color rojo a los números impares, clasificados según el valor de su raíz digital.

Las flechas indican las iteraciones de los números y los cambios de grupo.

No están los números que pertenecen a los grupos $rd(3)$, $rd(6)$ y $rd(9)$, porque como se dice anteriormente, no iteran en el mismo ciclo y pueden aparecer únicamente al principio de una secuencia de Collatz.

La secuencia empezada con el número 100, como ejemplo de las iteraciones de los números y sus grupos del diagrama:

100, 50, 25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
 1 5 7 4 2 1 4 2 7 8 4 2 7 8 7 8 4 4 2 1 5 7 8 4 2 1

El diagrama confirma que las iteraciones provocadas por la función de Collatz llevan a todos los números impares hasta un número par del grupo $rd(4)$, ya que los que llegan a un número par $rd(7)$ éste únicamente puede iterar a otro número par $rd(8)$ y éste a $rd(4)$. Este número par $rd(4)$, después de iterar a un número par $rd(2)$, llega al grupo de los números impares $rd(1)$, en el que en su nivel 0 está el número 1. Pero si el par $rd(4)$ itera a un impar $rd(2)$, éste itera a un par $rd(7)$, volviendo de nuevo a otro número par $rd(4)$, comenzando un nuevo ciclo, ya que la secuencia puede iterar muchas veces al grupo de números impares $rd(1)$ a diferentes niveles y seguir en el ciclo una y otra vez hasta llegar al nivel 0 y al número 1.

En la parte derecha del gráfico está bien definido el ciclo infinito 4, 2, 1 en el que entran todas las secuencias y es el único del nivel 0, lo que anula la posibilidad de que pueda haber una secuencia con un período distinto, porque en niveles superiores no pueden existir.

En las secuencias, cada número del grupo par $rd(4)$ representa el final y el inicio de un ciclo. En la secuencia del ejemplo anterior, los números de la secuencia empezada con el número 100, han iterado en 5 ciclos para llegar al grupo

de los números impares $rd(1)$ y hasta el número 1. Anteriormente la secuencia ya había iterado a ese mismo grupo, pero al número 19 en el nivel 2.

No importa el número de ciclos que necesite una secuencia, siempre llegará al número 1 porque las divisiones entre 2 aplicadas a los números pares acaban en un número impar que itera a los números pares de los grupos $rd(4)$, volviendo la secuencia a un nuevo ciclo con el mismo patrón, que se puede repetir muchas veces, pero no infinitamente.

Una particularidad con los números 3, 6 y 9:

La secuencia empezada con el número 100. Debajo de los números está el grupo en el que está n los números $rd(n)$, en azul los números pares y en rojo los números impares. Y debajo de ellos están los valores de los niveles en los que están los números en cada grupo. Ejemplo: El número 88 está en el nivel 9 del grupo de los números pares $rd(7)$.

100, 50, 25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
 1 5 7 4 2 1 4 2 7 8 4 2 7 8 7 8 4 4 2 1 5 7 8 4 2 1
 11 5 2 8 4 2 6 3 9 4 2 1 3 1 5 2 1 4 2 1 0 1 0 0 0 0

Al dividir a los números impares entre 9, 3 y 6, se obtienen los valores de los niveles que ocupan el número impar y los dos siguientes, respectivamente. La parte entera del resultado, sin los decimales.

25/9=2,77 19/9=2,11 29/9=3,22 11/9=1,22 17/9=1,88 13/9=1,44 5/9=0,55
 25/3=8,33 19/3=6,33 29/3=9,66 11/3=3,66 17/3=5,66 13/3=4,33 5/3=1,66
 25/6=4,16 19/6=3,16 29/6=4,83 11/6=1,83 17/6=2,83 13/6=2,16 5/6=0,83

Si k es un número impar, $k/9$ itera a $k/3$ y éste a $k/6$. El número 29 de la secuencia anterior itera al número 88 y 44.
 Si k es un número par, $k/9$ itera a $k/18$. El número 88 de la secuencia anterior, que está en el nivel 9, itera al número 44 en el nivel 4.

Otras secuencias y los niveles de los números:

65, 196, 98, 49, 148, 74, 37, 112, 56, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
 7 21 10 5 16 8 4 12 6 3 1 0 2 1 3 1 5 2 1 4 2 1 0 1 0 0 0 0

Niveles de la secuencia: 21, 16, 12, 10, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0
 Cantidad de números: 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 3 6 6

93, 280, 140, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
 10 31 15 7 3 12 5 17 8 4 2 1 0 1 0 0 0 0

Niveles de la secuencia: 31, 17, 15, 12, 10, 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1, 0
 Cantidad de números: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 5

79, 238, 119, 358, 179, 538, 269, 808, 404, 202, 101, 304, 152, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11,
 8 26 13 39 19 59 29 89 44 22 11 33 16 8 4 2 6 3 9 4 2 1

34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
 3 1 5 2 1 4 2 1 0 1 0 0 0 0

Niveles de la secuencia: 89, 59, 44, 39, 33, 29, 26, 22, 19, 16, 13, 11, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 3 2 4 5 5

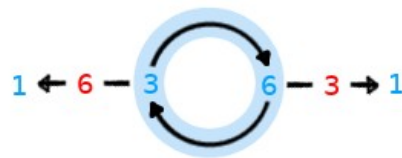
Las secuencias obtenidas con el algoritmo de Collatz pueden estar formadas por números muy grandes, haciéndose muy difícil su desarrollo de forma manual sin contar con ayudas de computación, sin embargo, es muy fácil analizarlas según la raíz digital de sus términos, porque todos los números de un mismo grupo de raíz digital van a iterar a un mismo grupo, sean números pares o impares.

Por ejemplo, el número 27 $rd(9)$ itera a un número par del grupo $rd(1)$, como también lo hace el número 111111110000000000000001.

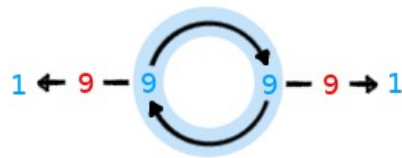
Hay que tener presente que de cualquier número par sometido a divisiones entre 2 de manera iterada, resulta un número impar, que multiplicado por 3 y sumando 1 al resultado, siempre se obtiene un número par.

Las iteraciones de los números se visualizan en los siguientes gráficos, cuyos valores expresan la raíz digital de los números:

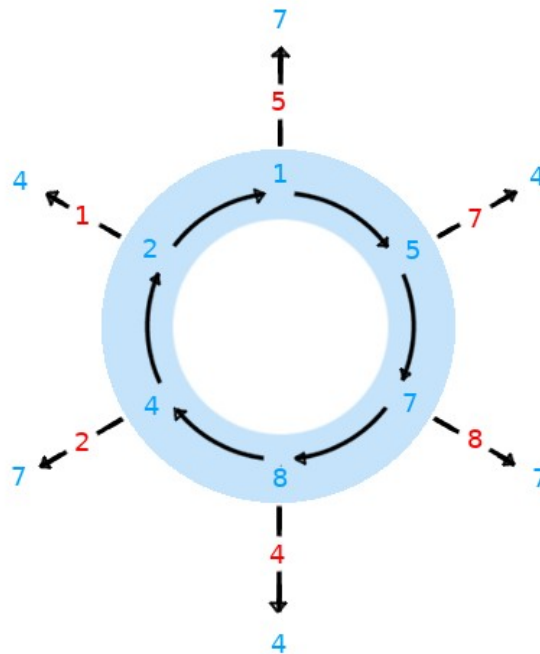
Ciclo A



Ciclo B



Ciclo C



Ciclo A:

Las iteraciones de los números pares $rd(3)$ generan números pares e impares $rd(6)$.
Las iteraciones de los números pares $rd(6)$ generan números pares e impares $rd(3)$.
Las iteraciones de los números impares $rd(3)$ y $rd(6)$ generan números pares $rd(1)$.

Ciclo B:

Las iteraciones de los números pares $rd(9)$ generan números pares e impares $rd(9)$.
Las iteraciones de los números impares $rd(9)$ generan números pares $rd(1)$.

Ciclo C:

Las iteraciones de los números pares $rd(1)$ generan números pares e impares $rd(5)$.
Las iteraciones de los números pares $rd(5)$ generan números pares e impares $rd(7)$.
Las iteraciones de los números pares $rd(7)$ generan números pares e impares $rd(8)$.
Las iteraciones de los números pares $rd(8)$ generan números pares e impares $rd(4)$.
Las iteraciones de los números pares $rd(4)$ generan números pares e impares $rd(2)$.
Las iteraciones de los números pares $rd(2)$ generan números pares e impares $rd(1)$.

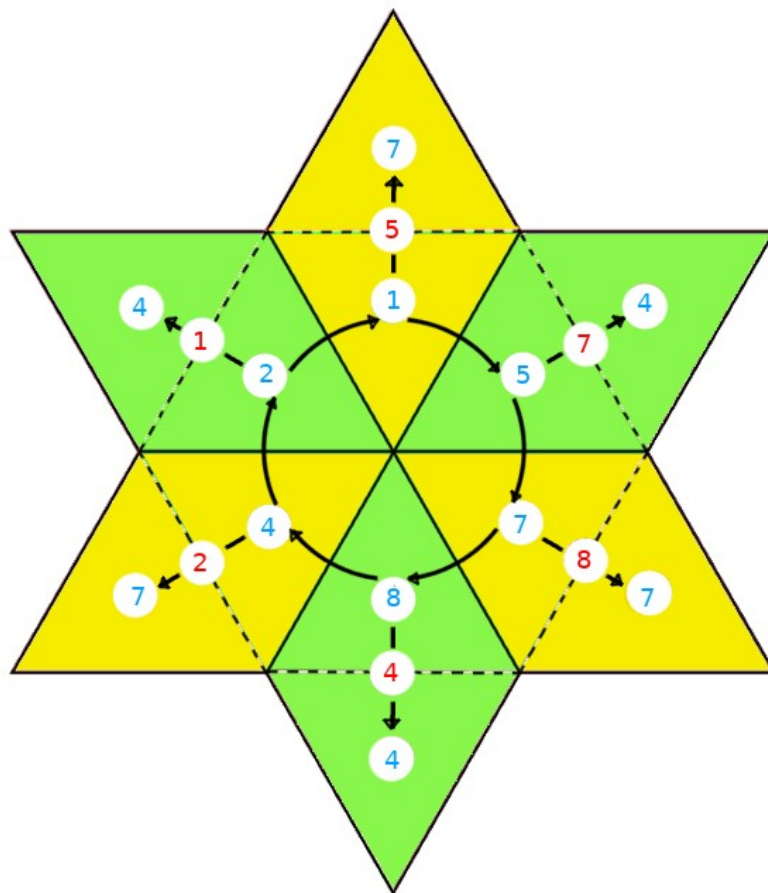
Las iteraciones de los números impares $rd(5)$ generan números pares $rd(7)$.
Las iteraciones de los números impares $rd(7)$ generan números pares $rd(4)$.
Las iteraciones de los números impares $rd(8)$ generan números pares $rd(7)$.
Las iteraciones de los números impares $rd(4)$ generan números pares $rd(4)$.
Las iteraciones de los números impares $rd(2)$ generan números pares $rd(7)$.
Las iteraciones de los números impares $rd(1)$ generan números pares $rd(4)$.

Los términos de los ciclos A y B no entran en el ciclo C hasta que han iterado a un número impar y éste a un número par $rd(1)$.

En el ciclo C los números pares iteran en el círculo central del gráfico y cuando llegan a un número impar, éste itera nuevamente a un número par del interior del círculo, $rd(4)$ y $rd(7)$.

Las iteraciones se repiten hasta alcanzar el número 1.

Todas las iteraciones de una secuencia de Collatz ocurren en un ciclo cerrado sin final, siguiendo el patrón del gráfico. Ciclo cerrado sin final en el que la secuencia no acaba al llegar al número 1, sino que itera indefinidamente al 4, 2, 1, 4, 2, 1, . . . La infinitud de este ciclo se constata en el gráfico, en el que se verifica también la imposibilidad de que pueda existir una secuencia con un período distinto de 4, 2, 1.



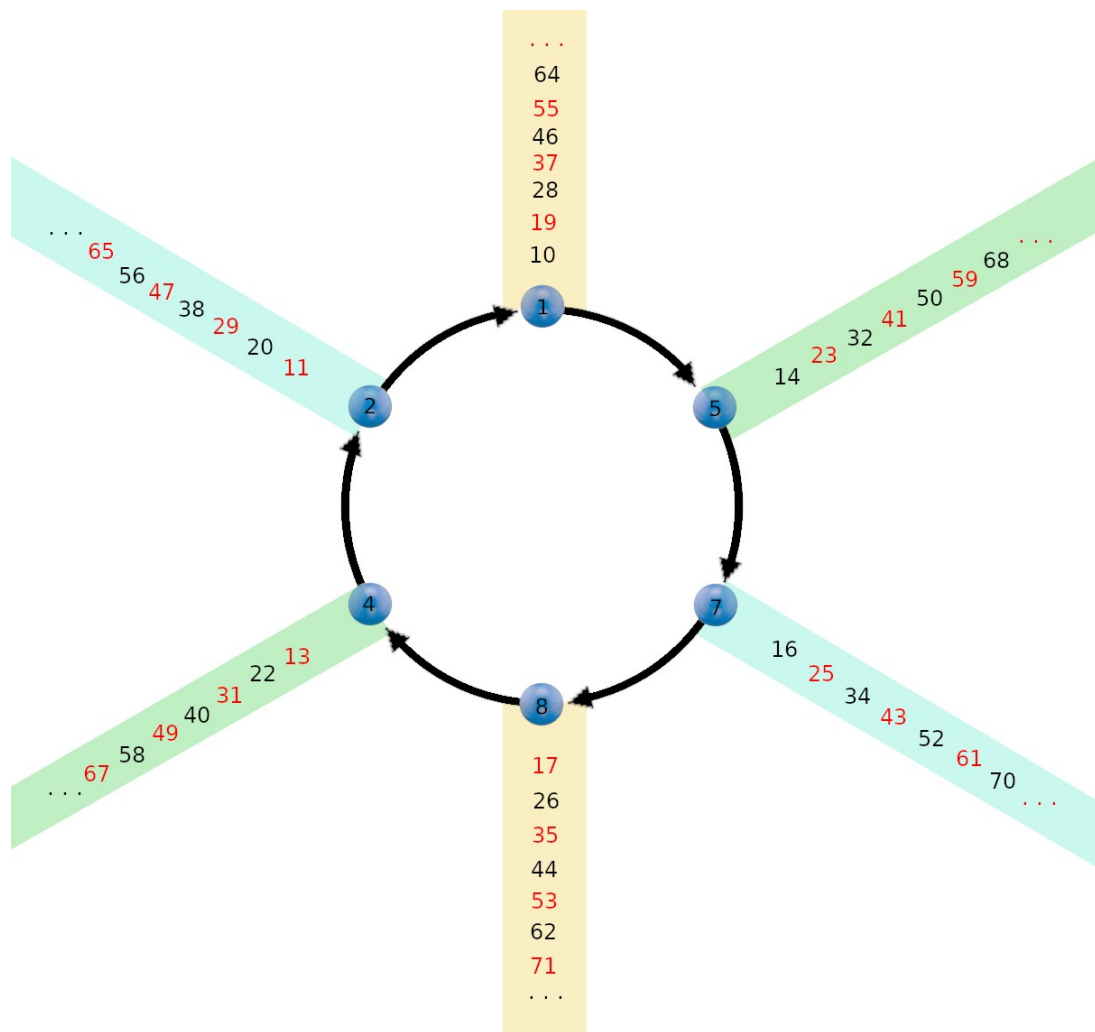
Los números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, . . . están en los grupos 1, 2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, . . . y es un patrón que se repite indefinidamente, con infinitos números 2^n en cada grupo del diagrama. Una secuencia que empiece con uno de estos números entrará en el ciclo 4, 2, 1.

Alcanzar uno de estos números cuando la secuencia no empieza con uno de ellos, sucede con la iteración de un número impar, que es siempre a un número par de los grupos 4 ó 7, descartando a los que iteran a un número par del grupo 1, porque esos números son múltiplos de 3, que solamente pueden estar al principio de la secuencia y nunca después del primer número impar de la misma. Los números impares nunca iteran a un número par de los grupos 2, 8 y 5.

Algunos números 2^n del grupo 4: 4, 256, 16384, 1048576, 67108864, . . . son $4^{(3n+1)}$ y del grupo 7: 16, 1024, 65536, 4194304, 268435456, . . . son $4^{(3n+2)}$.

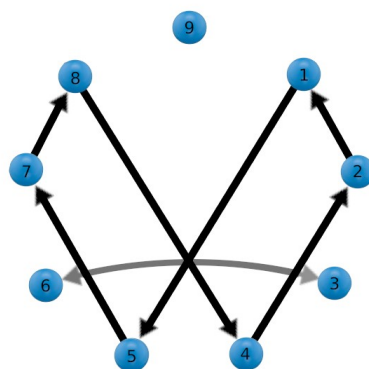
Todas las secuencias, antes de entrar en el ciclo 4, 2, 1, llegan a uno de estos números por iteración de alguno de los números impares 1, 5, 85, 341, 5461, 21845, 349525, 1398101, 22369621, 89478485, . . . , números de los grupos 1, 5, 4, 8, 7, 2, 1, 5, 4, 8, 7, 2, 1, 5, . . . , que son producto de las iteraciones de los números pares 2, 10, 170, 682, 10922, 43690, 699050, 2796202, 44739242, 178956970, . . . de los grupos 2, 1, 8, 7, 5, 4, 2, 1, 8, 7, 5, 4, . . . Estos patrones se repiten de manera infinita.

Cuando un número de la secuencia llega a uno de estos números pares, la secuencia entrará en el ciclo 4, 2, 1 y siempre habrá en todas las secuencias un número que llegará a ellos, porque los números iteran indefinidamente en un ciclo cerrado sin final con patrones establecidos.



El siguiente gráfico representa nueve grupos de números naturales, clasificados según su raíz digital.

GRAFICO 1

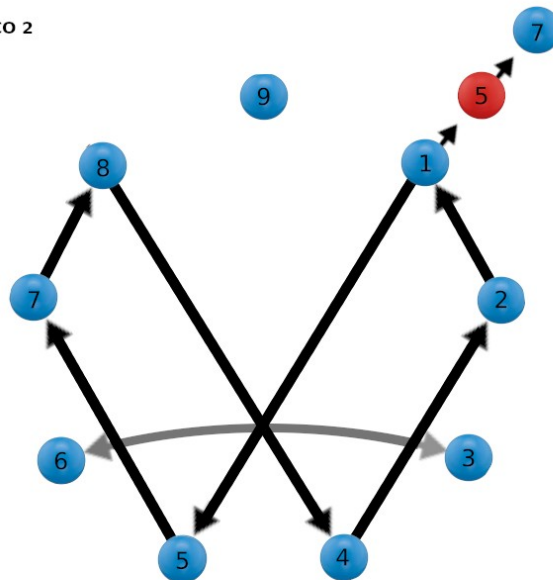


Al ser divididos entre 2, los números pares iteran entre ellos, según el sentido de rotación del gráfico, en un ciclo cerrado sin final.

Pero de los números pares sometidos a divisiones entre 2 de manera iterada, se obtiene siempre un número impar. Entonces, ¿cómo pueden los números seguir iterando en ese círculo cerrado?

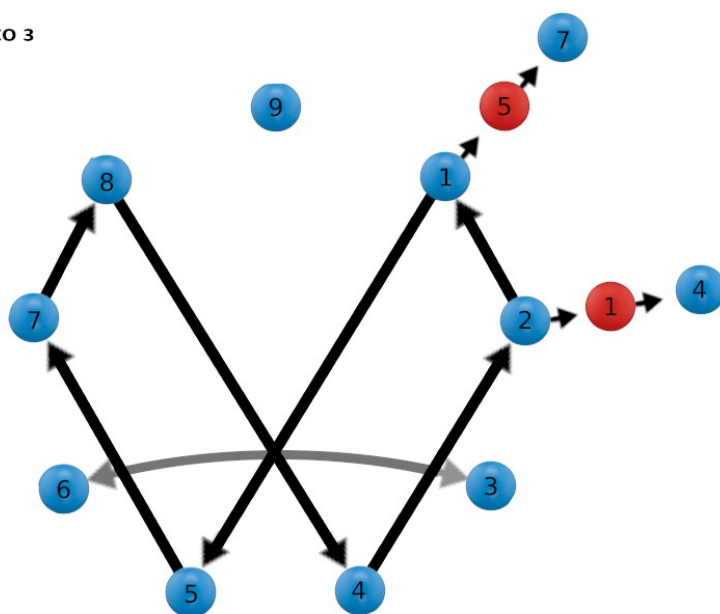
Quando resulta un número impar y éste es sometido a la operación del algoritmo $3n+1$, siempre itera a un número par con raíz digital 1, 4 ó 7.

En el siguiente gráfico, un número par con raíz digital 1, al ser dividido entre 2 ha iterado a un número impar con raíz digital 5 y éste a un número par con raíz digital 7 y la secuencia entra de nuevo en el ciclo donde los números pares son divididos entre 2.

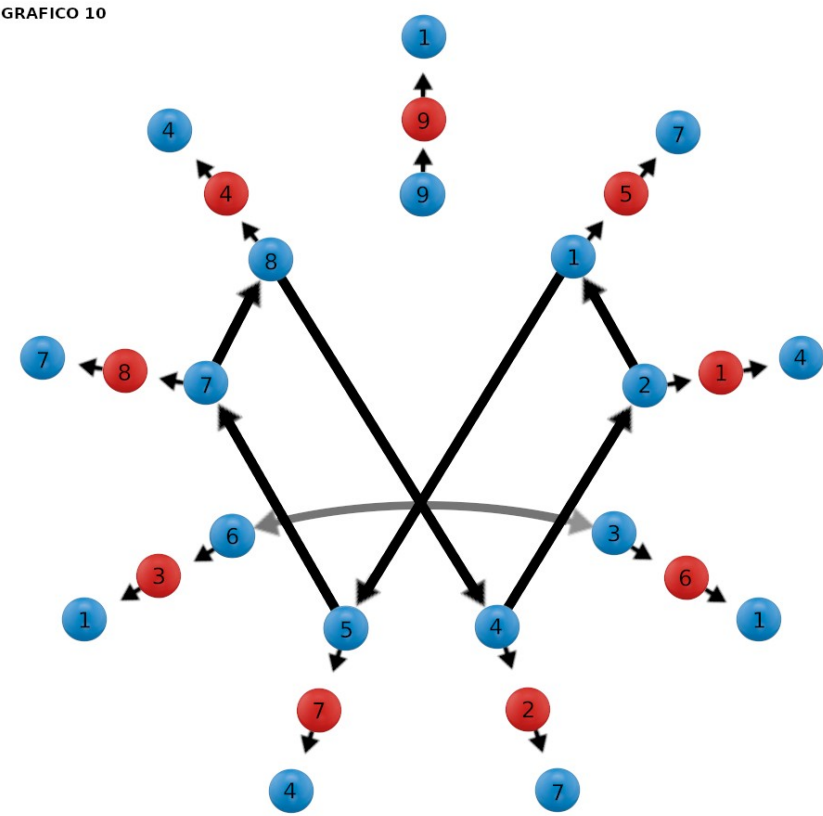


En este otro gráfico, además de la iteración del par $rd(1)$ a un impar $rd(5)$, vemos la iteración de un número par $rd(2)$ a un número impar $rd(1)$ y éste a un número par con raíz digital 4.

GRAFICO 3



En el siguiente gráfico están las iteraciones de todos los números pares a números impares y todos los números impares que iteran a números pares con raíz digital 1, 4 y 7.



Las oscilaciones ascendentes de una secuencia de Collatz son provocadas por los números impares cuando iteran a números pares que admiten solo una división entre 2 y con las iteraciones de los números pares la secuencia es más o menos descendente en función del número de divisiones entre 2 que se pueden aplicar al número par.

En la siguiente tabla vemos que ambas opciones tienen la misma posibilidad de estar en las secuencias. En cada columna, en las que están las iteraciones de los números, hay la misma cantidad de números pares y de números impares.

[illegible]

Ejemplo de oscilación ascendente provocada por el número impar 47 y las iteraciones seguidas:

47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, . . . cuatro números impares provocan que la secuencia ascienda hasta el número 484.

Ejemplo de oscilación descendente provocada por el número par 48 y las iteraciones seguidas:

48, 24, 12, 6, 3, ... cuatro números pares provocan que la secuencia descienda hasta el número 3.

En la siguiente tabla, en sus seis filas infinitas, estarían todos los números pares e impares que pueden formar parte de cualquier secuencia de Collatz, a partir del primer número impar.

Los números impares 1, 5, 7, 11, 13, 17, ... y los números pares 2, 4, 8, 10, 14, 16, ...

Los valores de la primera columna son la raíz digital de todos los números de su fila.

		n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...
Números con raíz digital 8	9n+8		8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	...
Números con raíz digital 4	9n+4		4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	...
Números con raíz digital 2	9n+2		2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173	...
Números con raíz digital 1	9n+1		1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154	163	172	...
Números con raíz digital 5	9n+5		5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	...
Números con raíz digital 7	9n+7		7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	160	169	178	...

Los valores de (n) indican el nivel en que se encuentran los números de su columna en un diagrama 3D, en el que cada uno de sus niveles es el gráfico D con los valores que le correspondan según la tabla.

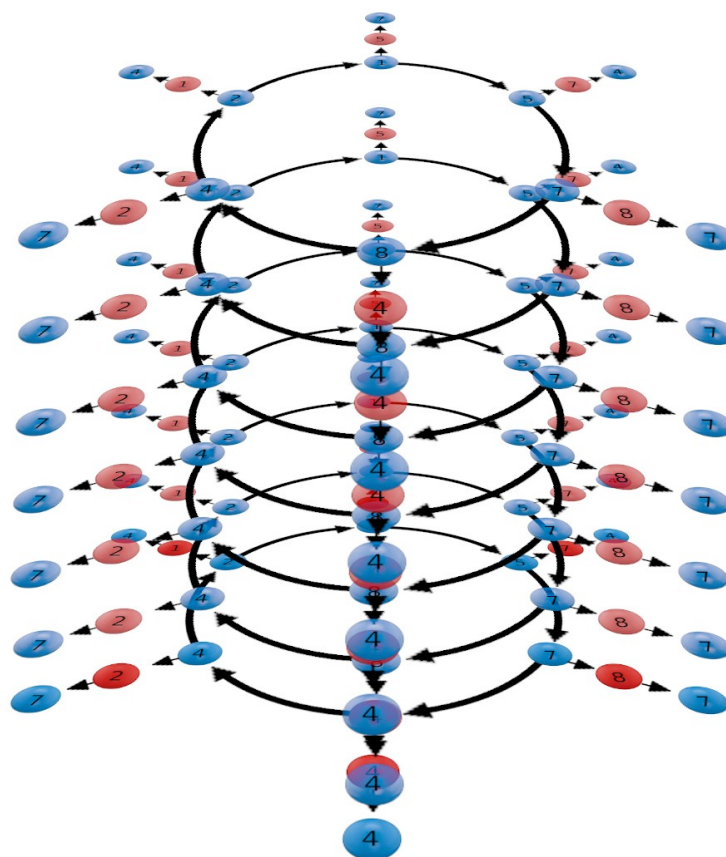
El nivel base $n(0)$ sería el gráfico D, que tiene los valores de $n(0)$ de la tabla.

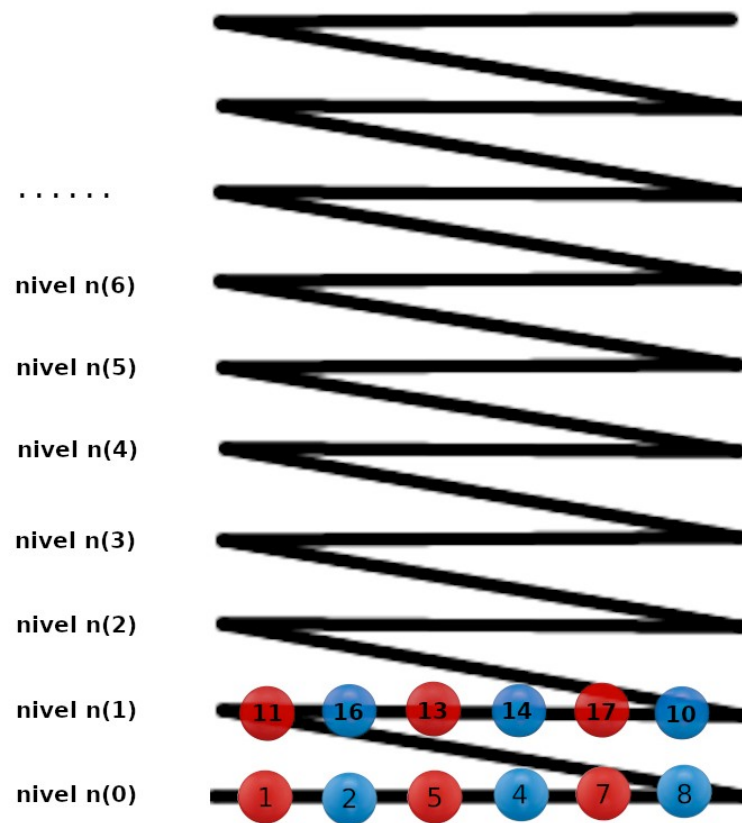
El nivel $n(1)$ sería el mismo gráfico pero con los valores de la columna $n(1)$.

El siguiente nivel tendría los valores de la columna $n(2)$.

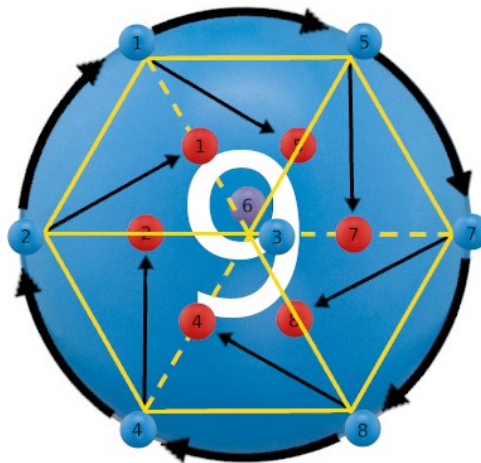
Etc, etc.

GRAFICO E





Pares azules. Impares rojos.



El diagrama representa una esfera con un cubo inscrito.

Los valores en azul colocados en los ocho vértices del cubo representan las raíces digitales de los números pares. También el 9 del centro del cubo.

Los valores en rojo colocados en las seis caras del cubo representan las raíces digitales de los números impares del ciclo C.

Las flechas indican el sentido de las iteraciones de los números: En la superficie de la esfera, los números pares y en la superficie del cubo, los números impares.

Las flechas de las iteraciones entre los números pares 3 y 6 no están en el gráfico, por la dificultad de hacerlas visibles, pero circunvalarían la superficie de la esfera en sentido transversal, pues ocupan puntos antipodales.

El número 9 permanece estático en el centro de la esfera.

Las iteraciones de los números de una secuencia de Collatz suceden siempre siguiendo el mismo patrón, según su raíz digital.

Ciclo A:

Las iteraciones de los números pares $rd(3)$ generan números pares e impares $rd(6)$.

Las iteraciones de los números pares $rd(6)$ generan números pares e impares $rd(3)$.

Las iteraciones de los números impares $rd(3)$ y $rd(6)$ generan números pares $rd(1)$.

Ciclo B:

Las iteraciones de los números pares $rd(9)$ generan números pares e impares $rd(9)$.

Las iteraciones de los números impares $rd(9)$ generan números pares $rd(1)$.

Ciclo C:

Las iteraciones de los números pares $rd(1)$ generan números pares e impares $rd(5)$.

Las iteraciones de los números pares $rd(5)$ generan números pares e impares $rd(7)$.

Las iteraciones de los números pares $rd(7)$ generan números pares e impares $rd(8)$.

Las iteraciones de los números pares $rd(8)$ generan números pares e impares $rd(4)$.

Las iteraciones de los números pares $rd(4)$ generan números pares e impares $rd(2)$.

Las iteraciones de los números pares $rd(2)$ generan números pares e impares $rd(1)$.

Las iteraciones de los números impares $rd(5)$ generan números pares $rd(7)$.
Las iteraciones de los números impares $rd(7)$ generan números pares $rd(4)$.
Las iteraciones de los números impares $rd(8)$ generan números pares $rd(7)$.
Las iteraciones de los números impares $rd(4)$ generan números pares $rd(4)$.
Las iteraciones de los números impares $rd(2)$ generan números pares $rd(7)$.
Las iteraciones de los números impares $rd(1)$ generan números pares $rd(4)$.

Los números de los ciclos A y B no entran en el ciclo C hasta que han iterado a un número impar y éste a un número par $rd(1)$.

En el ciclo C los números pares iteran sobre la superficie de la esfera y cuando llegan a un número impar del cubo, éste itera nuevamente a un número par de la esfera, $rd(4)$ y $rd(7)$.

VIII. LA CONJETURA DE COLLATZ
Orden y armonía en los números de la secuencia

por Miguel Cerdá Bennassar – Septiembre de 2020.

El conjunto A tiene nueve subconjuntos divididos en tres grupos, a, b y c.

Los elementos de los subconjuntos son todos los números naturales, agrupados según el resto que producen al dividirlos entre 9 y según el valor de su raíz digital, $rd(n)$.

$$A = \{rd(9), rd(3), drd(6), rd(5), rd(7), rd(8), rd(4), rd(2), rd(1)\}$$

Grupo a: $rd(9) = \{9, 18, 27, 36, 45, \dots\}$

Grupo b: $rd(3) = \{3, 12, 21, 30, 39, \dots\}$
 $rd(6) = \{6, 15, 24, 33, 42, \dots\}$

Grupo c: $rd(5) = \{5, 14, 23, 32, 41, \dots\}$
 $rd(7) = \{7, 16, 25, 34, 43, \dots\}$
 $rd(8) = \{8, 17, 26, 35, 44, \dots\}$
 $rd(4) = \{4, 13, 22, 31, 40, \dots\}$
 $rd(2) = \{2, 11, 20, 29, 38, \dots\}$
 $rd(1) = \{1, 10, 19, 28, 37, \dots\}$

Si a cualquier elemento de los 9 subconjuntos le aplicamos una o más de las operaciones básicas de la aritmética, el resultado es un elemento de otro subconjunto y si a cada nuevo elemento le aplicamos la misma operación, formamos una sucesión que será infinita o acotada, según las operaciones aplicadas.

El nuevo elemento obtenido puede pertenecer al mismo subconjunto, pero solo si la operación aplicada es sumar un múltiplo de 9 o si el elemento es del subconjunto $rd(9)$.

Podemos formar una secuencia infinita, multiplicando por 2 a un primer elemento y sucesivamente a cada resultado obtenido. Un ejemplo empezando con el número 13: $2 \cdot 13 = 26$, $2 \cdot 26 = 52$, $2 \cdot 52 = 104$, $2 \cdot 104 = 208$, $2 \cdot 208 = 416$, ... Si sustituimos los elementos por la raíz digital de cada uno de ellos, la sucesión es: 4, 8, 7, 5, 1, 2, ...

Si la operación que vamos a aplicar es sumar 6 al primer elemento:

$$6 + 13 = 19, 6 + 19 = 25, 6 + 25 = 31, 6 + 31 = 37, 6 + 37 = 43, \dots$$

y la sucesión de las raíces digitales de los elementos es: 4, 1, 7, 4, 1, 7, ...

Aplicando a los elementos una operación de sustracción o división, las secuencias serán acotadas.

Si dividimos entre 2 a los elementos pares y multiplicamos por 2 a los elementos impares, una sucesión empezada con el elemento 34 sería: $34/2 = 17$, $2 \cdot 17 = 34$, $34/2 = 17$, ... Los elementos 34 y 17 se repiten de manera infinita. Las raíces digitales: 7, 8, 7, 8, ...

Si a los elementos impares, además de multiplicarlos por 2, le sumamos 1 al resultado, la misma secuencia sería:

$$34/2 = 17, 2 \cdot 17 + 1 = 35, 2 \cdot 35 + 1 = 71, 2 \cdot 71 + 1 = 143, \dots \text{ una progresión infinita de elementos impares. Las raíces digitales: } 7, 8, 8, 8, 8, \dots$$

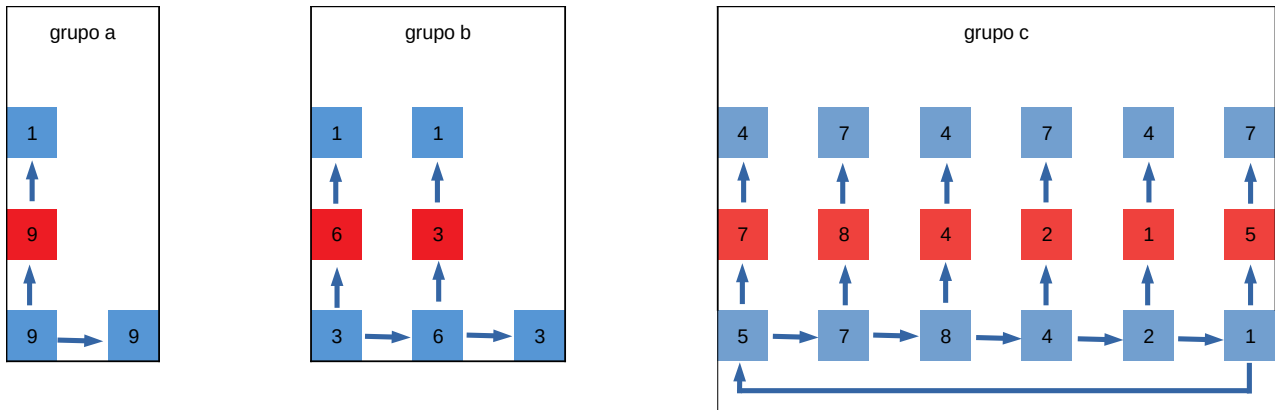
Si dividimos entre 2 a los elementos pares y a los impares los multiplicamos por 3 y le sumamos 1 al resultado, la secuencia obtenida es:

$$34/2 = 17, 3 \cdot 17 + 1 = 52, 52/2 = 26, 26/2 = 13, 3 \cdot 13 + 1 = 40, 40/2 = 20, 20/2 = 10, 10/2 = 5, 3 \cdot 5 + 1 = 16, 16/2 = 8, 8/2 = 4, 4/2 = 2, 2/2 = 1, 3 \cdot 1 + 1 = 4, 4/2 = 2, 2/2 = 1, \dots$$

La sucesión de sus raíces digitales: 7, 8, 7, 8, 4, 4, 2, 1, 5, 7, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... los últimos elementos 4, 2, 1 se repiten de manera infinita.

Según la Conjetura de Collatz, esto ocurre con cualquier sucesión obtenida con estas dos operaciones.

Los valores del gráfico son los subconjuntos y los valores de las raíces digitales de los elementos que contienen. Los elementos pares en azul y los impares en rojo.

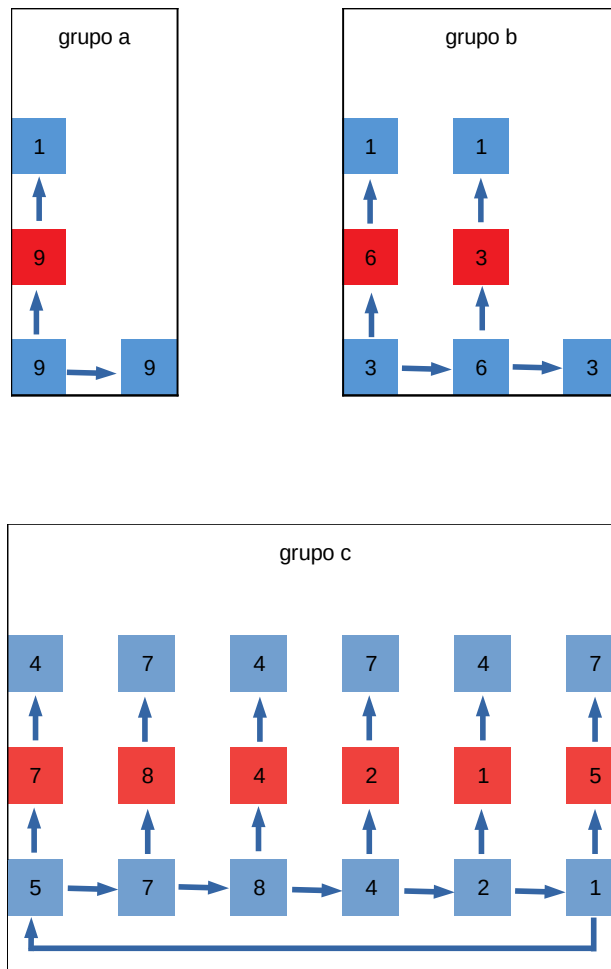


Los números pares con raíz digital 3 y 6 cambian de subconjunto entre ellos, es decir, los números pares con raíz digital 3 cambian a un número par del subconjunto de los números con raíz digital 6 y viceversa. Los elementos impares de ambos subconjuntos cambian a un elemento par del subconjunto de los números con raíz digital 1.

Los cambios de los elementos pares:

Los elementos del subconjunto 5 pueden cambiar a otro elemento, par o impar, del subconjunto 7.
 Los elementos del subconjunto 7 pueden cambiar a otro elemento, par o impar, del subconjunto 8.
 Los elementos del subconjunto 8 pueden cambiar a otro elemento, par o impar, del subconjunto 4.
 Los elementos del subconjunto 4 pueden cambiar a otro elemento, par o impar, del subconjunto 2.
 Los elementos del subconjunto 2 pueden cambiar a otro elemento, par o impar, del subconjunto 1.
 Los elementos del subconjunto 1 pueden cambiar a otro elemento, par o impar, del subconjunto 5.

Los elementos del subconjunto 7 cambian a un elemento par del subconjunto 4.
 Los elementos del subconjunto 8 cambian a un elemento par del subconjunto 7.
 Los elementos del subconjunto 4 cambian a un elemento par del subconjunto 4.
 Los elementos del subconjunto 2 cambian a un elemento par del subconjunto 7.
 Los elementos del subconjunto 1 cambian a un elemento par del subconjunto 4.
 Los elementos del subconjunto 5 cambian a un elemento par del subconjunto 7.
 Los elementos del grupo a y del grupo b , que forman los subconjuntos $rd(9)$, $rd(3)$ y $rd(6)$, cambian siempre a un elemento par del subconjunto $rd(1)$, momento en el que entran en el grupo c .



El recorrido de los elementos del grupo c es el siguiente:

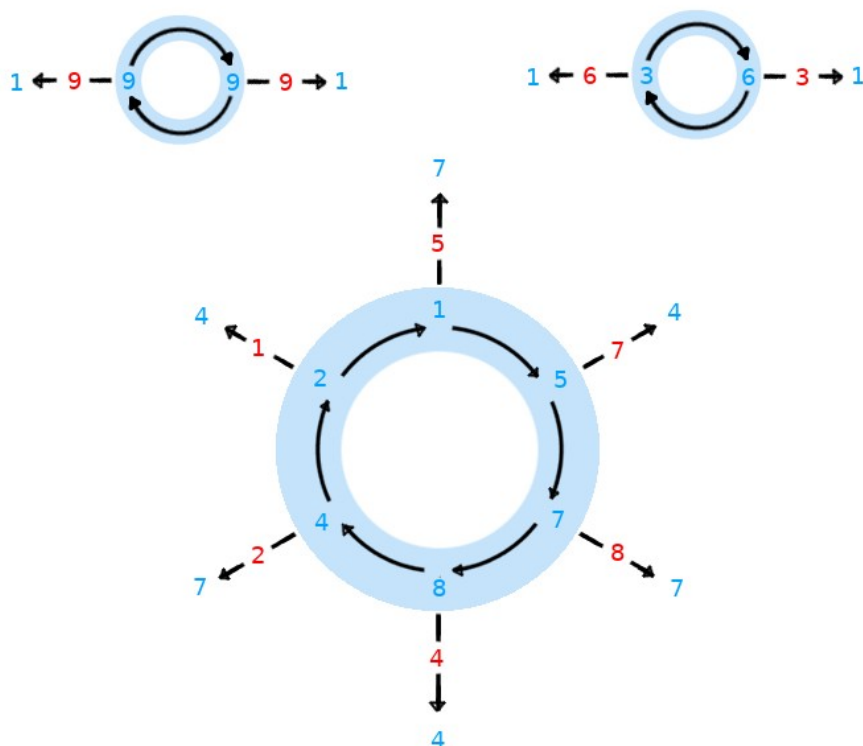
Un elemento par $rd(7)$ puede volver a par $rd(7)$, después de haber cambiado a impar $rd(8)$, o cambiar a par $rd(8)$ y éste siempre cambia a par $rd(4)$, que puede volver a par $rd(7)$ o cambiar a par $rd(2)$, que puede volver a par $rd(4)$ o cambiar a par $rd(1)$, que puede volver a par $rd(7)$ o cambiar a par $rd(5)$, que puede volver a par $rd(4)$ o a par $rd(7)$, . . .

Los elementos del grupo c, que forman los subconjuntos $rd(5)$, $rd(7)$, $rd(8)$, $rd(4)$, $rd(2)$ y $rd(1)$, cambian siempre a un elemento par del subconjunto $rd(7)$, en un ciclo cerrado sin final.

Este elemento par del subconjunto $rd(7)$ es el que conduce a todos los demás hasta un elemento par del subconjunto $rd(4)$, $rd(2)$ y $rd(1)$ y lo hará las veces necesarias hasta llegar a sus elementos menores 4, 2, 1.

Otro gráfico que representa a los tres grupos del conjunto, con los cambios posibles de los elementos en cada iteración.

Los valores del gráfico representan la raíz digital de los números y su transformación en cada iteración en el sentido de las flechas.



Esta es una secuencia empezada con el número 27 con sus elementos pares del subconjunto $rd(7)$ resaltados a color. Debajo de cada elemento, el subconjunto $rd(n)$ a que pertenece.

27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137,
 9 1 5 7 8 4 4 2 7 8 7 8 7 8 7 8 4 4 2 1 4 2

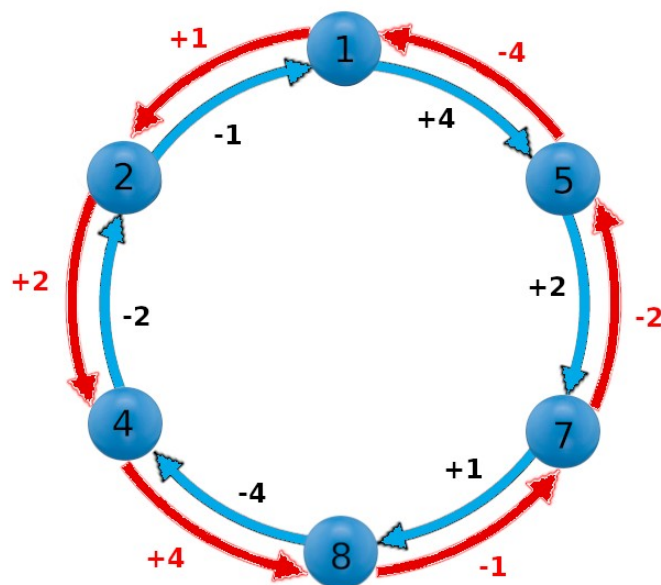
412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445,
 7 8 4 4 2 7 8 7 8 4 4 2 7 8 7 8 7 8 4

1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438,
 4 2 1 5 7 8 7 8 7 8 4 4 2 7 8 4 4 2 7

719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154,
 8 7 8 7 8 7 8 7 8 4 2 7 8 7 8 7

3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184,
 8 7 8 4 2 1 4 2 1 4 2 1 4 2 1 5 7 4

92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
 2 1 5 7 8 7 8 7 8 4 2 1 5 7 8 4 2 1



Iteraciones de los números, representados por su raíz digital.
 En sentido horario cuando son divididos entre 2 y en sentido
 antihorario cuando son multiplicados por 2.
 En cada ciclo completo, tanto de división, como de multiplicación,
 se ganan 7 números y se pierden 7 números: 4, 2 y 1.

Ejemplos de iteraciones por divisiones entre 2:

Número 1000 500 250 125 62,5 31,25 15,625

1000-500-250-125-62,5-31,25-15,625=15,625

Número 6598 3299 1649,5 824,75 412,375 206,1875 103,09375

6598-3299-1649,5-824,75-412,375-206,1875-103,09375=103,09375

Raíz digital 1 5 7 8 4 2 1

1+4+2+1-4-2-1=1

Ejemplo de iteraciones por multiplicaciones entre 2:

Número 10 20 40 80 160 320 640

$10+10+20+40+80+160+320=640$

Raíz digital 1 2 4 8 7 5 1

$1+1+2+4-1-2-4=1$

XII LA CONJETURA DE COLLATZ

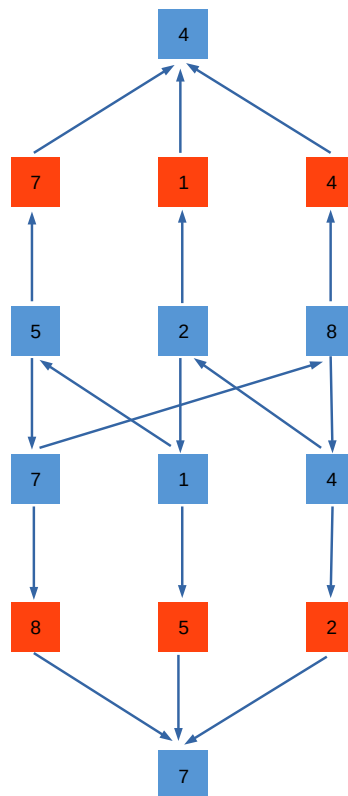
Orden y armonía en los números de las secuencias.

Miguel Cerdá Bennassar – Marzo 2021

Continuación de los escritos III, IV, V, VI y VII sobre la raíz digital de los números.

secuencia	25	76	38	19	58	29	88	44	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1
raíz digital	7	4	2	1	4	2	7	8	4	2	7	8	7	8	4	4	2	1	5	7	8	4	2	1
	impares	pares																						

Los números de una secuencia formada con el algoritmo de la conjetura de Collatz iteran siempre igual según el valor de su raíz digital, siguiendo este mismo patrón:



El número 1 es el menor de los números impares con raíz digital 1 y solamente los números pares con raíz digital 2 iteran a ellos.

A los números pares con raíz digital 2 solamente iteran los números pares con raíz digital 4.

A los números pares con raíz digital 4 pueden iterar los números pares con raíz digital 8 y los números impares con raíces digitales 1, 4 y 7.

Los números pares con raíz digital 8 pueden iterar también a números impares con raíz digital 4, pero éstos iteran solamente a números pares con raíz digital 4.

Las iteraciones a un número impar con raíz digital 1 siempre son así:

8	4	2	1	
o también				
8	4	4	2	1

Por esta causa, todas las secuencias llegan al número 16 antes de llegar al número 1, ya que los números pares con raíz digital 7 iteran únicamente a números pares con raíz digital 8. Los números impares con raíz digital 8 iteran a números pares con raíz digital 7 y éstos a números pares con raíz digital 8.

Se puede considerar a los números pares con raíz digital 7 como el inicio del descenso de las secuencias hasta el número 1, porque aunque la cantidad de números de cada raíz digital es similar, en las secuencias de la conjetura de Collatz no es así y siempre hay mayor cantidad de números con raíz digital 8, como son todos los números a partir de la tercera columna de este triángulo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
6																
13	20															
27	41	62														
55	83	125	188													
111	167	251	377	566												
223	335	503	755	1133	1700											
447	671	1007	1511	2267	3401	5102										
895	1343	2015	3023	4535	6803	10205	15308									
1791	2687	4031	6047	9071	13607	20411	30617	45926								
3583	5375	8063	12095	18143	27215	40823	61235	91853	137780							
7167	10751	16127	24191	36287	54431	81647	122471	183707	275561	413342						
14335	21503	32255	48383	72575	108863	163295	244943	367415	551123	826685	1240028					
28671	43007	64511	96767	145151	217727	326591	489887	734831	1102247	1653371	2480057	3720086				
57343	86015	129023	193535	290303	435455	653183	979775	1469663	2204495	3306743	4960115	7440173	11160260			
114687	172031	125047	387071	580607	870911	1306367	1959551	2939327	4408991	6613487	9920231	14880347	22320521	33480782		
229375	344063	516095	774143	1161215	1741823	2612735	3919103	5878655	8817983	13226975	19840463	29760695	44641043	66961565	100442348	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Este triángulo representa el inicio de las secuencias empezadas con cualquiera de sus números, con la fórmula $(3n+1)/2$. (ver mis escritos anteriores I y II).

Un ejemplo de secuencia empezada con el número 15, de la columna 1, fila 5, que tiene sus 5 primeros números: 15, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

[illegible]

La continuación de esta secuencia por los dos triángulos siguientes, hasta el 1.

[illegible]

VII. LA CONJETURA DE COLLATZ.

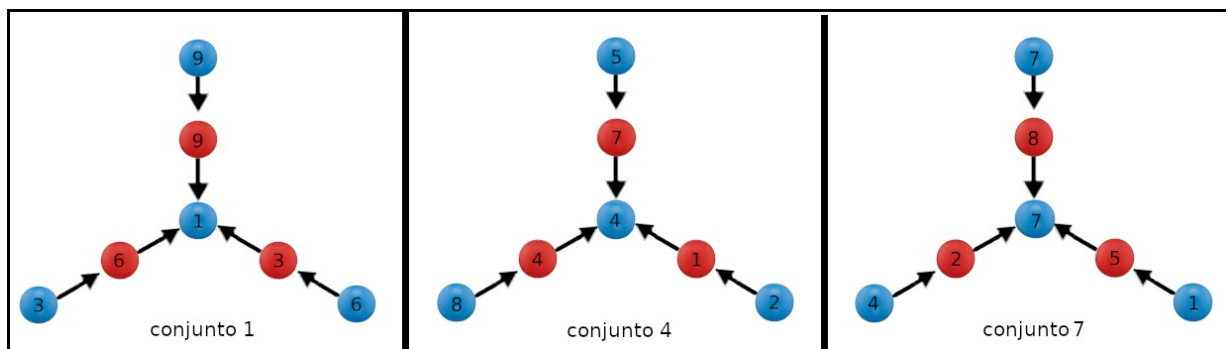
Orden y armonía en los números de las secuencias.

Miguel Cerdá Bennassar – Septiembre de 2020

Los nodos de color azul representan grupos de números pares, clasificados según el valor de su raíz digital y los de color rojo, grupos de números impares, clasificados del mismo modo.

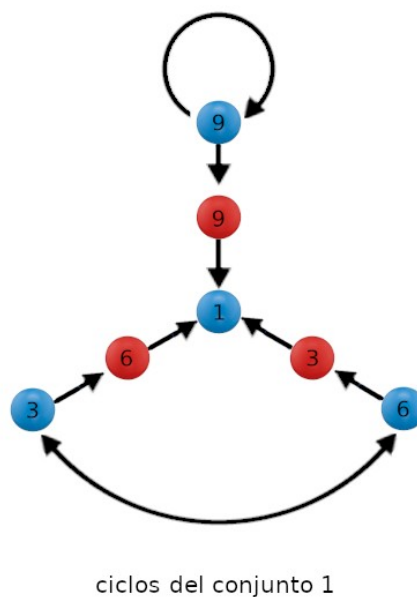
Llamamos a estos grupos $rd(n)$, vértices con sus aristas que indican la dirección de las iteraciones.

Todos los números impares de una secuencia de Collatz iteran a números pares de $rd(1)$, $rd(4)$ y $rd(7)$. Los tres conjuntos representan las iteraciones de los números en una secuencia de Collatz, cuando de la función aplicada a un número par resulta un número impar y aplicada a un número impar, resulta un número par.

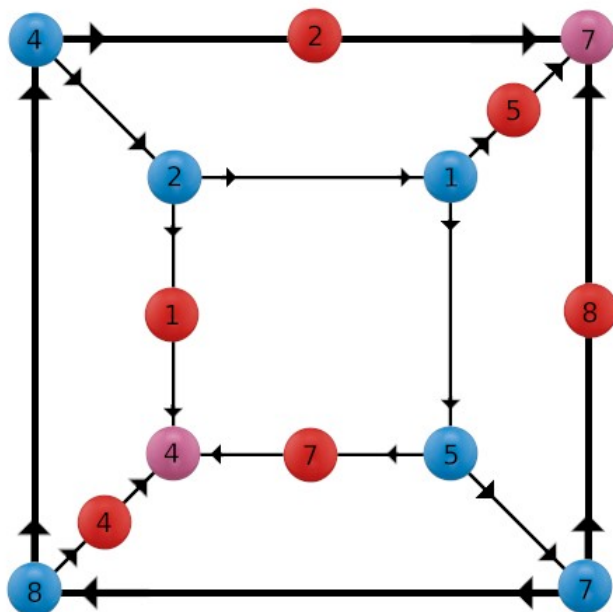
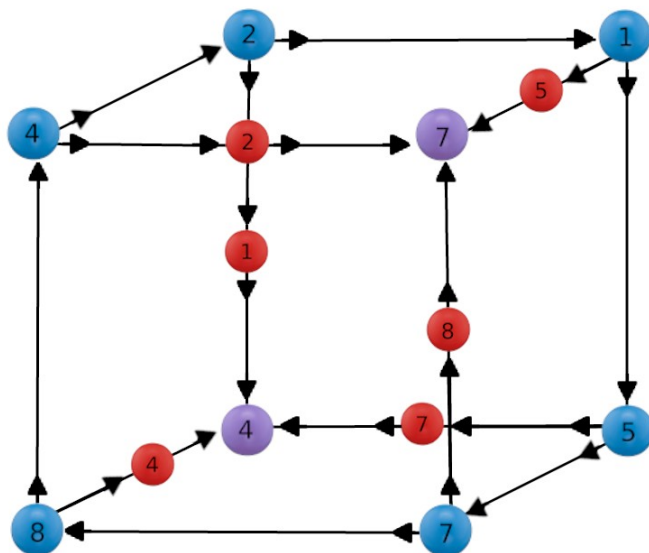


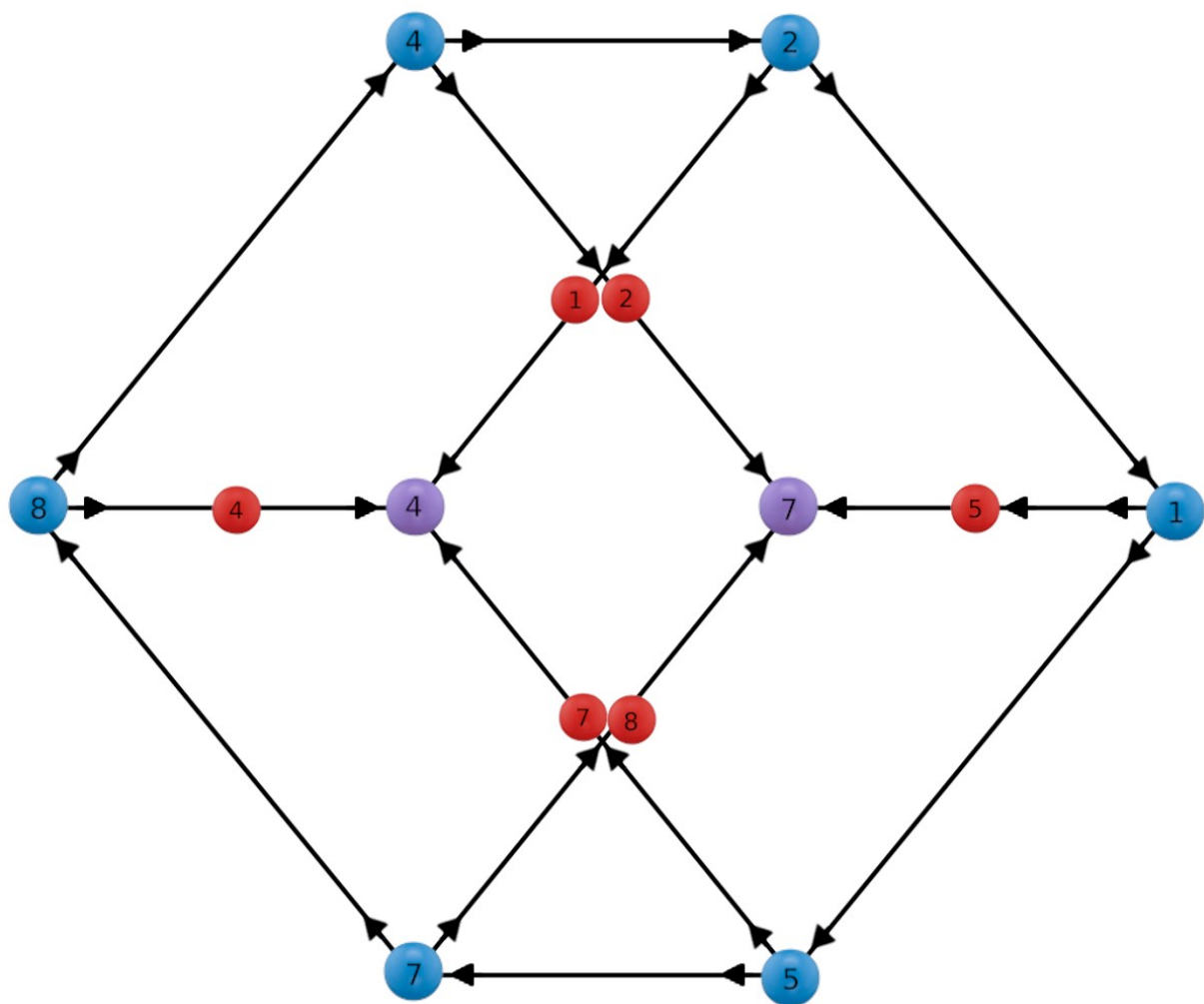
El siguiente diagrama representa los ciclos que siguen los números del conjunto 1 en sus iteraciones. Un ciclo es el que siguen las iteraciones de los números del grupo $rd(9)$ y el otro ciclo el de los números de los grupos $rd(3)$ y $rd(6)$. Los números pares de $rd(3)$ y de $rd(6)$ iteran entre ellos y los números pares de $rd(9)$ con números pares de su mismo grupo. Todos los números impares de $rd(3)$, $rd(6)$ y $rd(9)$ iteran a números pares de $rd(1)$.

Estos números no iteran con los de los conjuntos 4 y 7 y solamente pueden formar parte de una secuencia de Collatz si se ha empezado con uno de ellos y estarán hasta que salga el primer número impar, que después de iterar a un número par de $rd(1)$, la secuencia entrará en el ciclo principal.

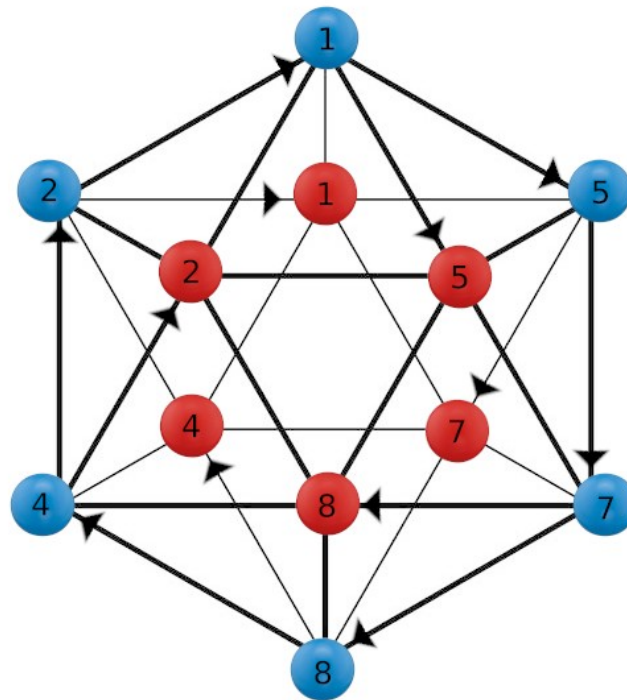


Otras visualizaciones del ciclo anterior :

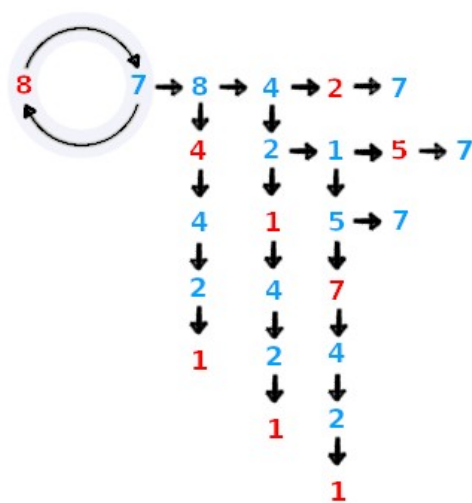


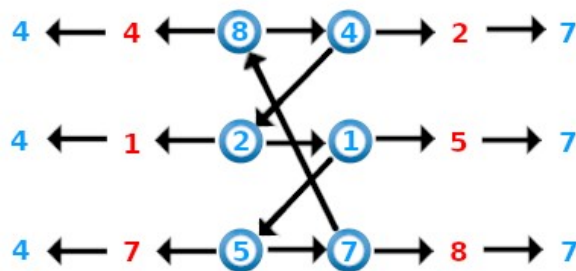
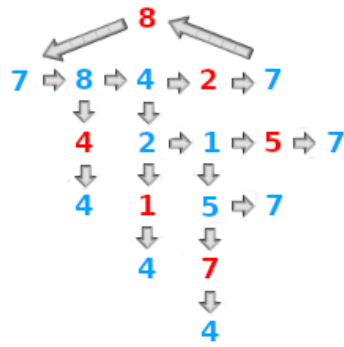


En el siguiente diagrama los grupos están en los 12 vértices de un icosaedro regular y 12 de sus aristas señalan la dirección de las iteraciones de los números de cada grupo.
 No están las iteraciones de los números impares a los números pares de los grupos $rd(4)$ y $rd(7)$.
 Los números impares de los grupos $rd(1)$, $rd(4)$ y $rd(7)$ iteran a los números pares del grupo $rd(4)$ y los números impares de los grupos $rd(2)$, $rd(5)$ y $rd(8)$ lo hacen a los números pares del grupo $rd(7)$.



Algunos gráficos del mismo ciclo, que siguen los números de los conjuntos 4 y 7





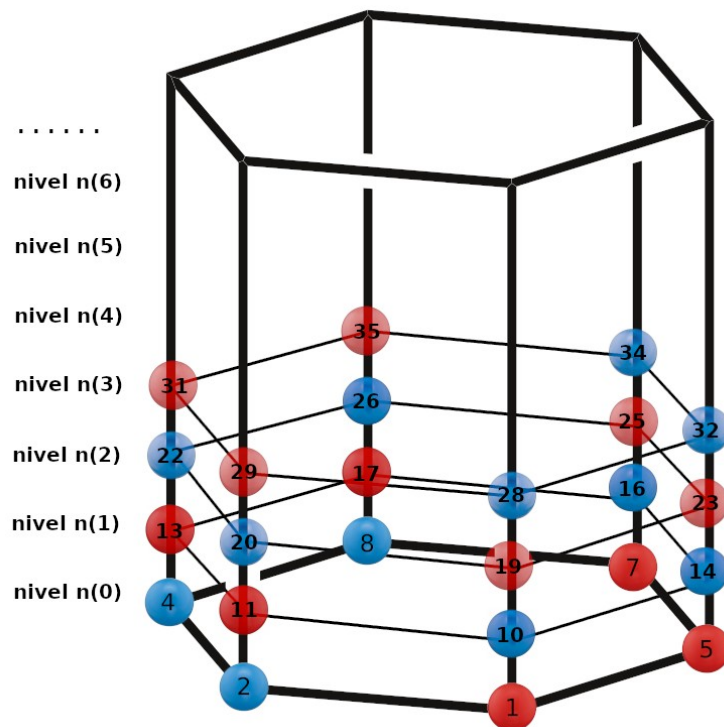
Todas las iteraciones de los números impares devuelven la secuencia a un número par del grupo $rd(4)$. También las que van al grupo $rd(7)$ de números pares, porque éstos solo pueden iterar al grupo $rd(8)$ de números pares y éstos al grupo $rd(4)$ de los números pares, con lo que todos los números impares llegan al grupo $rd(4)$ de los números pares. Las opciones de iteración de los números de este grupo son dos: iterar al grupo $rd(2)$ de números pares o al grupo $rd(2)$ de números impares, pero en este caso, la iteración volvería de nuevo al grupo $rd(4)$ a través del grupo $rd(7)$. Las iteraciones se repetirán hasta que el número par del grupo $rd(2)$ itere al menor de los números del grupo de impares $rd(1)$.

Son los números pares los que siguen el ciclo y en cada iteración son reducidos a la mitad de su valor. Los números impares, que son los que provocan las oscilaciones ascendentes de las secuencias, también provocan que la secuencia entre una y otra vez en ese ciclo cerrado hasta que queda atrapada en el bucle 4, 2, 1.

En los grupos, los números se encuentran en diferentes niveles.

Imaginemos los grupos $rd(n)$ de los números en un prisma hexagonal y que son objetos físicos, partículas en movimiento que van de un grupo a otro y a diferentes niveles, en cada iteración.

Gráfico 3D en el que puede haber tantos niveles como números, con los seis grupos $rd(n)$ en las aristas del prisma y sus números pares e impares.



La siguiente tabla clasifica a los números naturales que participan en una secuencia de Collatz después del primer impar de la misma (no están los múltiplos de 3). El valor de (n) indica el nivel de los números de su columna.

	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	..
Números con raíz digital 8	$9n+8$	8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	..
Números con raíz digital 4	$9n+4$	4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	..
Números con raíz digital 2	$9n+2$	2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173	..
Números con raíz digital 1	$9n+1$	1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154	163	172	..
Números con raíz digital 5	$9n+5$	5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	..
Números con raíz digital 7	$9n+7$	7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	160	169	178	..

Ejemplos: El número 136 está en el nivel $n(15)$ del grupo de números pares $rd(1)$.

El número 169 está en el nivel $n(18)$ del grupo de números impares $rd(7)$.

Los cambios de nivel que experimentan los números de una secuencia de Collatz suceden de la siguiente forma:

Los números pares $p(n \text{ par})$ iteran a un número del nivel $(n/2)$ y $p(n \text{ impar})$ iteran a un número del nivel $((n-1)/2)$.

Los números impares k , que están en el nivel $k/9$ iteran a un número par $p(k/3)$, y éste itera a otro número par $p(k/6)$.

Resultados teniendo en cuenta el cociente, sin los decimales.

Ejemplos:

El número 47 del nivel $n(5)$ sube al nivel $a(1/3*b) = a(15)$ y éste baja al nivel $a(1/2*1/3*b-1) = b(7)$.
 $B=67$ del nivel $b(7)$ sube al nivel $a(1/3*b) = a(22)$ y éste baja al nivel $a(1/2*1/3*b) = b(11)$.
 Aproximadamente es $3/2$ de subida real.

Una particularidad con los números 3, 6 y 9:

La secuencia empezada con el número 100. Debajo de los números está el grupo en el que está n los números $rd(n)$, en azul los números pares y en rojo los números impares. Y debajo de ellos están los valores de los niveles en los que están los números en cada grupo. Ejemplo: El número 88 está en el nivel 9 del grupo de los números pares $rd(7)$.

100, 50, 25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
 1 5 7 4 2 1 4 2 7 8 4 2 7 8 7 8 4 4 2 1 5 7 8 4 2 1
 11 5 2 8 4 2 6 3 9 4 2 1 3 1 5 2 1 4 2 1 0 1 0 0 0 0

Al dividir a los números impares entre 9, 3 y 6, se obtienen los valores de los niveles que ocupan el número impar y los dos siguientes, respectivamente. La parte entera del resultado, sin los decimales.

25/9=2,77	↓	19/9=2,11	↓	29/9=3,22	↓	11/9=1,22	↓	17/9=1,88	↓	13/9=1,44	↓	5/9=0,55
25/3=8,33	↓	19/3=6,33	↓	29/3=9,66	↓	11/3=3,66	↓	17/3=5,66	↓	13/3=4,33	↓	5/3=1,66
25/6=4,16	↓	19/6=3,16	↓	29/6=4,83	↓	11/6=1,83	↓	17/6=2,83	↓	13/6=2,16	↓	5/6=0,83

Si k es un número impar, $k/9$ itera a $k/3$ y éste a $k/6$. El número 29 de la secuencia anterior itera al número 88 y 44.
 Si k es un número par, $k/9$ itera a $k/18$. El número 88 de la secuencia anterior, que está en el nivel 9, itera al número 44 en el nivel 4.

Otras secuencias y los niveles de los números:

65, 196, 98, 49, 148, 74, 37, 112, 56, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
 7 21 10 5 16 8 4 12 6 3 1 0 2 1 3 1 5 2 1 4 2 1 0 1 0 0 0 0

Niveles de la secuencia: 21, 16, 12, 10, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0
 Cantidad de números: 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 3 6 6

93, 280, 140, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
 10 31 15 7 3 12 5 17 8 4 2 1 0 1 0 0 0 0

Niveles de la secuencia: 31, 17, 15, 12, 10, 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1, 0
 Cantidad de números: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 5

79, 238, 119, 358, 179, 538, 269, 808, 404, 202, 101, 304, 152, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11,
 8 26 13 39 19 59 29 89 44 22 11 33 16 8 4 2 6 3 9 4 2 1

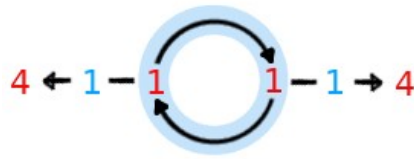
34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
 3 1 5 2 1 4 2 1 0 1 0 0 0 0

Niveles de la secuencia: 89, 59, 44, 39, 33, 29, 26, 22, 19, 16, 13, 11, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0
 Cantidad de números: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 3 2 4 5 5

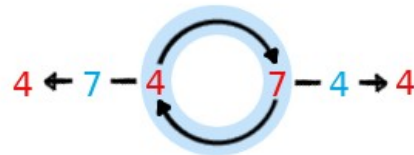
Destaca la escasa cantidad de números que ocupan los niveles superiores, mientras que los niveles inferiores son los que tienen mayor cantidad de números.

Miguel Cerdá Bennassar – Mayo 2021.

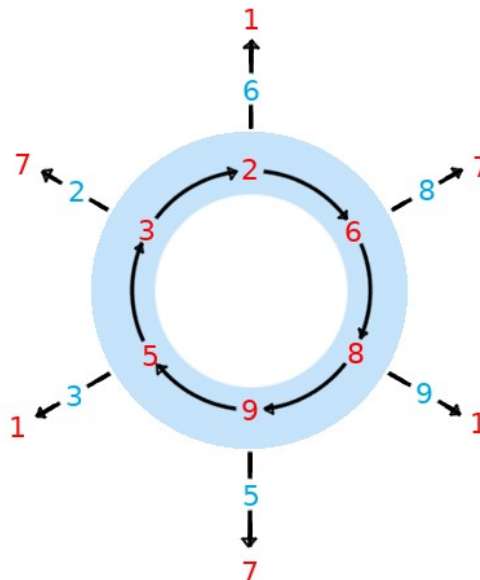
Iteraciones de los números pares e impares con raíz digital 1:



Iteraciones de los números pares e impares con raíz digital 4 y 7:



Los demás números iteran según el gráfico siguiente:



En estos gráficos comprobamos que todos los números, pares e impares, acaban iterando a números con raíz digital 4 y 7, momento en que las secuencias entran en el ciclo del segundo gráfico, del que ya nunca saldrán. Las divisiones entre 2 a las que son sometidos todos los números impares, llevarán a las secuencias hasta el menor de los números impares con raíz digital 4, el 13, entrando en un bucle infinito con el 7 y el 4 y esto lo harán todas las secuencias empezadas con cualquier número natural.

Cambiando el algoritmo de la conjetura de Collatz y aplicando $3n+1$ a los números pares, las secuencias también quedan atrapadas en un bucle infinito con tres números: 13, 7 y 4. ($3n+1$ a los números 4, 2, 1).

Un calculador de estas secuencias en <http://www.riodena.com/Dosena5.php>

A continuación reproduzco mi escrito n.º VI, de Agosto de 2020, que plantea las iteraciones de los números de las secuencias formadas con el algoritmo de la conjetura de Collatz, según el valor de su raíz digital.

VI. LA CONJETURA DE COLLATZ

Orden y armonía en los números de la secuencia

por Miguel Cerdá Bennassar – Agosto de 2020.

Todas las secuencias formadas con la función de Collatz llegan siempre al número 16, y es después de 4 iteraciones más, que llegan al número 1. ¿Porqué todas las secuencias llegan hasta el número 16? Este número puede resultar del número 32 o del número 5. Los dos son números de la forma $9n+5$ y ambos tienen la misma raíz digital $dr(5)$. El número 16 es de la forma $9n+7$ y su raíz digital es $dr(7)$.

En la siguiente tabla, los números clasificados en filas, según el valor de su raíz digital (columna 0).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	...
$9n+8$	8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	188	197	206	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296	305	314	323	332	341	350	359	...
$9n+6$	6	15	24	33	42	51	60	69	78	87	96	105	114	123	132	141	150	159	168	177	186	195	204	213	222	231	240	249	258	267	276	285	294	303	312	321	330	339	348	357	...
$9n+4$	4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	229	238	247	256	265	274	283	292	301	310	319	328	337	346	355	...
$9n+2$	2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173	182	191	200	209	218	227	236	245	254	263	272	281	290	299	308	317	326	335	344	353	...
$9n+1$	1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154	163	172	181	190	199	208	217	226	235	244	253	262	271	280	289	298	307	316	325	334	343	352	...
$9n+3$	3	12	21	30	39	48	57	66	75	84	93	102	111	120	129	138	147	156	165	174	183	192	201	210	219	228	237	246	255	264	273	282	291	300	309	318	327	336	345	354	...
$9n+5$	5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	185	194	203	212	221	230	239	248	257	266	275	284	293	302	311	320	329	338	347	356	...
$9n+7$	7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205	214	223	232	241	250	259	268	277	286	295	304	313	322	331	340	349	358	...
$9n+9$	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270	279	288	297	306	315	324	333	342	351	360	...

En la siguiente tabla, los números pares, clasificados de igual forma.

Números pares con raíz digital 7	$2(9n+8)$	16	34	52	70	88	106	124	142	160	178	196	214	232	250	268	286	304	322	340	358	...
Números pares con raíz digital 3	$2(9n+6)$	12	30	48	66	84	102	120	138	156	174	192	210	228	246	264	282	300	318	336	354	...
Números pares con raíz digital 8	$2(9n+4)$	8	26	44	62	80	98	116	134	152	170	188	206	224	242	260	278	296	314	332	350	...
Números pares con raíz digital 4	$2(9n+2)$	4	22	40	58	76	94	112	130	148	166	184	202	220	238	256	274	292	310	328	346	...
Números pares con raíz digital 2	$2(9n+1)$	2	20	38	56	74	92	110	128	146	164	182	200	218	236	254	272	290	308	326	344	...
Números pares con raíz digital 6	$2(9n+3)$	6	24	42	60	78	96	114	132	150	168	186	204	222	240	258	276	294	312	330	348	...
Números pares con raíz digital 1	$2(9n+5)$	10	28	46	64	82	100	118	136	154	172	190	208	226	244	262	280	298	316	334	352	...
Números pares con raíz digital 5	$2(9n+7)$	14	32	50	68	86	104	122	140	158	176	194	212	230	248	266	284	302	320	338	356	...
Números pares con raíz digital 9	$2(9n+9)$	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	...

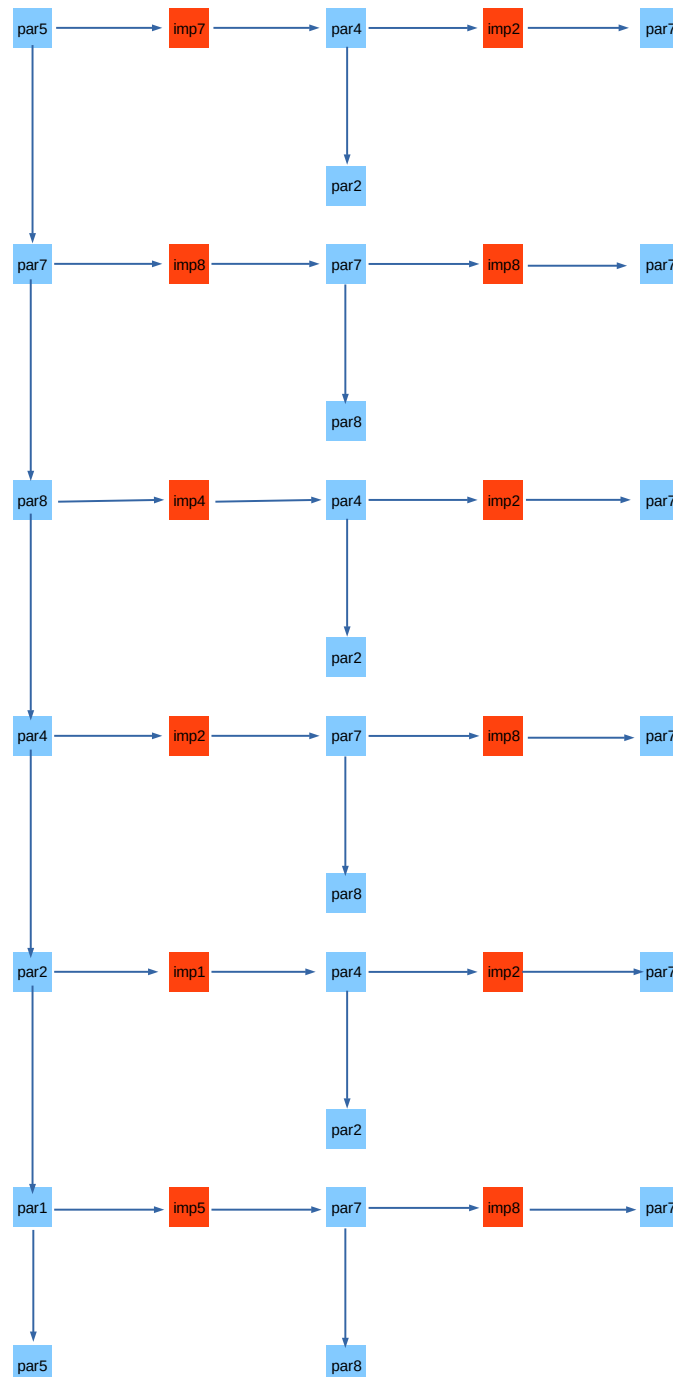
Los números pares de la forma $9n+8$, $dr(8)$ llegan a los números de la forma $9n+4$, $dr(4)$
 Los números pares de la forma $9n+3$, $dr(3)$ llegan a los números de la forma $9n+6$, $dr(6)$
 Los números pares de la forma $9n+4$, $dr(4)$ llegan a los números de la forma $9n+2$, $dr(2)$
 Los números pares de la forma $9n+2$, $dr(2)$ llegan a los números de la forma $9n+1$, $dr(1)$
 Los números pares de la forma $9n+6$, $dr(6)$ llegan a los números de la forma $9n+3$, $dr(3)$
 Los números pares de la forma $9n+1$, $dr(1)$ llegan a los números de la forma $9n+5$, $dr(5)$
 Los números pares de la forma $9n+5$, $dr(5)$ llegan a los números de la forma $9n+7$, $dr(7)$
 Los números pares de la forma $9n+7$, $dr(7)$ llegan a los números de la forma $9n+8$, $dr(8)$
 Los números pares de la forma $9n+9$, $dr(9)$ llegan a los números de la forma $9n+9$, $dr(9)$

Los números impares de la forma $9n+8$, $dr(8)$ llegan a los números de la forma $9n+7$, $dr(7)$
 Los números impares de la forma $9n+4$, $dr(4)$ llegan a los números de la forma $9n+4$, $dr(4)$
 Etc, etc, etc.

A partir de ahora y para simplificar el texto, serán sustituidas las formas de los números por el valor de su raíz digital $dr(n)$.

El siguiente gráfico representa la transformación de los números en cada iteración, según el valor de su raíz digital. Las flechas indican el sentido de las iteraciones.

(par5) en color azul, que representa a todos los números pares con raíz digital $dr(5)$, es el primer valor del gráfico, pero podría ser cualquier otro, porque los números se transforman iterando en un ciclo cerrado en el que los últimos números empiezan un nuevo ciclo. Por ejemplo, el valor (par1), en el último ciclo del gráfico, se transforma en (impar5), pero también en (par5), volviendo al principio.



Es básico observar en el gráfico que las transformaciones de los números impares en la primera iteración lo son a números pares $dr(4)$ y $dr(7)$ y en la siguiente iteración los $dr(4)$ son también $dr(7)$.

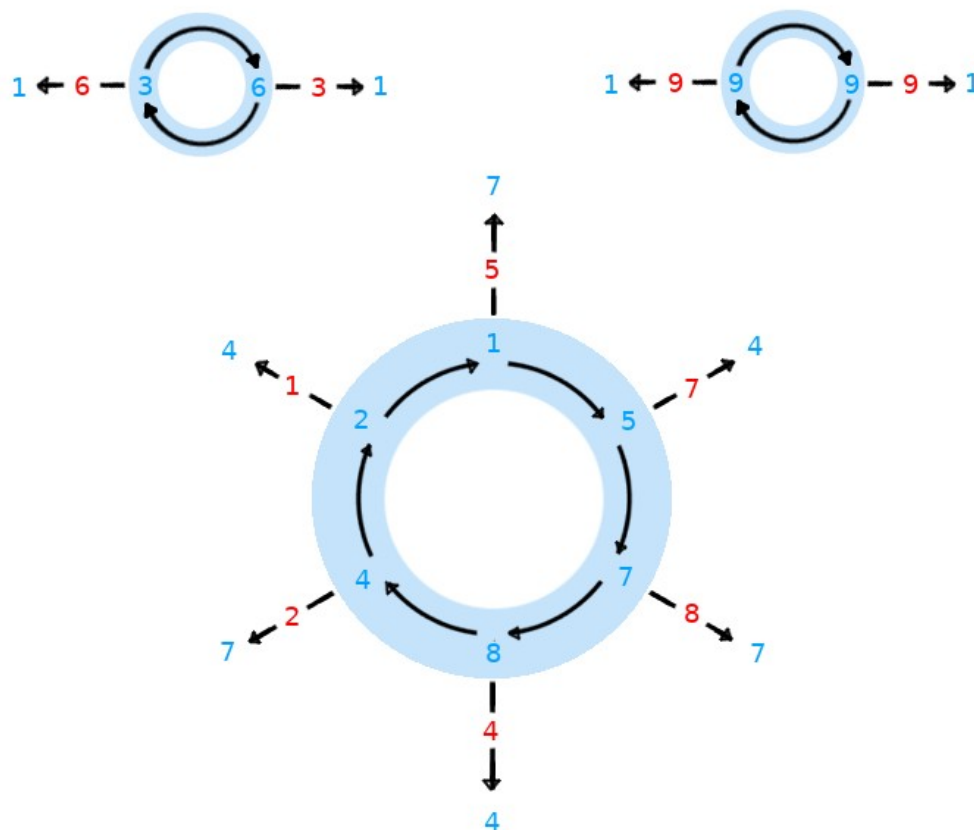
Si esos números pares, $dr(4)$ y $dr(7)$, iteran a un número par, resultan números pares $dr(2)$ y $dr(8)$ y en la siguiente iteración los $dr(8)$ son también $dr(2)$ y esos números iteran hasta que resulta un número par $dr(7)$.

Una singularidad de los números pares con raíz digital $dr(7)$ es que son los únicos números con una sola posibilidad de iterar y lo hacen a un número par $dr(8)$, ya que cuando iteran a un número impar $dr(8)$, éste vuelve a iterar a un número par $dr(7)$. En cambio la iteración de un número par $dr(8)$ es a un número par $dr(4)$, ya que cuando iteran a un número impar $dr(4)$, éste vuelve a iterar a un número par $dr(4)$.

La función de Collatz provoca que todos los números, pares e impares, en sus iteraciones se transformen en números pares con raíz digital $dr(7)$ y éstos iteren a otro número par con raíz digital $dr(8)$ y éstos a un número par con raíz digital $dr(4)$. En este punto la secuencia puede volver a un número par $dr(7)$ si $dr(4)$ itera a un número impar $dr(2)$ o llegar a un impar $dr(1)$ si itera a un número par $dr(2)$.

La respuesta a la pregunta del inicio de este escrito es que todas las secuencias de la función de Collatz llegan al número 16 porque todos los números se transforman en un número par con raíz digital $dr(7)$ y el menor de esos números es el 16.

El siguiente gráfico representa los tres ciclos en los que se mueven los números, según su raíz digital, al aplicarles la función de Collatz.

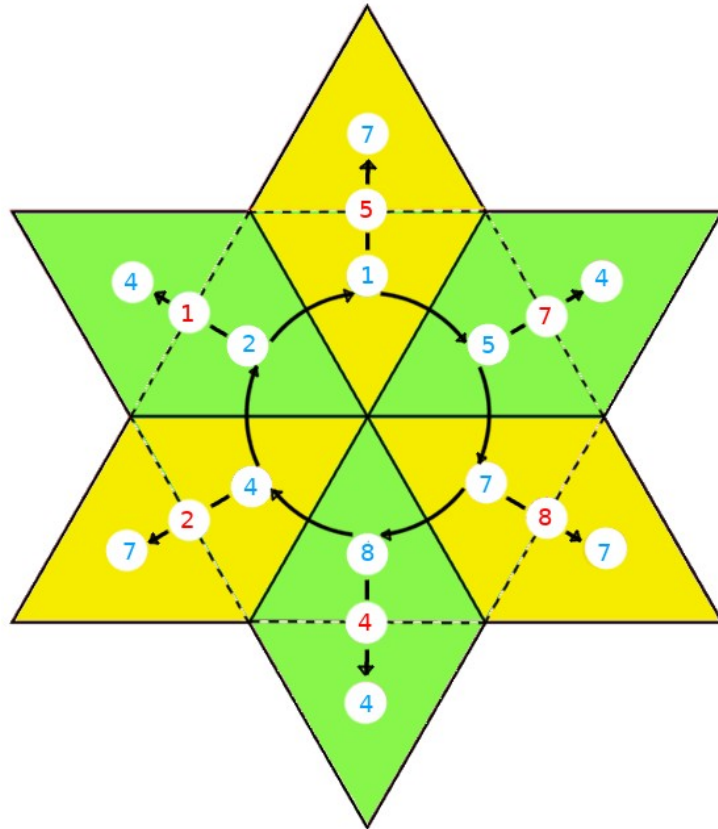


Los números pares $dr(3)$ y $dr(6)$ forman un ciclo cerrado en el que iteran de uno al otro o a números impares $dr(3)$ y $dr(6)$, que se transforman en números pares $dr(1)$ y entran en el ciclo general.

Los números pares $dr(9)$ iteran en solitario a otro número par $dr(9)$ o a un número impar $dr(9)$, transformándose en un número par $dr(1)$ y entrar en el ciclo general.

En el centro del gráfico se representa el ciclo general donde iteran los números pares e impares $dr(1)$, $dr(5)$, $dr(7)$, $dr(8)$, $dr(4)$ y $dr(2)$.

Todas las iteraciones de una secuencia de Collatz ocurren en un ciclo cerrado sin final, siguiendo el patrón del gráfico. Ciclo cerrado sin final porque la secuencia no acaba al llegar al número 1, sino que itera indefinidamente al 4, 2, 1, 4, 2, 1, . . . La infinitud de ese ciclo se constata en el gráfico, en el que se verifica también la imposibilidad de que pueda existir una secuencia con un período distinto de 4, 2, 1.



XIV. LA CONJETURA DE COLLATZ. Orden y armonía en los números de las secuencias.

Miguel Cerdá Bennassar – Junio 2021.

La raíz digital de un número es el valor que resulta de sumar todos los dígitos del número y los resultados sucesivos, hasta obtener un solo dígito. Por lo que las raíces digitales de los números en base 10 son los valores del 1 hasta el 9.

Como ejemplo, para calcular la raíz digital del número 458:
La suma de sus dígitos es $4+5+8=17$ y $1+7=8$. La raíz digital del número 458 es 8.

Propiedades de la raíz digital:

- Multiplicando cualquier número por 9, la raíz digital siempre será 9.
- Sumando 9 a cualquier número, no cambiará su raíz digital.
- Dividiendo cualquier número entre 9, la raíz digital del número será el resto.

Cuando sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos, las raíces digitales de los números también son sumadas, restadas, multiplicadas y divididas, respectivamente y la raíz digital puede ser utilizada para comprobar el resultado de la operación.

Ejemplos:

Sumando $456+786+34=1276 \rightarrow$ raíz digital $6+3+7=16$, $1+6=7$ y la raíz digital de 1276 es 7.
Restando $3465-670=2795 \rightarrow$ raíz digital $9-4=5$ y la raíz digital de 2795 es 5.
Multiplicando $879 \times 52=45708 \rightarrow$ raíz digital $6 \times 7=42$, $4+2=6$ y la raíz digital de 45708 es 6.
Dividiendo $89408:22=4064 \rightarrow$ raíz digital $2:4=0.5$, $0+5=5$ y la raíz digital de 4064 es 5.

También con operaciones mixtas:

Sumando y restando $675+57-14=718 \rightarrow$ raíz digital $9+3-5=7$ y la raíz digital de 718 es 7.
Multiplicando y sumando $52 \times 37+17=1941 \rightarrow$ raíz digital $7 \times 1+8=6$ y raíz digital de 1941 es 6.
Multiplicando, sumando y dividiendo $(3 \times 153+1):2=230 \rightarrow (3 \times 9+1):2=5$

La prueba del 9, para la verificación del producto de dos números, se basa en la raíz digital y consiste en la afirmación que la raíz digital del producto de dos números es la misma que el producto de las raíces digitales de los dos números.
Ejemplo: $356 \times 27=9612$. Las raíces digitales:
 $3+5+6=14$, $1+4=5$ y $2+7=9$. El producto es $5 \times 9=45$ y $4+5=9$ y 9 es la raíz digital de 9612.

En esta tabla, los números naturales colocados en filas, según su raíz digital:

1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154	163	172	181	190	199	208	217	226	235	244	253	262	271	280	289	298	307	316	325	334	343	352	...
2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173	182	191	200	209	218	227	236	245	254	263	272	281	290	299	308	317	326	335	344	353	...
3	12	21	30	39	48	57	66	75	84	93	102	111	120	129	138	147	156	165	174	183	192	201	210	219	228	237	246	255	264	273	282	291	300	309	318	327	336	345	354	...
4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	229	238	247	256	265	274	283	292	301	310	319	328	337	346	355	...
5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	185	194	203	212	221	230	239	248	257	266	275	284	293	302	311	320	329	338	347	356	...
6	15	24	33	42	51	60	69	78	87	96	105	114	123	132	141	150	159	168	177	186	195	204	213	222	231	240	249	258	267	276	285	294	303	312	321	330	339	348	357	...
7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205	214	223	232	241	250	259	268	277	286	295	304	313	322	331	340	349	358	...
8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	188	197	206	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296	305	314	323	332	341	350	359	...
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270	279	288	297	306	315	324	333	342	351	360	...

Los números naturales en el conjunto A, con nueve subconjuntos divididos en tres grupos, a, b y c.
Los elementos de los subconjuntos están agrupados según el valor de su raíz digital, rd(n).

$$A = \{rd(9), rd(3), rd(6), rd(5), rd(7), rd(8), rd(4), rd(2), rd(1)\}$$

Grupo a: $rd(9) = \{9, 18, 27, 36, 45, \dots\}$

Grupo b: $rd(3) = \{3, 12, 21, 30, 39, \dots\}$
 $rd(6) = \{6, 15, 24, 33, 42, \dots\}$

Grupo c: $rd(5) = \{5, 14, 23, 32, 41, \dots\}$
 $rd(7) = \{7, 16, 25, 34, 43, \dots\}$
 $rd(8) = \{8, 17, 26, 35, 44, \dots\}$
 $rd(4) = \{4, 13, 22, 31, 40, \dots\}$
 $rd(2) = \{2, 11, 20, 29, 38, \dots\}$
 $rd(1) = \{1, 10, 19, 28, 37, \dots\}$

Si a cualquier elemento de los 9 subconjuntos le aplicamos una o más de las operaciones básicas de la aritmética, el resultado es un elemento de otro subconjunto y si a cada nuevo elemento le aplicamos la misma operación, formamos una sucesión que será infinita o acotada, según las operaciones aplicadas.

El nuevo elemento obtenido puede pertenecer al mismo subconjunto, pero solo si la operación aplicada es sumar un múltiplo de 9 o si el elemento es del subconjunto $rd(9)$.

Podemos formar una secuencia infinita, multiplicando por 2 a un primer elemento y sucesivamente a cada resultado obtenido. Un ejemplo empezando con el número 13: $2 \cdot 13 = 26$, $2 \cdot 26 = 52$, $2 \cdot 52 = 104$, $2 \cdot 104 = 208$, $2 \cdot 208 = 416$, ... Si sustituimos los elementos por la raíz digital de cada uno de ellos, la sucesión es: 4, 8, 7, 5, 1, 2, ...

Si la operación que vamos a aplicar es sumar 6 al primer elemento:

$$6 + 13 = 19, 6 + 19 = 25, 6 + 25 = 31, 6 + 31 = 37, 6 + 37 = 43, \dots$$

y la sucesión de las raíces digitales de los elementos es: 4, 1, 7, 4, 1, 7, ...

Aplicando a los elementos una operación de sustracción o división, las secuencias serán acotadas.

Si dividimos entre 2 a los elementos pares y multiplicamos por 2 a los elementos impares, una sucesión empezada con el elemento 34 sería: $34/2 = 17$, $2 \cdot 17 = 34$, $34/2 = 17$, ... Los elementos 34 y 17 se repiten de manera infinita. Las raíces digitales: 7, 8, 7, 8, ...

Si a los elementos impares, además de multiplicarlos por 2, le sumamos 1 al resultado, la misma secuencia sería:

$$34/2 = 17, 2 \cdot 17 + 1 = 35, 2 \cdot 35 + 1 = 71, 2 \cdot 71 + 1 = 143, \dots \text{ una progresión infinita de elementos impares. Las raíces digitales: } 7, 8, 8, 8, 8, \dots$$

Si dividimos entre 2 a los elementos pares y a los impares los multiplicamos por 3 y le sumamos 1 al resultado, la secuencia obtenida es:

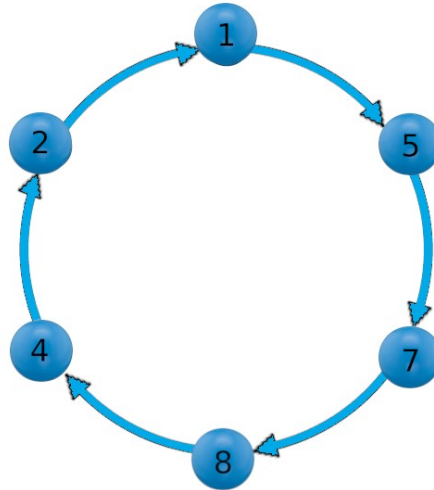
$$34/2 = 17, 3 \cdot 17 + 1 = 52, 52/2 = 26, 26/2 = 13, 3 \cdot 13 + 1 = 40, 40/2 = 20, 20/2 = 10, 10/2 = 5, 3 \cdot 5 + 1 = 16, 16/2 = 8, 8/2 = 4, 4/2 = 2, 2/2 = 1, 3 \cdot 1 + 1 = 4, 4/2 = 2, 2/2 = 1, \dots$$

La sucesión de sus raíces digitales: 7, 8, 7, 8, 4, 4, 2, 1, 5, 7, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ... los últimos elementos 4, 2, 1 se repiten de manera infinita.

Según la Conjetura de Collatz, esto ocurre con cualquier sucesión obtenida con estas dos operaciones.

La conjetura de Collatz y la raíz digital de los números de las secuencias.

El siguiente anagrama representa los valores de las raíces digitales de los números de los grupos 1, 4, 7 y 2, 5, 8 y sus transformaciones al ser divididos entre 2.

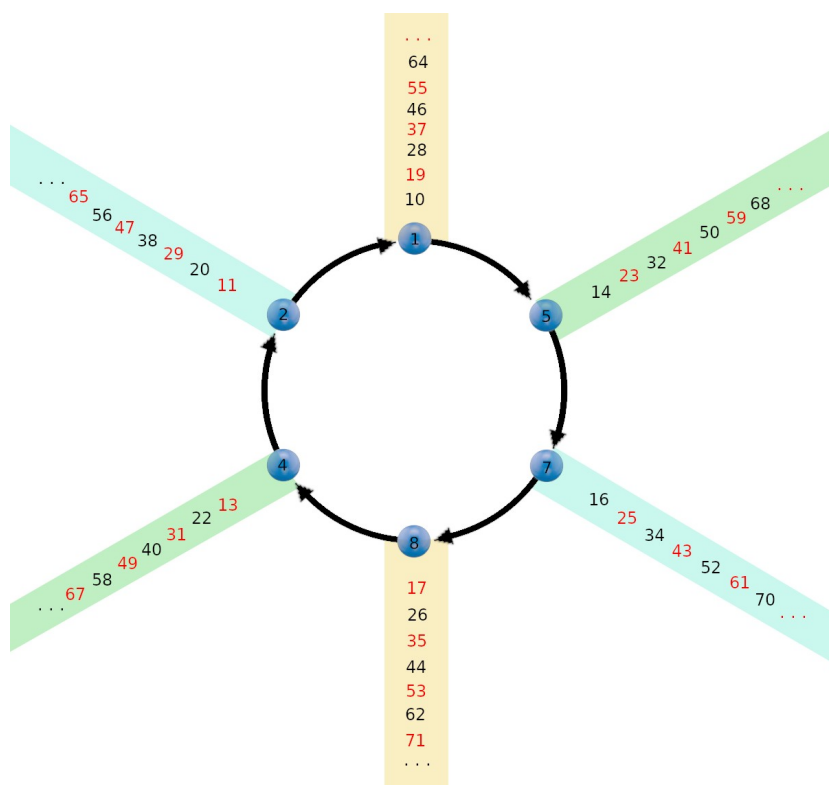


Ejemplo:

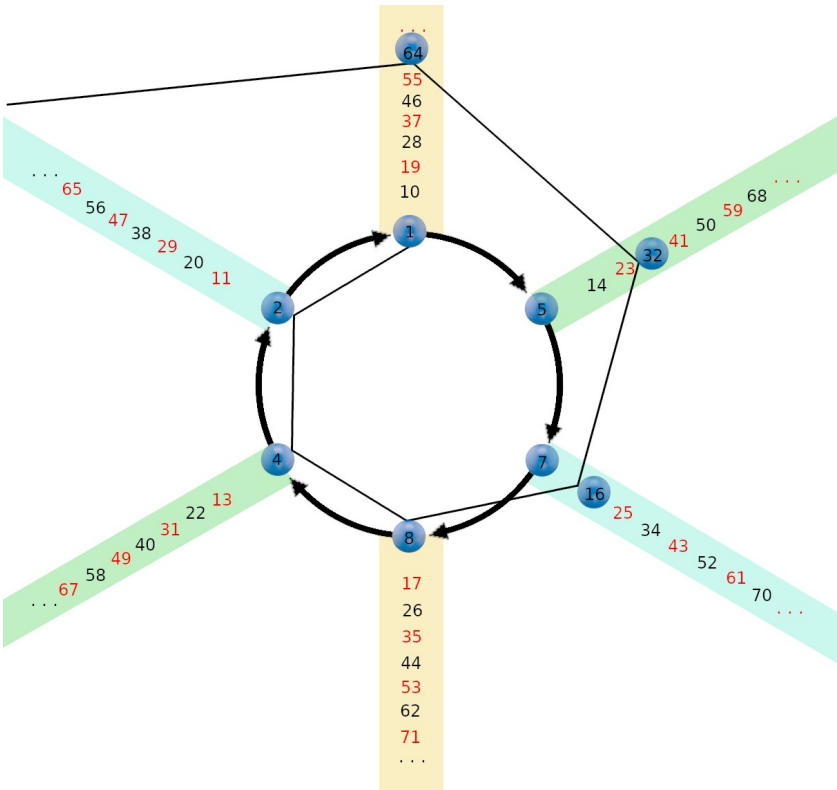
$10000 : 2 = 5000$
 $5000 : 2 = 2500$
 $2500 : 2 = 1250$
 $1250 : 2 = 625$
 $625 : 2 = 312.5$
 $312.5 : 2 = 156.25$

raíz digital 1 : $2 = 0.5 = 5$
 raíz digital 5 : $2 = 2.5 = 7$
 raíz digital 7 : $2 = 3.5 = 8$
 raíz digital 8 : $2 = 4$
 raíz digital 4 : $2 = 2$
 raíz digital 2 : $2 = 1$

El mismo anagrama con algunos de los números de cada grupo:



La trayectoria de los números 2^n al ser sometidos a sucesivas divisiones entre 2, hasta llegar al 1:



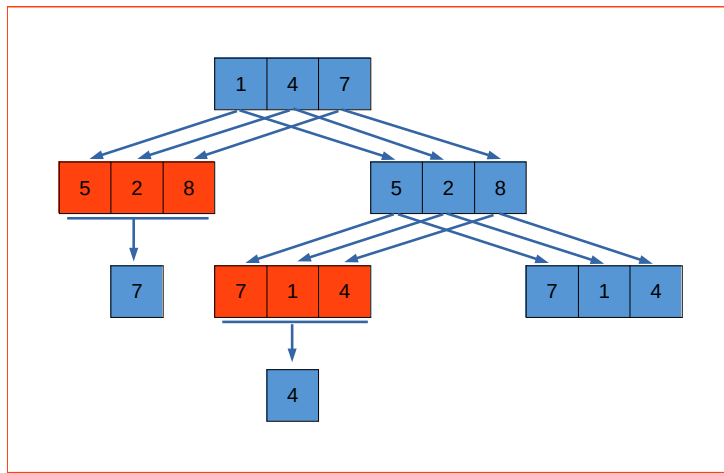
En el anagrama anterior, según la tabla de los niveles, el número 64 está en el nivel 8, el número 32 en el nivel 4, el número 16 en el nivel 2 y los números 8, 4, 2 y 1 en el nivel 1.

Según su raíz digital, los números se agrupan en tres grupos con los siguientes valores: (1-4-7), (2-5-8) y (3-6-9).

En la siguiente tabla, los números de los grupos (1, 4, 7) y (2, 5, 8), ordenados según su nivel n:

		n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	...
9n-1			8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	188	197	206	215	224	...
9n-5			4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	...
9n-7			2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173	182	191	200	209	218	...
9n-8			1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154	163	172	181	190	199	208	217	...
9n-4			5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	185	194	203	212	221	...
9n-2			7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205	214	223	...

Los números del grupo (3, 6, 9) no están en la tabla, porque no intervienen como elementos de las secuencias de Collatz, si bien pueden estar al inicio, hasta que el primer número impar es multiplicado por 3.



18n+17		17	35	53	71	89	107	125	143	161	179	197	215	233	251	269	287	305	323	341	359	377	395	413	431	449	467	485	503	521	539	557	575	593	611	629	647	665	...

Estos números los clasificamos formando una secuencia con los $36n+17$ y otra con los $36n+35$, en la tabla con el nivel que ocupan los números.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	...
nivel $4n+1$	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	73	77	81	85	89	93	97	101	105	109	113	117	121	125	129	133	137	141	145	...
$36n+17$	17	53	89	125	161	197	233	269	305	341	377	413	449	485	521	557	593	629	665	701	737	773	809	845	881	917	953	989	1025	1061	1097	1133	1169	1205	1241	1277	1313	...
nivel $4n+3$	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83	87	91	95	99	103	107	111	115	119	123	127	131	135	139	143	147	...
$36n+35$	35	71	107	143	179	215	251	287	323	359	395	431	467	503	539	575	611	647	683	719	755	791	827	863	899	935	971	1007	1043	1079	1115	1151	1187	1223	1259	1295	1331	...

En una secuencia de Collatz los números $36n+17$ iteran siempre de la misma forma: Un primer número par, resultado de aplicar $3n+1$. Un segundo número par, resultado de $(3n+1)/2$ y un tercer número, par o impar, resultado de $(3n+1)/4$. Estas tres iteraciones de los números impares de los niveles $4n+1$ son las que siempre se producen, pero puede haber más.

El cambio de nivel de estos números impares y las tres iteraciones a números pares es el siguiente: El número impar sube $8n+4$ niveles hasta el primer número par y baja $9n+4$ niveles hasta el tercero.

Si sube $8n+4$ y baja $9n+4$, resulta que todos los números impares de este grupo $36n+17$ bajan tantos niveles como su valor de (n).

Los números $36n+35$ también iteran siempre de la misma forma: En la primera iteración a un número par suben $8n+8$ niveles y este número par baja $6n+6$ niveles hasta un número impar. Si suben $8n+8$ y bajan $6n+6$, resulta que los números impares del grupo $36n+35$ suben $2n+2$ niveles. Estas dos iteraciones impar-par-impar suceden siempre y se repetirán hasta que resulte un número impar del otro grupo $36n+17$, si en la función de Collatz aplicamos a los impares $(3n+1)/2$.

Este número impar aparece en " $n+1$ " lugar cuando el primer impar k es $2^{(k+1)}(2n-1)-1$. Ejemplo: si el primer impar es el número $2^{(6+1)}(2-1)-1=127$, el último impar será un número del grupo $36n+17$ y estará en 7º lugar, o sea, habrá 6 impares seguidos del grupo $36n+17$ y uno del grupo $36n+35$: 127, 191, 287, 431, 647, 971, 1457, ...

Para conocer el nivel que ocupa un número impar y el de los números de las dos iteraciones siguientes, número impar-par-impar, le aplicamos las tres divisiones 9, 3, 6:

El nivel de un número k impar es igual a $k/9$. El nivel del número par de la primera iteración es igual a $k/3$ y el nivel del número impar de la segunda iteración es igual a $k/6$.

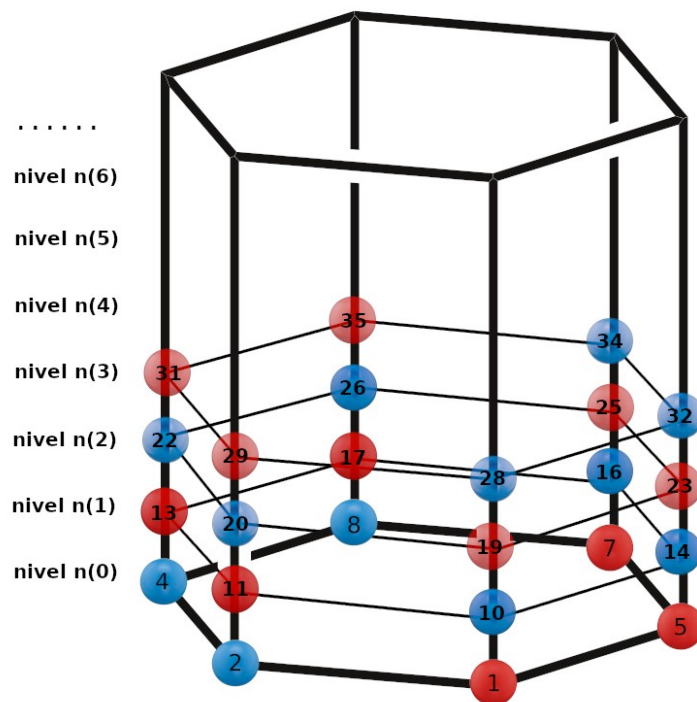
Ejemplo: Las dos iteraciones del número 143 son al número 430 y al número 215. Los niveles de estos números son $k/9=15$, $k/3=47$ y $k/6=23$ (no se tienen en cuenta los decimales).

El número 143 está en el nivel 15, el número 430 en el nivel 47 y el número 215 en el nivel 23.

Secuencia 143, 430, 215, 646, 323, 970, 485, 1456, 728, ...

Niveles de los números 15 47 23 71 35 107 53 161 80

143/9=15 143/3=47 143/6=23
215/3=71 215/6=35 323/3=107
323/6=53 485/3=161 485/6=80



Este número impar aparece en " $k+1$ " lugar cuando el primer impar es $2^{k+1}(2n-1)-1$.

Ejemplo: si el primer impar es el número $2 \cdot 2^6 - 1 = 127$, el último impar será un número del grupo $36n+17$ y estará en 7º lugar, o sea, habrá 6 impares seguidos del grupo $36n+17$ y un impar del grupo $36n+35$:

$$n(1), k(6) = 127$$

Secuencia obtenida: 127, 191, 287, 431, 647, 971, 1457, 2186, ...
Niveles de los números: 14 21 31 47 71 107 161 242 ...

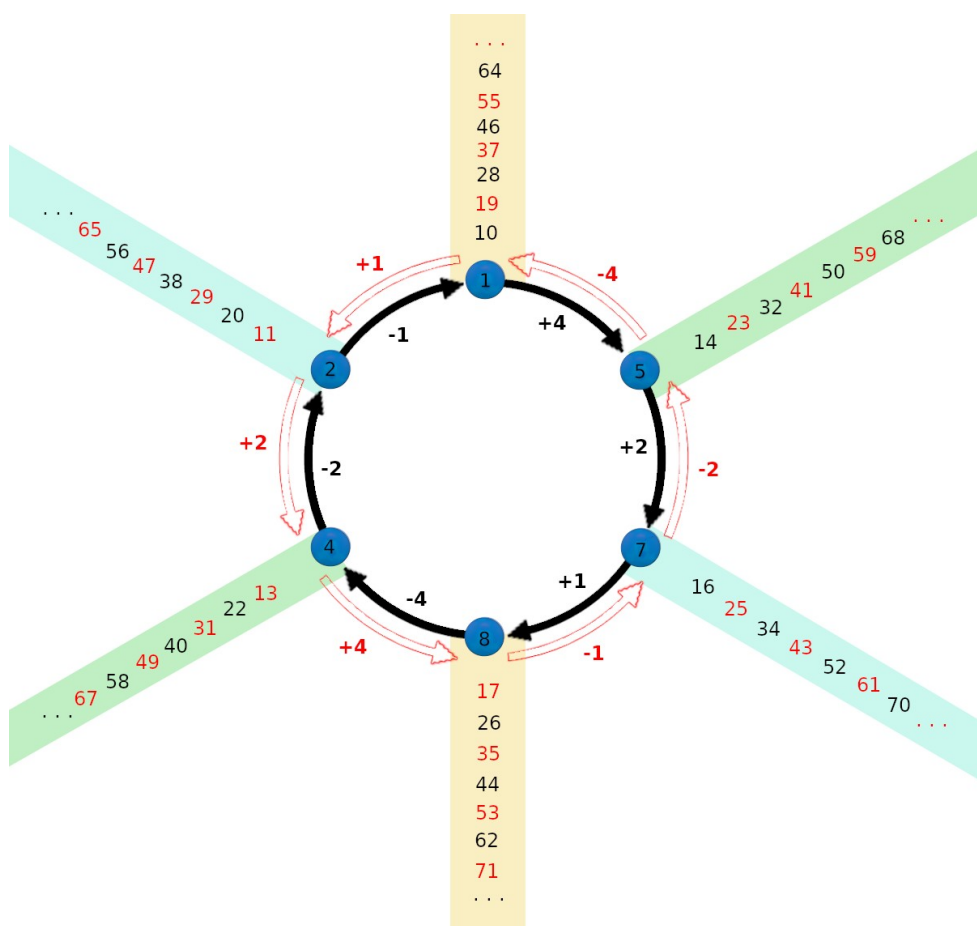
$$n(2), k(6) = 383$$

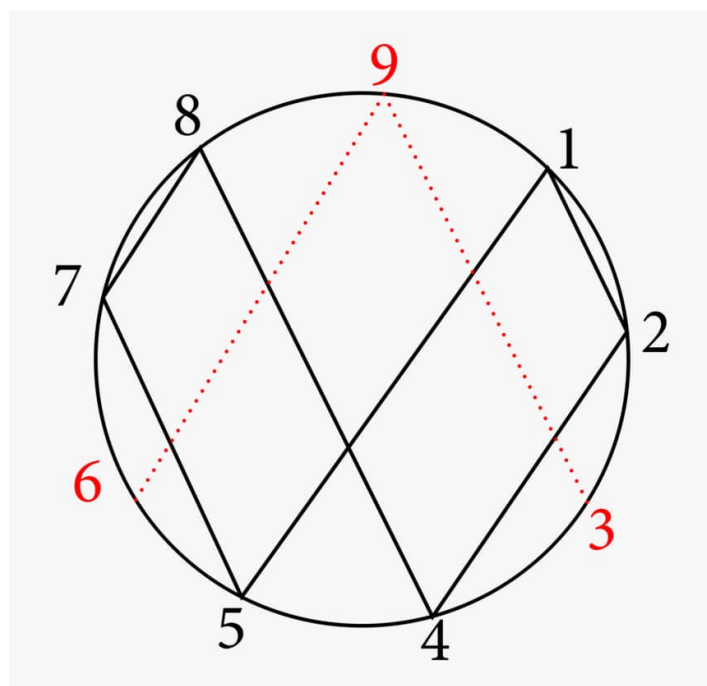
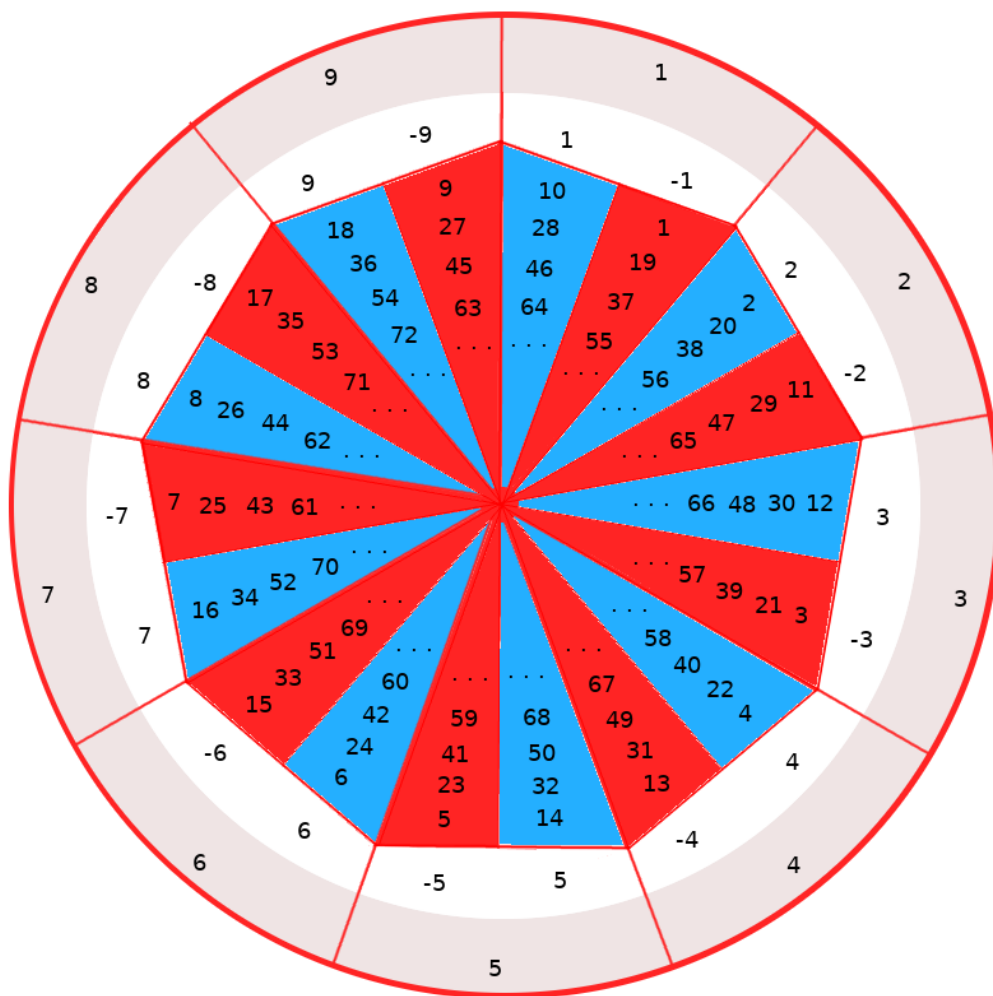
Secuencia obtenida: 383, 575, 863, 1295, 1943, 2915, 4373, 6560, ...
Niveles de los números: 42 63 95 143 215 323 485 728 ...

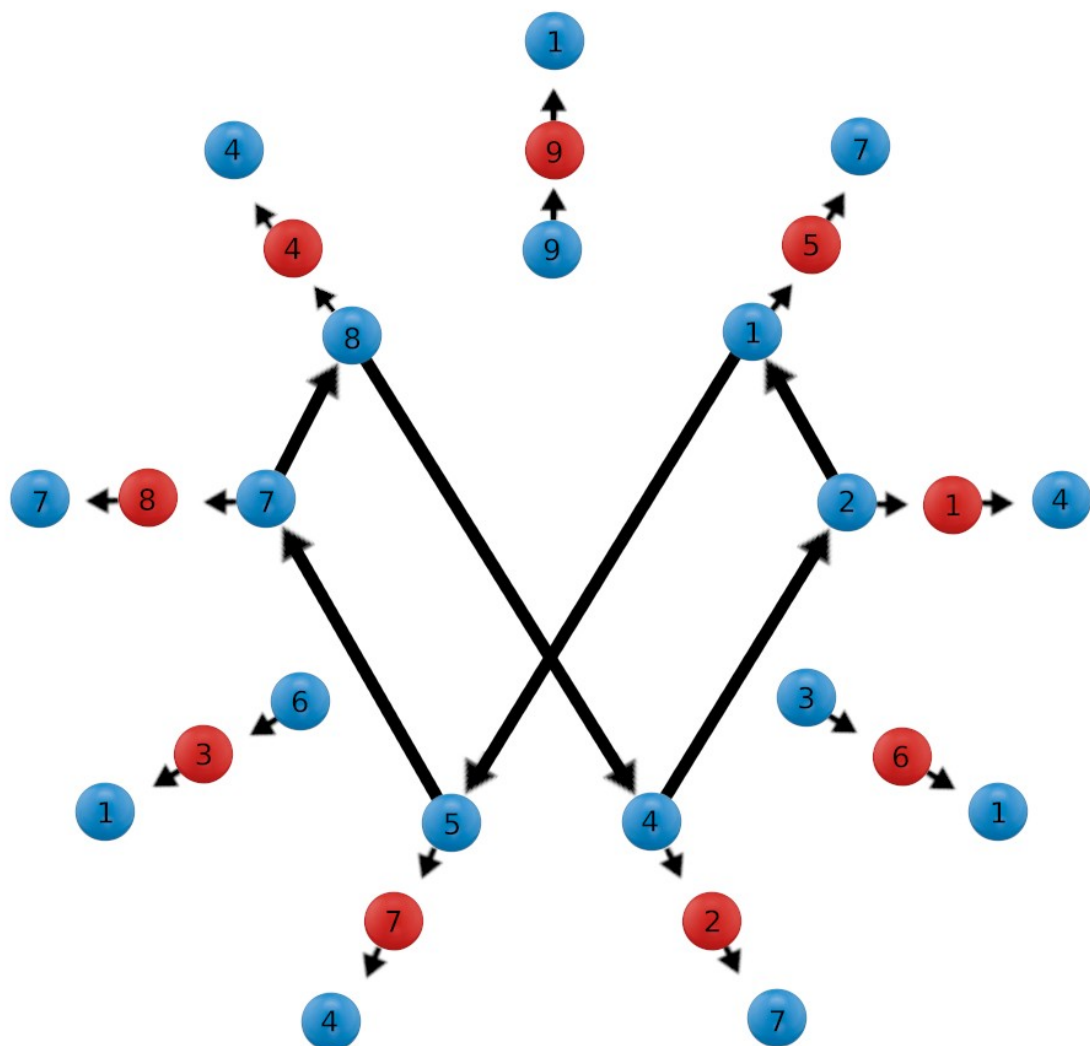
$$n(3), k(6) = 639$$

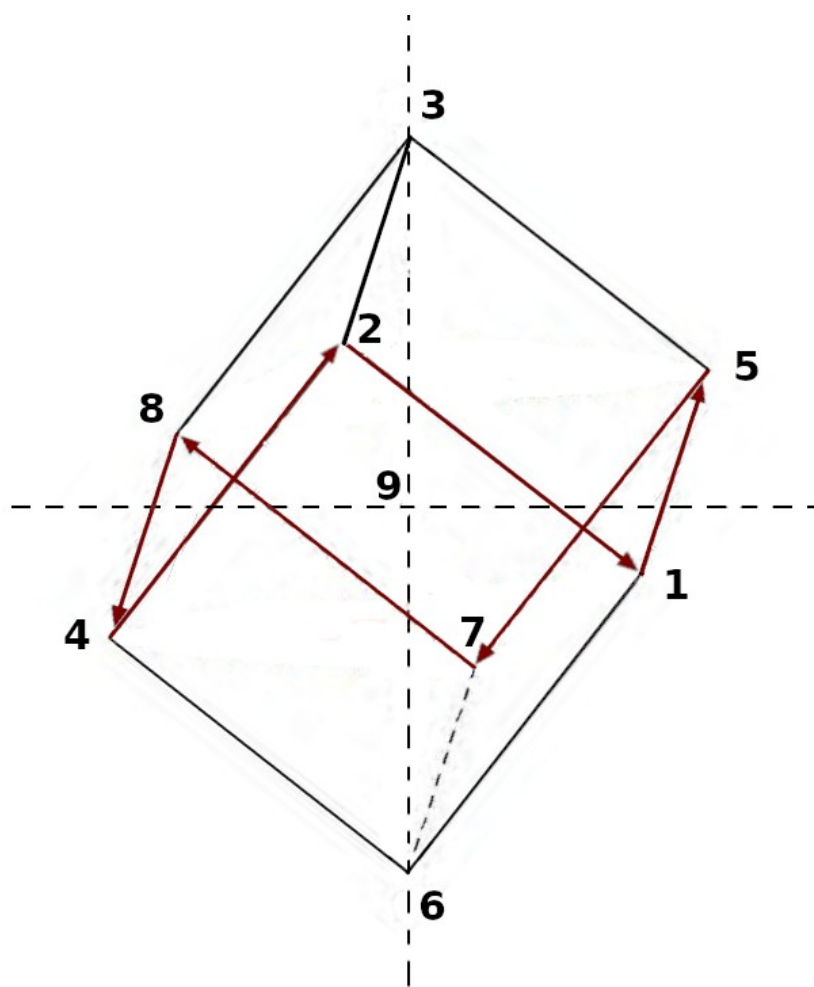
Secuencia obtenida: 639, 959, 1439, 2159, 3239, 4859, 7289, 10934, ...
Niveles de los números: 71 106 159 239 359 539 809 1214 ...

Los niveles de los números de la secuencia empezada con el número 127, coinciden con parte de la secuencia [A143951](#) ??









Ejemplos:

La columna $k(8)$ de la tabla tiene los números 15, 23, 35, 53 y 80.

La columna $k(12)$ de la tabla tiene los números 23, 35, 53 y 80.

La columna $k(18)$ de la tabla tiene los números 35, 53 y 80.

La columna $k(27)$ de la tabla tiene los números 53 y 80.

8	12	18	27
15	23	35	53
23	35	53	80
35	53	80	
53	80		
80			

El triángulo $T(4)$:

[illegible]

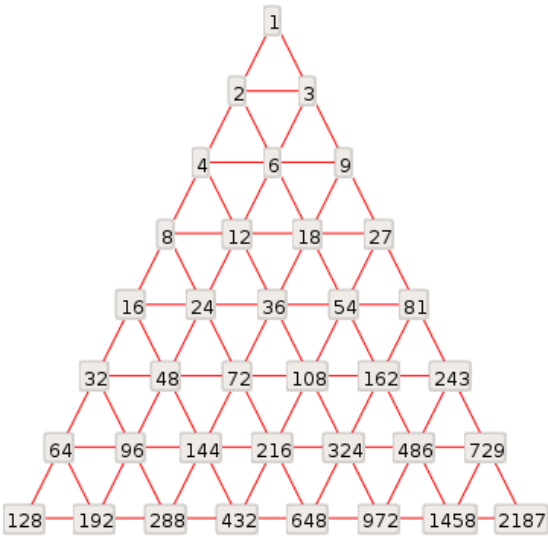
El triángulo $T(6)$:

6												
13	20											
27	41	62										
55	83	125	188									
111	167	251	377	566								
223	335	503	755	1133	1700							
447	671	1007	1511	2267	3401	5102						
895	1343	2015	3023	4535	6803	10205	15308					
1791	2687	4031	6047	9071	13607	20411	30617	45926				
3583	5375	8063	12095	18143	27215	40823	61235	91853	137780			
7167	10751	16127	24191	36287	54431	81647	122471	183707	275561	413342		
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

El triángulo $T(n)$ que contenga el primer número impar de la secuencia de Collatz es el que será el inicio o primer ciclo de la misma.

En las columnas de la tabla y en las filas de los triángulos, los números: $a(n+1)=(3a(n)+1)/2$.

Triángulo de Nicomaco



[illegible]

En las columnas de este triángulo están las columnas de los números pares de la tabla y en las filas de este triángulo, si le restamos 1 a sus números, están las columnas de los números impares de la tabla.

[illegible]

Ejemplo: La columna $k(31)$ de la tabla es la fila $n(5)$ del triángulo, si le restamos 1 a sus números y la columna $k(32)$ de la tabla es la columna $m(1)$ del triángulo.

En las columnas $k(\text{impar})$ y la siguiente $k(\text{par})$, la relación entre los números de una misma fila es 3^n .

Ejemplo: En las columnas $k(23)$ - $k(24)$:

$$\begin{array}{llll} (23+1)/1=24 & (35+1)/3=12 & (53+1)/9=6 & (80+1)/27=3 \\ 24*1-1=23 & 12*3-1=35 & 6*9-1=53 & 3*27-1=80 \end{array}$$

Sean A los números de las columnas $k(\text{impar})$ y B los números de las columnas $k(\text{par})$, entonces:

$$B \cdot 3^n - 1 = A$$

$$(A+1)/B = 3^n$$

$$\begin{array}{llll} \text{En } k(3)-k(4) & (3+1)/1=4. & (5+1)/3=2. & (8+1)/9=1. \\ \text{En } k(11)-k(12) & (11+1)/1=12. & (17+1)/3=6. & (26+1)/9=3. \\ \text{En } k(23)-k(24) & (23+1)/1=24. & (35+1)/3=12. & (53+1)/9=6. \quad (80+1)/27=3. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 4/2 = (5+1)/3 & 12/2 = (17+1)/3 & 16/2 = (23+1)/3 & 24/2 = (35+1)/3 & \dots \\ 3*4 = 2*(5+1) & 3*12 = 2*(17+1) & 3*16 = 2*(23+1) & 3*24 = 2*(35+1) & \dots \\ 4 = 2/3*(5+1) & 12 = 2/3*(17+1) & 16 = 2/3*(23+1) & 24 = 2/3*(35+1) & \dots \\ 4/2 = 6/3 & 12/2 = 18/3 & 16/2 = 24/3 & 24/2 = 36/3 & \dots \end{array}$$

$$((72*3)/2)-1 = 107 \quad ((24*9)/2)-1 = 107 \quad ((8*27)/2)-1 = 107$$

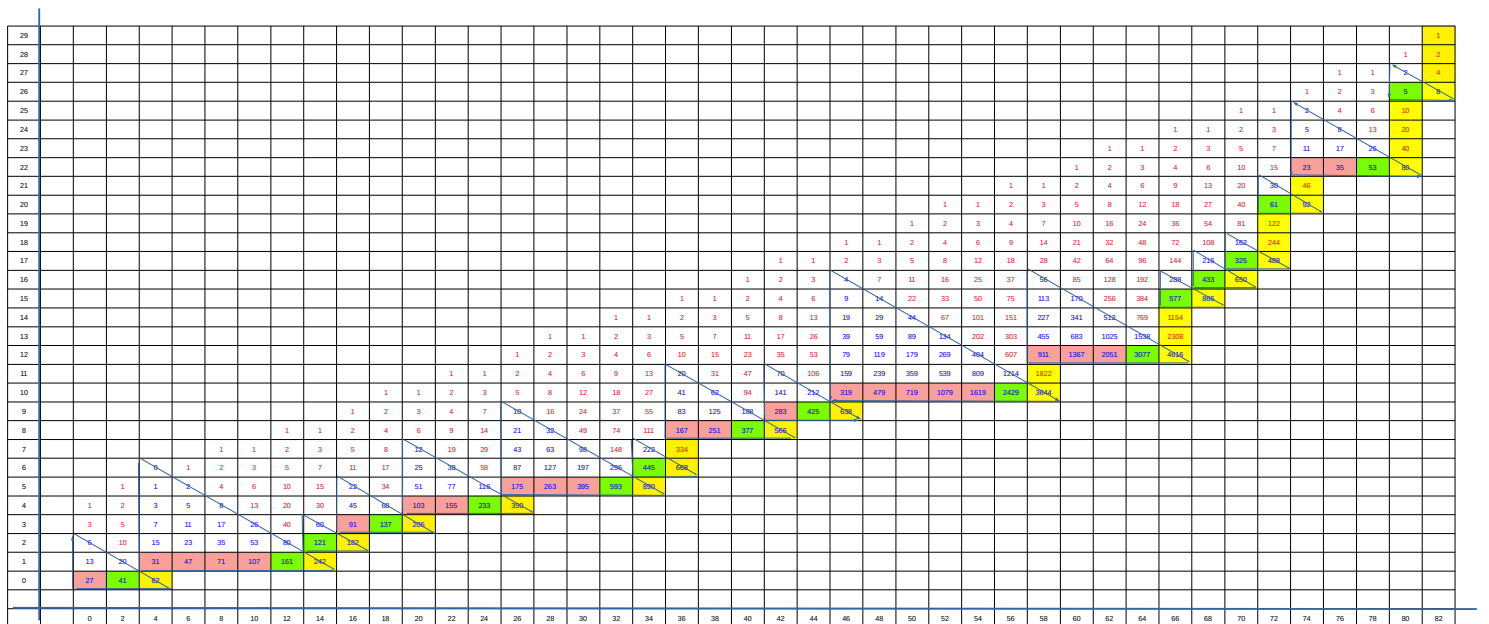
$$(2*107+2)/3 = 72 \quad (2*107+2)/9 = 24 \quad (2*107+2)/27 = 8$$

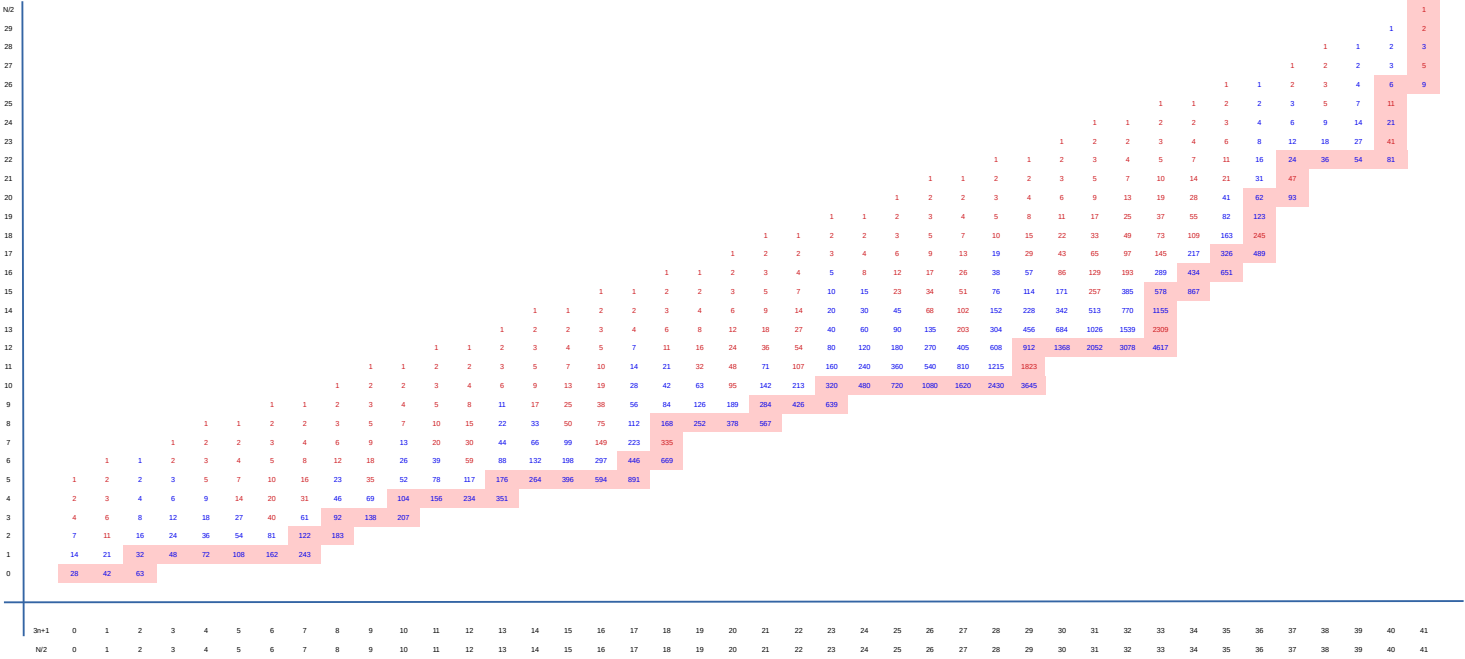
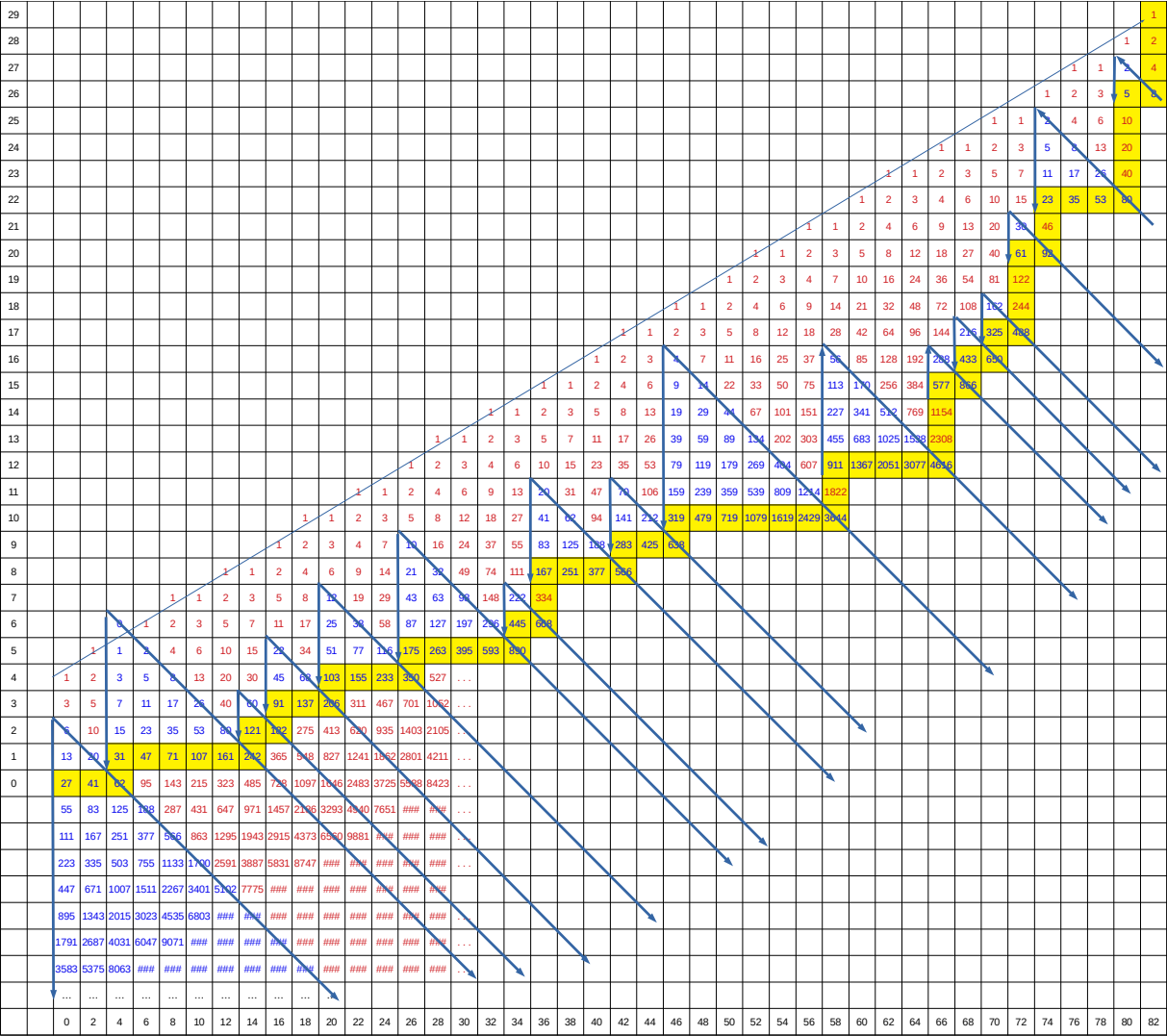
El 72 llega al 9 El 24 llega al 3 El 8 llega al 1

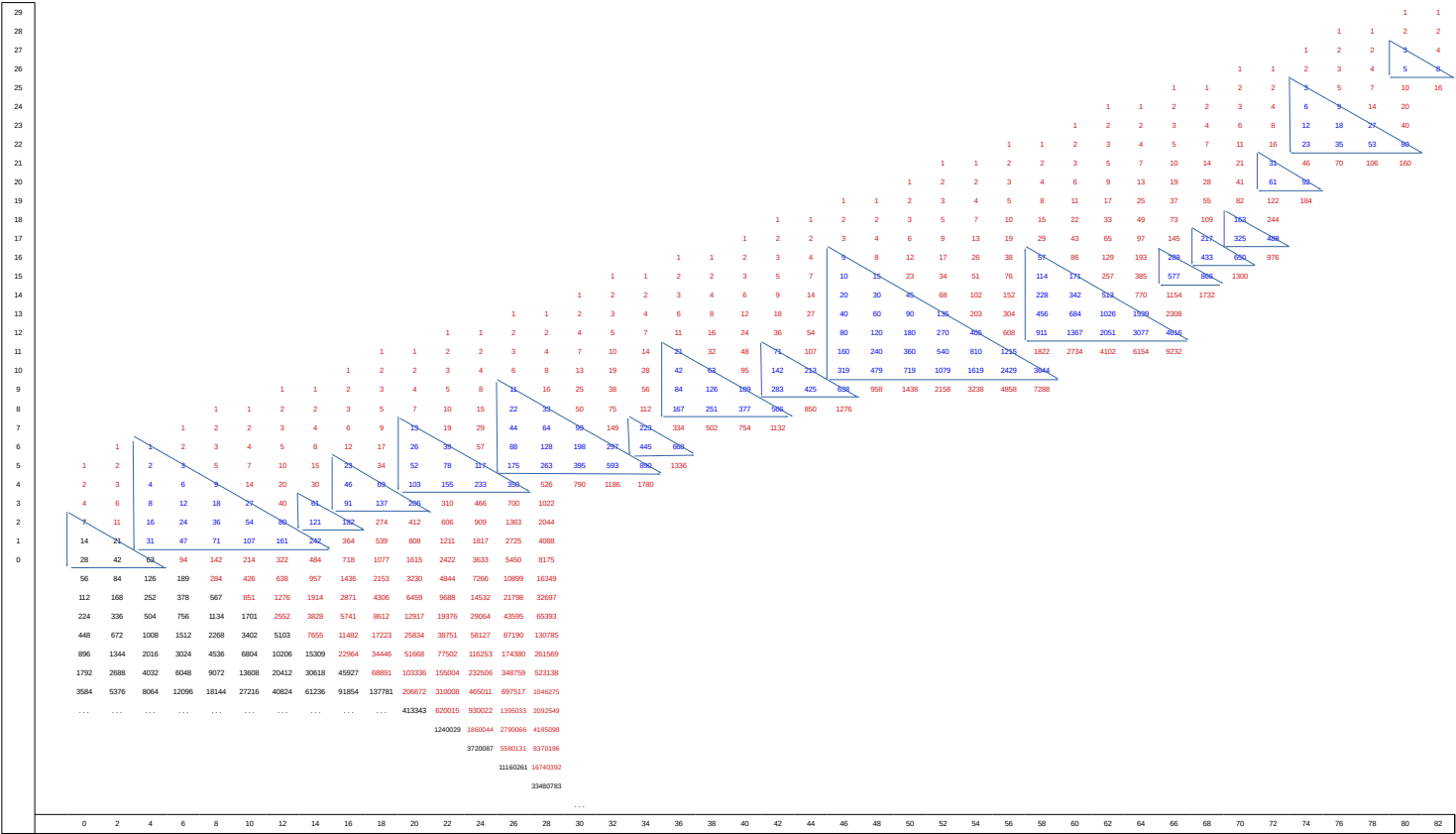
n												
0		5										
1		10	15									
2		20	30	45								
3		40	60	90	135							
4		80	120	180	270	405						
5		160	240	360	540	810	1215					
6		320	480	720	1080	1620	2430	3645				
7		640	960	1440	2160	3240	4860	7290	10935			
8		1280	1920	2880	4320	6480	9720	14580	21870	32805		
9		2560	3840	5760	8640	12960	19440	29160	43740	65610	98415	
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

En la tabla siguiente comprobamos que en todos los ciclos de la secuencia los números impares de la forma $4n-1$ (color rojo) acaban en un último impar de la forma $4n-3$ (color verde), que al aplicarle la operación del algoritmo $3n+1$ produce un número par (color amarillo) que admite como mínimo dos divisiones entre 2, provocando que la secuencia sea descendente.

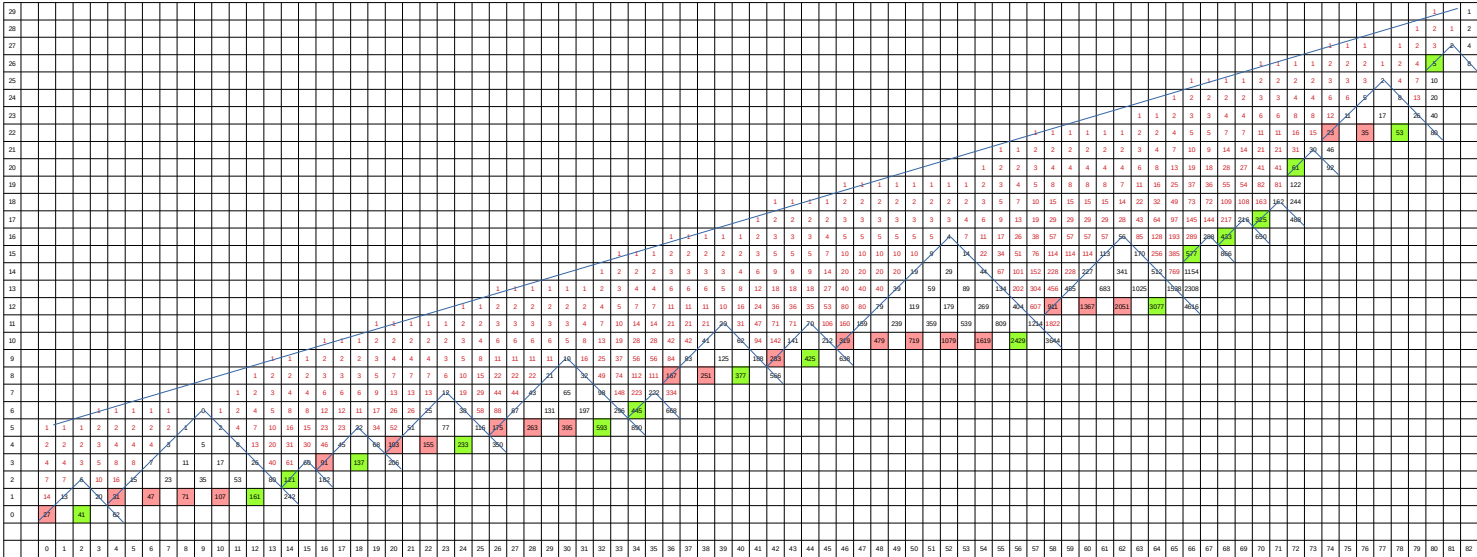
Esta tabla representa la secuencia iniciada con el número 27, que desde ese número sigue por las últimas filas de los triángulos o ciclos, hasta llegar al 1. Ha necesitado 82 pasos horizontales y 29 pasos verticales.







Si ponemos los triángulos equiláteros:



Las secuencias de Collatz se pueden formar de otra manera, que explico a continuación.

Dividir entre 2 y multiplicar por 3. Este es el argumento de los ciclos que forman una secuencia formada con el algoritmo de L  thar Collatz de su conjetura.

PRIMER CICLO: Si el número que empieza la secuencia es un número par m , el primer número del ciclo A es $m-1$ y si es un número impar, A es ese número.

El segundo número es $A+1$. Los demás números del ciclo se obtienen de la siguiente forma: $A+1$ se divide entre 2 las veces que se pueda y después se multiplica por 3 las mismas veces.

$(A+1)/2^n * 3^n$. El último número del ciclo $B = (A+1)/2^n * 3^n - 1$.

SIGUIENTES CICLOS: El primer número es $B/2^n$. Los demás números se obtienen de la misma forma que los del primer ciclo.

Los ciclos se sucederán hasta que el último número de un ciclo sea $B = 2^n$. El ciclo más corto consta de 5 números: A , $A+1$, $(A+1)/2$, $(A+1)*3/2$ y $(A+1)*3/2-1$.

La longitud de los ciclos depende de 2^n que divide $A+1$, siendo el más corto cuando $n=1$.   Cual sería el más largo?   Puede existir 2^∞ ? No, no existe, porque siempre llegan a un número impar.

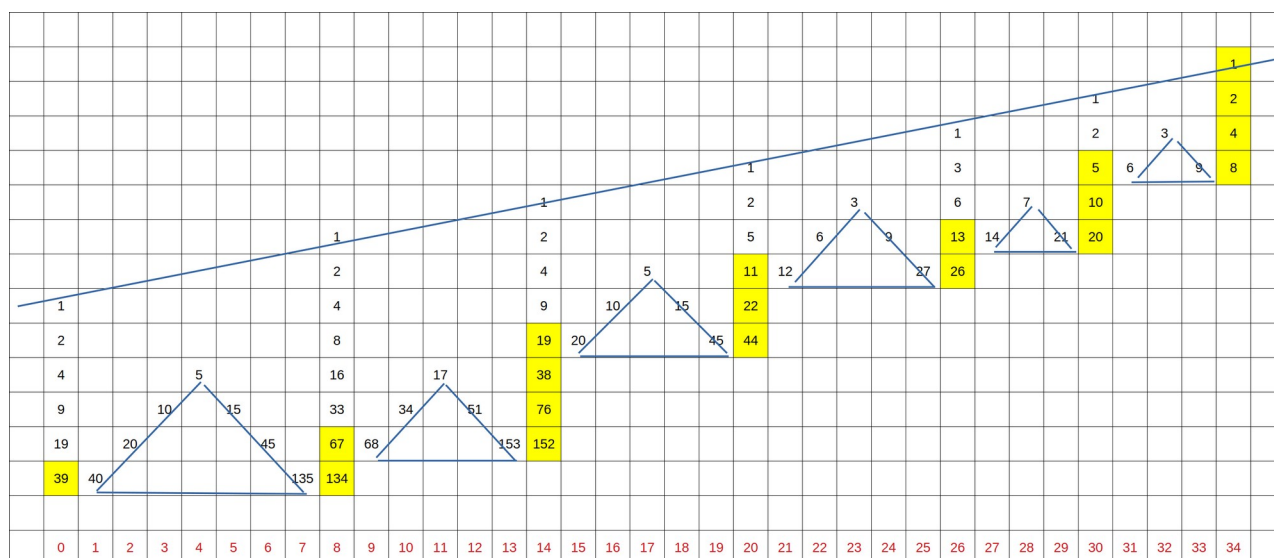


Tabla con la secuencia empezada con el número 39 y los 6 triángulos o ciclos que la componen. En cada ciclo, el primer impar es x y el último impar es y , entonces $(x+1)*(3/2)^n=y$.

Los números en amarillo son los números de la secuencia, que se lee empezando por las columnas de la izquierda y de abajo a arriba: 39, 134, 67, 152, 76, 38, 19, 44, 22, 11, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

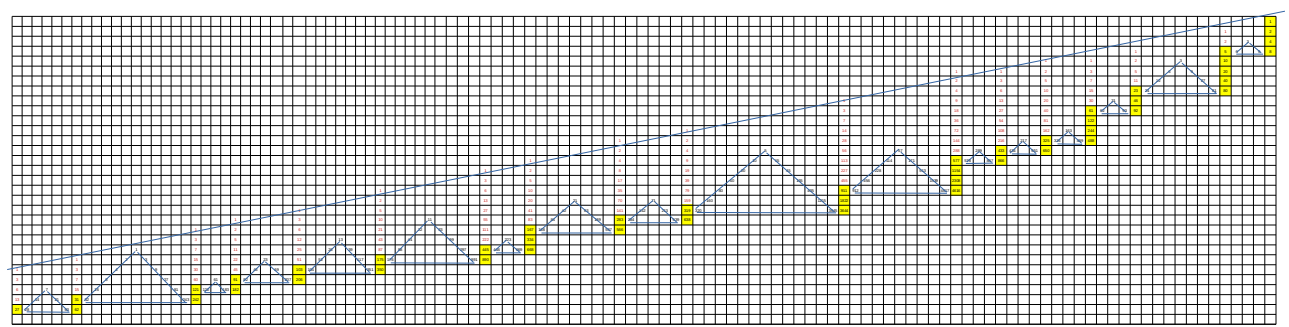
El valor de n es el que le corresponde al número del vértice superior de cada triángulo o ciclo, que es el número de la fila que ocupa en el triángulo, empezando con la base que es la fila 0.

Ejemplos:

$$(39+1)*(3/2)^3=135 \quad (67+1)*(3/2)^2=153 \quad (19+1)*(3/2)^2=45$$

$$(11+1)*(3/2)^2=27 \quad (13+1)*(3/2)=21 \quad (5+1)*(3/2)=9$$

La tabla que representa los ciclos de la secuencia empezada con el número 27:



LA CONJETURA DE COLLATZ
Orden y armonía en los números de la secuencia

por

Miquel Cerdà Bennassar

Agosto 2019

RESUMEN

Propongo una tabla numérica en la que se demuestra visualmente que las secuencias formadas con el algoritmo de Collatz acaban siempre en el número 1.

INTRODUCCIÓN

La conjetura fué planteada por el matemático Lothar Collatz en 1937. También es conocida con otros nombres: El problema $3n+1$, la conjetura de Ulam, el problema de Kakutani, la conjetura de Thwaites, el algoritmo de Hasse o el problema de Siracusa.

La conjetura dice lo siguiente:

- 1 – Se elige un número natural cualquiera, n .
- 2 – Si es par se divide entre 2, $(n/2)$.
- 3 – Si es impar se multiplica por 3 y se suma 1 al resultado, $(3n+1)$.

Se repite el proceso con cada resultado y se obtiene una secuencia que siempre acaba en 1 y siempre es así, sea cual sea el número inicial. La incógnita es porqué sucede y si ocurre con todos los números naturales.

VISIÓN GENERAL

Para la conjetura de Collatz, identifico dos tipos de números impares: Los de la forma $4n+3$ y los de la forma $4n+1$.

Aplicando $(3m+1)/2$ a los de la forma $4n+3$, resulta un número impar que es mayor que el anterior y la secuencia es ascendente.

Aplicando la misma operación a los de la forma $4n+1$, resulta un número par que requiere más divisiones entre 2, por lo que el número impar al que llegan es siempre menor que el anterior y la secuencia es descendente.

Una secuencia de Collatz será más o menos descendente y más o menos larga según se obtengan más o menos números impares de la forma $4n+1$.

Si en el conjunto de los números impares hay la misma cantidad de números de ambas formas, ¿Tienen la misma probabilidad de salir en las secuencias de Collatz? ¿Se puede predecir cuantos habrá y en qué momento aparecerán los números de la forma $4n+1$ y la secuencia descenderá?

También identifico dos tipos de números pares: Los de la forma $4n+2$ y los de la forma $4n+4$.

Los de la forma $4n+2$ admiten una sola división $n/2$ y el número impar que resulta es mayor que el anterior y la secuencia es ascendente.

Los de la forma $4n+4$ admiten dos o más divisiones $n/2$ y el número impar al que llegan es menor que el anterior y la secuencia es descendente.

Una secuencia de Collatz será más o menos descendente y más o menos larga según se obtengan más o menos números pares de la forma $4n+4$.

Si en el conjunto de los números pares hay la misma cantidad de números de ambas formas, ¿Tienen la misma probabilidad de salir en las secuencias de Collatz? ¿Se puede predecir cuantos habrá y en qué momento aparecerán los números de la forma $4n+4$ y la secuencia descenderá?

Las respuestas a estas dos preguntas quizás se encuentren en dos tablas, una para los números impares y otra para los números pares, que explico a continuación.

TABLA DE LOS NÚMEROS IMPARES DE LAS SECUENCIAS

En una table con k columnas, escribo en la primera fila los números $2k-1$.

En las filas sucesivas aplico $(3m+1)/2$ a los números impares, dejando como último número de cada columna al número par.

En color rojo son los números impares de la forma $4n+3$ y los de color verde son los números impares de la forma $4n+1$. Los números pares se ha dejado sin color.

El valor de n del último número de las columnas, corresponde a la cantidad de números impares y al número de aplicaciones $(3m+1)/2$ que hay en ellas.

Ejemplo: En la columna $k(48)$ hay 5 números impares y el impar 95 necesita 5 pasos para llegar hasta el número par 728.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	..
n																																																				
0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	..
1	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59	62	65	68	71	74	77	80	83	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	128	131	134	137	140	143	146	149	152	
2		8		17		26		35		44		53		62		71		80		89		98		107		116		125		134		143		152		161		170		179		188		197		206		215		224		
3				26				53				80				107				134				161				188				215				242				269				296			323					
4						80										161																323							404							485						
5																242																	485														728					
6																																																				
7																																																				

k	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	...		
n																																																						
0	103	105	107	109	111	113	115	117	119	121	123	125	127	129	131	133	135	137	139	141	143	145	147	149	151	153	155	157	159	161	163	165	167	169	171	173	175	177	179	181	183	185	187	189	191	193	195	197	199	201	203	...		
1	155	158	161	164	167	170	173	176	179	182	185	188	191	194	197	200	203	206	209	212	215	218	221	224	227	230	233	236	239	242	245	248	251	254	257	260	263	266	269	272	275	278	281	284	287	290	293	296	299	302	305	...		
2	233		242		251		260		269		278		287		296		305		314		323		332		341		350		359		368		377		386		395		404		413		422		431		440		449		458			
3	350				377				404				431				458				485				512				539				566				593			620				647			674							
4					566								647							728								809								890								971										
5													971																1214																		1457							
6													1457																																				2186					
7														2186																																								

Esta fórmula define a cada número de la tabla:

$$a(n)=2k(3/2)^n-1$$

En cada columna:

$$a(n+1)=a(n)+k(3/2)^n$$

La cantidad de números que hay en cada columna es siempre la misma, según sea el valor de k :

	n	valor de k												cantidad de números por columna
$2k-1$	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	...			0 impares rojos, 1 número impar verde y un número par
$2(2k-1)$	1	2	6	10	14	18	22	26	30	34	...			1 número impar rojo, 1 número impar verde y un número par
$4(2k-1)$	2	4	12	20	28	36	44	52	60	68	...			2 números impares rojos, 1 número impar verde y un número par
$8(2k-1)$	3	8	24	40	56	72	88	104	120	136	...			3 números impares rojos, 1 número impar verde y un número par
$16(2k-1)$	4	16	48	80	112	144	176	208	240	272	...			4 números impares rojos, 1 número impar verde y un número par
$32(2k-1)$	5	32	96	160	224	288	352	416	480	544	...			5 números impares rojos, 1 número impar verde y un número par
$64(2k-1)$	6	64	192	320	448	576	704	832	960	1088	...			6 números impares rojos, 1 número impar verde y un número par
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...			...

En cada una de las columnas $k=2^n \cdot (2k-1)$ hay n números impares rojos, un último impar verde y el número par que cierra la columna.

Ejemplo: en la columna $k=2^{50}$ hay 50 números impares rojos, el primero es el número 2251799813685247 y el 50^o es el 957197316922470118360331 y el último impar de la columna, que es verde, es el número 1435795975383705177540497. El número par que cierra la columna es el 2153693963075557766310746. En el anexo 1, el desarrollo de la secuencia empezada con este primer número de la columna.

También tendrán la misma cantidad de números cada una de las columnas $k=(2k-1) \cdot 2^{50}$.

Una secuencia obtenida con el algoritmo de la conjetura de Collatz está formada por un número indeterminado de columnas de la tabla o ciclos.

Una secuencia empezada con el primer número impar de cualquier columna $k=(2k-1) \cdot 2^{1000000}$ tendría en esa columna, 1000000 impares rojos, un último impar verde y un número par cerrando la columna. Habrá el mismo número de impares en todas las columnas, para todo valor de $(2k-1)$.

Si la secuencia se empezase con un número potencia de 2 cercana al infinito, la primera columna de la tabla o ciclo de esa secuencia tendría esa misma cantidad de números impares.

La tabla es infinita pero todas sus columnas o ciclos son progresiones geométricas acotadas.

Ejemplo de una secuencia empezando con el número 279:

279, 838, 419, 1258, 629, 1888, 944, 472, 236, 118, 59, 178, 89, 268, 134, 67, 202, 101, 304, 152,
 $k(140)$ $k(30)$ $k(34)$

76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.
 $k(10)$ $k(6)$ $k(7)$ $k(3)$ $k(1)$

Las columnas implicadas de la secuencia:

140	30	34	10	6	7	3	1
279	59	67	19	11	13	5	1
419	89	101	29	17	20	8	2
629	134	152	44	26			
944							

La secuencia obtenida empezando con el número 27 y las 18 columnas o ciclos que la forman:

[illegible]

Las mismas columnas sin los impares de la forma $4n+3$

[illegible]

Los impares verdes seguidos del número par del final de cada columna k (par), están también en las columnas k (impar).

K	21	81	61	69	117	297	223	189	213	1215	1539	289	217	163	31	27	3	1
	41	161	121	137	233	593	445	377	425	2429	3077	577	433	325	61	53	5	1
	62	242	182	206	350	890	668	566	638	3644	4616	866	650	488	92	80	8	2

Equivalencia de k par y K impar : $k(3/2)^n = K$

Ejemplo: $k160 \cdot (3/2)^5 = K1215$

A cada repetición de la operación del algoritmo $(3m+1)/2$, aplicada al primer número impar de la columna, la secuencia "salta" de una columna a otra, dejándola a un solo paso de alcanzar el número par que se podrá dividir entre 2^2 , como mínimo. Esto ocurrirá siempre en cualquier secuencia hasta cuando el impar verde esté en la fila $n(0)$.

Un ejemplo de la evolución de las columnas de la tabla en la que "pierde" un número impar en cada salto, $k \cdot 3/2$:

$32 \cdot 3/2 = 48$, $48 \cdot 3/2 = 72$, $72 \cdot 3/2 = 108$, $108 \cdot 3/2 = 162$ y $162 \cdot 3/2 = 243$

$32 \cdot (3/2)^5 = 243$

$k = 32$, $K = 243$

k	32	48	72	108	162	243
n						
0	63	95	143	215	323	485
1	95	143	215	323	485	728
2	143	215	323	485	728	
3	215	323	485	728		
4	323	485	728			
5	485	728				
6	728					
7						

La columna $k(32)$ contiene los números impares y un número par de una secuencia de Collatz desde el número 63 hasta el número 728, ocupando las filas $n(0)$ hasta $n(6)$.

Los mismos números están en las columnas $k(32)$, $k(48)$, $k(72)$, $k(108)$, $k(162)$ y $k(243)$, ocupando la fila $n(0)$, porque en una secuencia puede haber los números de cualquiera de estas columnas y no necesariamente todos ellos.

El ciclo que sigue al anterior es el de la columna del número 91, porque $728/2^3=91$

	k	46	69
n			
0		91	137
1		137	206
2		206	
3			
4			
5			
6			
7			

El siguiente ciclo: $206/2=103$

	k	52	78	117
n				
0		103	155	233
1		155	233	350
2		233	350	
3		350		
4				
5				
6				
7				

Le siguen once ciclos más hasta que resulta el número 5, que encabeza la última columna antes de llegar al 1.

Los números impares de la forma $4n+3$ llegan siempre a un número impar de la forma $4n+1$ y todas las secuencias son descendentes en este punto.

LOS NÚMEROS PARES DE LAS SECUENCIAS EN UNA TABLA

En una table con k columnas, escribimos en la primera fila los números $2k$.

En las filas sucesivas se dividen entre 2 a los números pares, dejando como último número de cada columna al número impar.

En color rojo son los números pares que al dividirlos entre 2 producen otro número par y los de color verde son los números pares que al dividirlos entre 2 producen un número impar.

Los números impares se han dejado sin color.

El valor de n del último número de las columnas, corresponde a la cantidad de números pares y al número de divisiones entre 2 que hay en ellas.

Ejemplo: En la columna k(48) hay 5 números pares y el par 96 necesita 5 pasos para llegar hasta el número impar 3.

[illegible][illegible]

La cantidad de números que hay en cada columna es siempre la misma, según sea el valor de k :

[illegible]

En cada una de las columnas $k=2^n(2k-1)$ hay n números pares rojos, un último par verde y el número impar que cierra la columna.

$$(impar+1)/3^n$$

UN TRIÁNGULO CON LAS COLUMNAS DE LA TABLA

Un triángulo $T(n)$:

Se escribe un número n en el vértice superior y se forma el triángulo de la siguiente manera:

Para las columnas, multiplicar n por 2 y sumar 1 al resultado, $2n+1$. Repetir con los resultados obtenidos.

Para las filas, multiplicar n por 3, sumar 1 al resultado y dividir entre 2, $(3n+1)/2$. Repetir hasta llegar a un número par.

Un triángulo $T(n)$ para cada valor de $(n) = 0, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 24, \dots$ y podremos escribir en ellos todos los números impares.

El triángulo $T(0)$:

0											
1	2										
3	5	8									
7	11	17	26								
15	23	35	53	80							
31	47	71	107	161	242						
63	95	143	215	323	485	728					
127	191	287	431	647	971	1457	2186				
255	383	575	863	1295	1943	2915	4373	6560			
511	767	1151	1727	2591	3887	5831	8747	13121	19682		
1023	1535	2303	3455	5183	7775	11663	17495	26243	39365	59048	
2047	3071	4543	6815	10143	15215	22823	34247	51391	76703	114047	171167

Cada fila k del triángulo es la columna k de la tabla y el valor de k es cualquier número del triángulo más 1.

[illegible]

Ejemplos:

La columna $k(8)$ de la tabla tiene los números 15, 23, 35, 53 y 80.
La columna $k(12)$ de la tabla tiene los números 23, 35, 53 y 80.
La columna $k(18)$ de la tabla tiene los números 35, 53 y 80.
La columna $k(27)$ de la tabla tiene los números 53 y 80.

8	12	18	27
15	23	35	53
23	35	53	80
35	53	80	
53	80		
80			

El triángulo $T(4)$:

4											
9	14										
19	29	44									
39	59	89	134								
79	119	179	269	404							
159	239	359	539	809	1214						
319	479	719	1079	1619	2429	3644					
639	959	1439	2159	3239	4859	7289	10934				
1279	1919	2879	4319	6479	9719	14579	21869	32804			
2559	3839	5759	8639	12959	19439	29159	43739	65609	98414		
5119	7679	11519	17279	25919	38879	58319	87479	131219	196829	295244	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

El triángulo $T(6)$:

6											
13	20										
27	41	62									
55	83	125	188								
111	167	251	377	566							
223	335	503	755	1133	1700						
447	671	1007	1511	2267	3401	5102					
895	1343	2015	3023	4535	6803	10205	15308				
1791	2687	4031	6047	9071	13607	20411	30617	45926			
3583	5375	8063	12095	18143	27215	40823	61235	91853	137780		
7167	10751	16127	24191	36287	54431	81647	122471	183707	275561	413342	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

El triángulo $T(n)$ que contenga el primer número impar de la secuencia de Collatz es el que será el inicio o primer ciclo de la misma.

En las columnas de la tabla y en las filas de los triángulos, los números: $a(n+1)=(a(n)*3+1)/2$.

MULTIPLICAR POR 3 Y DIVIDIR ENTRE 2

Si en el triángulo $T(0)$ le sumo 1 a sus números, resulta otro triángulo $T(1)$:

1											
2	3										
4	6	9									
8	12	18	27								
16	24	36	54	81							
32	48	72	108	162	243						
64	96	144	216	324	486	729					
128	192	288	432	648	972	1458	2187				
256	384	576	864	1296	1944	2916	4374	6561			
512	768	1152	1728	2592	3888	5832	8748	13122	19683		
1024	1536	2304	3456	5184	7776	11664	17496	26244	39366	59049	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

En cada columna de este triángulo, los números pares de las secuencias y los números impares a los que llegan después de ser sometidos a n divisiones entre 2, que coinciden con las columnas de la tabla de los números pares.

Un triángulo $T(n)$ para cada valor de $(n) = 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, \dots (6n-1, 6n+1)$ y podremos escribir en ellos todos los números pares.

En las filas del triángulo, cada número: $a(n+1)=a(n)*3/2$. Todos tienen como factores primos 3 y 2.

Multiplicar por 3 y dividir entre 2 es el guion con el que se desarrolla una secuencia obtenida con el algoritmo de Collatz y esto mantiene en la misma fila a los impares de la secuencia.

Ejemplo: $8*3=24$, $24/2=12$, $12*3=36$, $36/2=18$, $18*3=54$, $54/2=27$. (números 7, 11, 17, 26 de la secuencia).

Para desarrollar una secuencia de Collatz en este triángulo y poder ver todo su recorrido, desde su inicio hasta que llega al 1, formamos una tabla con el triángulo como base.

Empezando con cada último número de las filas del triángulo, le aplicamos estas dos operaciones: Al impar le sumamos 1 y al par lo dividimos entre 2.

Escribimos cada resultado encima del anterior, en la misma columna, hasta llegar al 1.

En esta prolongación del triángulo, los números están en rojo.

														1	1	...
												1	1	2	2	...
											1	2	2	3	4	...
									1	1	2	3	4	5	7	...
							1	1	2	2	3	5	7	10	14	...
						1	2	2	3	4	6	9	13	19	28	...
				1	1	2	3	4	5	8	11	17	25	37	55	...
		1	1	2	2	3	5	7	10	15	22	33	49	73	110	...
	1	2	2	3	4	6	9	13	20	29	44	65	98	146	219	...
1	2	3	4	6	8	12	18	26	39	58	87	130	195	292	438	...
2	3	5	7	11	16	23	35	52	77	116	173	260	390	584	876	...
4	6	9	14	21	31	46	69	103	154	231	346	519	779	1168	1752	...
8	12	18	27	41	61	92	137	206	308	462	692	1038	1557	2336	3504	...
16	24	36	54	81	122	183	274	411	616	923	1384	2076	3114	4671	7007	...
32	48	72	108	162	243	365	547	821	1231	1846	2768	4152	6228	9342	14013	...
64	96	144	216	324	486	729	1094	1641	2461	3691	5536	8304	12456	18684	28026	...
128	192	288	432	648	972	1458	2187	3281	4921	7382	11072	16608	24912	37367	56051	...
256	384	576	864	1296	1944	2916	4374	6561	9842	14763	22144	33216	49823	74734	112101	...
512	768	1152	1728	2592	3888	5832	8748	13122	19683	29525	44287	66431	99646	149468	224202	...
1024	1536	2304	3456	5184	7776	11664	17496	26244	39366	59049	88574	132861	199291	298936	448404	...
2048	3072	4608	6912	10368	15552	23328	34992	52488	78732	118098	177147	265721	398581	597872	896807	...
4096	6144	9216	13824	20736	31104	46656	69984	104976	157464	236196	354294	531441	797162	1195743	1793614	...
8192	12288	18432	27648	41472	62208	93312	139968	209952	314928	472392	708588	1062882	1594323	2391485	3587227	...
16384	24576	36864	55296	82944	124416	186624	279936	419904	629856	944784	1417176	2125764	3188646	4782969	7174454	...
32768	49152	73728	110592	165888	248832	373248	559872	839808	1259712	1889568	2834352	4251528	6377292	9565938	14348907	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

En esta tabla podremos visualizar cualquier secuencia de Collatz, cuyo primer número impar de la misma, esté en el triángulo. Si no está, se podrá visualizar en la tabla cuya base o triángulo contenga ese número. Tendrán la misma trayectoria todas las secuencias empezadas con los números impares de una fila del triángulo.

Igual que los triángulos, las tablas obtenidas a partir de éstos, son únicas para cada $T(n)$ y la representación de las secuencias se hará en la tabla formada a partir del triángulo que contenga el primer número impar de la misma.

Por ejemplo, para visualizar la secuencia empezada con el número 508, cuyo primer número impar es el 127, la representaremos en la tabla del triángulo $T(1)$, porque en la fila 2^8 está el número 127.

																...
															1	...
													1	1	2	...
												1	2	2	3	...
										1	1	2	3	4	5	...
							1	1	2	2	3	5	7	10	14	...
						1	2	2	3	4	6	9	13	19	28	...
				1	1	2	3	4	5	8	11	17	25	37	55	...
		1	1	2	2	3	5	7	10	15	22	33	49	73	110	...
	1	2	2	3	4	6	9	13	20	29	44	65	98	146	219	...
1	2	3	4	6	8	12	18	26	39	58	87	130	195	292	438	...
2	3	5	7	11	16	23	35	52	77	116	173	260	390	584	876	...
4	6	9	14	21	31	46	69	103	154	231	346	519	779	1168	1752	...
8	12	18	27	41	61	92	137	206	308	462	692	1038	1557	2336	3504	...
16	24	36	54	81	122	183	274	411	616	923	1384	2076	3114	4671	7007	...
32	48	72	108	162	243	365	547	821	1231	1846	2768	4152	6228	9342	14013	...
64	96	144	216	324	486	729	1094	1641	2461	3691	5536	8304	12456	18684	28026	...
128	192	288	432	648	972	1458	2187	3281	4921	7382	11072	16608	24912	37367	56051	...
256	384	576	864	1296	1944	2916	4374	6561	9842	14763	22144	33216	49823	74734	112101	...
512	768	1152	1728	2592	3888	5832	8748	13122	19683	29525	44287	66431	99646	149468	224202	...
1024	1536	2304	3456	5184	7776	11664	17496	26244	39366	59049	88574	132861	199291	298936	448404	...
2048	3072	4608	6912	10368	15552	23328	34992	52488	78732	118098	177147	265721	398581	597872	896807	...
4096	6144	9216	13824	20736	31104	46656	69984	104976	157464	236196	354294	531441	797162	1195743	1793614	...
8192	12288	18432	27648	41472	62208	93312	139968	209952	314928	472392	708588	1062882	1594323	2391485	3587227	...
16384	24576	36864	55296	82944	124416	186624	279936	419904	629856	944784	1417176	2125764	3188646	4782969	7174454	...
32768	49152	73728	110592	165888	248832	373248	559872	839808	1259712	1889568	2834352	4251528	6377292	9565938	14348907	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

La secuencia obtenida con el algoritmo de Collatz, empezada con el número 508:

508, 254, 127, 382, 191, 574, 287, 862, 431, 1294, 647, 1942, 971, 2914, 1457, 4372, 2186, 1093, 3280, 1640, 820, 410, 205, 616, 308, 154, 77, 232, 116, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Los números en negro están en el triángulo base y los rojos están en la prolongación de éste.

Los impares del triángulo: 127, 191, 287, 431, 647, 971, 1457 están en la misma fila, o sea ninguno de ellos se aleja del 1, descendiendo a filas inferiores.

Ocurre lo mismo con los impares de la zona roja, ninguno desciende a filas inferiores y únicamente al cambiar de columna desciende a la fila inferior, pero vuelve a subir con la división entre 2.

Cada cambio de columna se produce cuando el número impar es multiplicado por 3. Cuantos más impares tenga la secuencia, más cambios de columnas habrá y más tardará en alcanzar el 1.

Ejemplo: En la siguiente tabla el impar 19 desciende una fila al número 57 cuando es multiplicado por 3, pero vuelve a subir al 29 cuando el número 58 es dividido entre 2.

El desarrollo de una secuencia de Collatz empezada con el número 39:

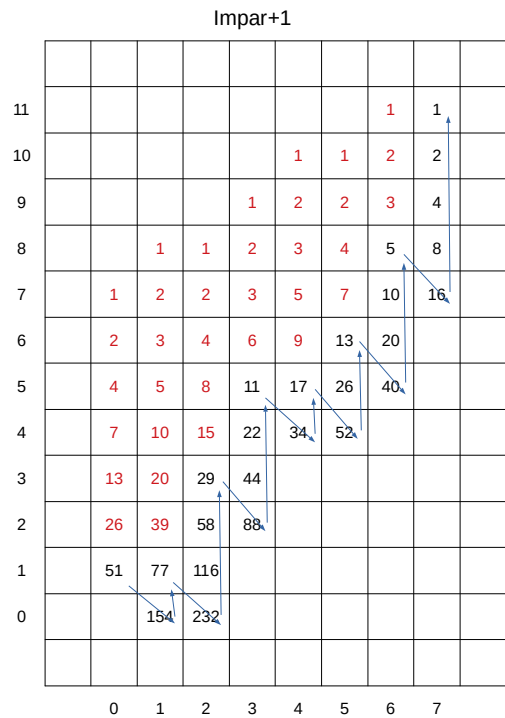
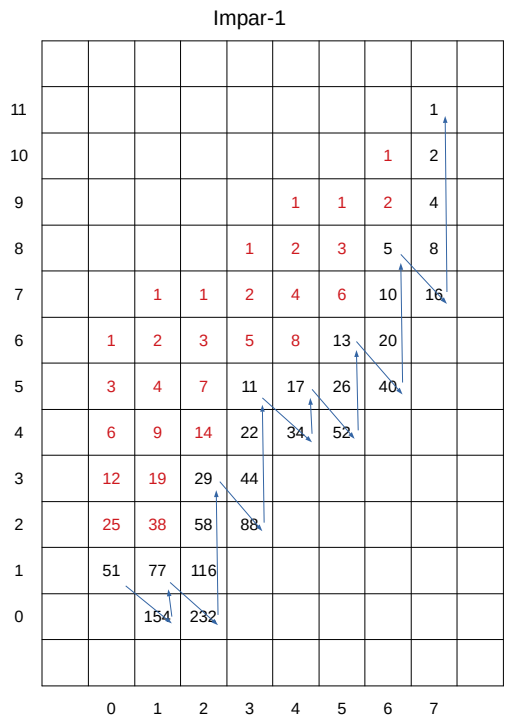
												...
										1	1	...
								1	1	2	2	...
							1	2	2	3	4	...
					1	1	2	3	4	5	7	...
			1	1	2	2	3	5	7	10	14	...
		1	2	2	3	4	6	9	13	19	28	...
1	1	2	3	4	5	8	11	17	25	37	55	...
2	2	3	5	7	10	15	22	35	49	73	109	...
3	4	6	9	13	19	29	43	65	97	145	217	...
5	8	12	17	26	38	57	86	129	193	289	433	...
10	15	23	34	51	76	114	171	257	385	577	865	...
20	30	45	68	102	152	228	342	513	769	1154	1730	...
40	60	90	135	203	304	456	684	1026	1538	2307	3460	...
80	120	180	270	405	608	912	1367	2051	3076	4614	6920	...
160	240	360	540	810	1215	1823	2734	4101	6151	9227	13840	...
320	480	720	1080	1620	2430	3645	5468	8202	12302	18453	27680	...
640	960	1440	2160	3240	4860	7290	10935	16403	24604	36906	55359	...
1280	1920	2880	4320	6480	9720	14580	21870	32805	49208	73812	110717	...
2560	3840	5760	8640	12960	19440	29160	43740	65610	98415	147623	221434	...
5120	7680	11520	17280	25920	38880	58320	87480	131220	196830	295245	442868	...
10240	15360	23040	34560	51840	77760	116640	174960	262440	393660	590490	885735	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

La secuencia obtenida con el algoritmo de Collatz, empezada con el número 39:

39, 118, 59, 178, 89, 268, 134, 67, 202, 101, 304, 152, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

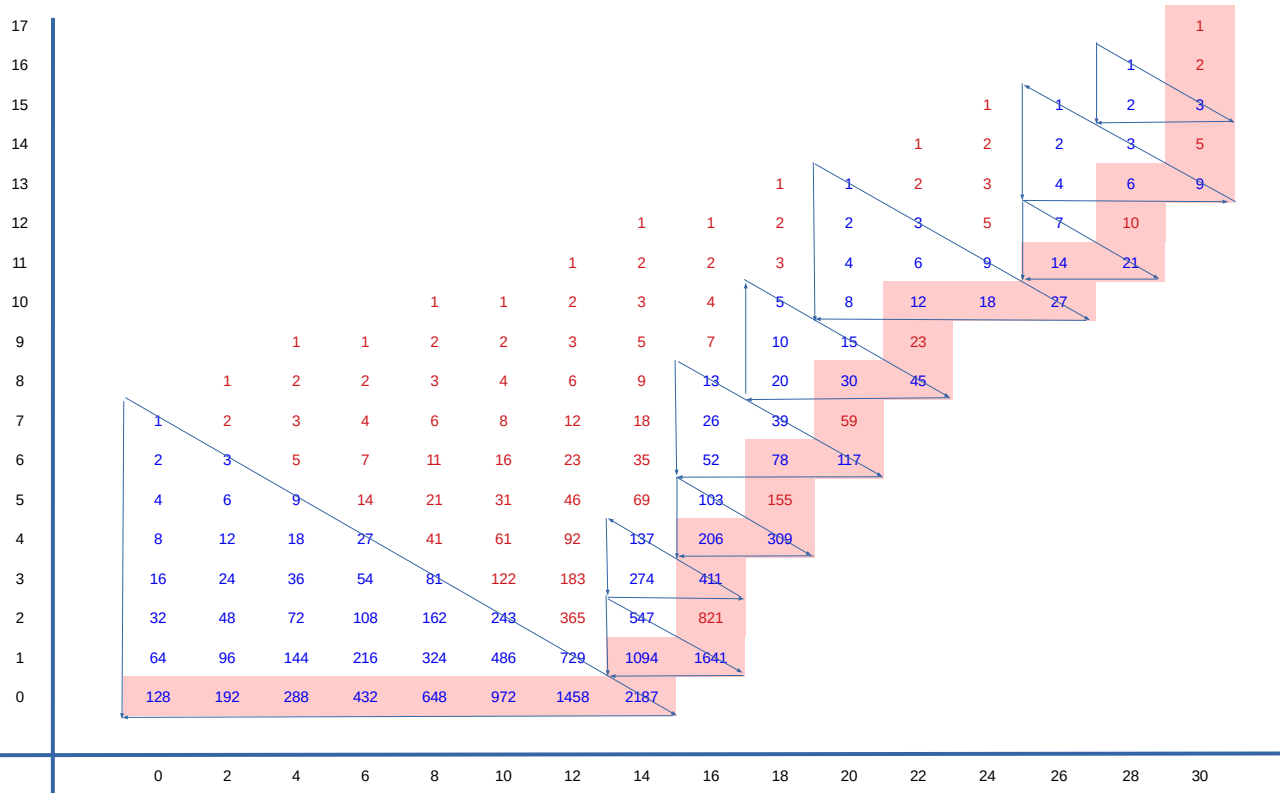
La secuencia recorre la tabla desarrollada a partir del triángulo T(5), porque el primer número impar de la secuencia, el 39, está en este triángulo. Tendrán el mismo recorrido las secuencias empezadas con los números 59, 89 y 134.

Para los números de la prolongación del triángulo, (en color rojo), si se resta 1 al número impar en vez de sumar 1, la tabla es igual de válida:



A continuación la tabla de la secuencia empezada con el número 127, considerando como ciclos de las secuencias las columnas de la tabla de números impares y a las filas de los triángulos, ya que ambas están formadas por los mismos números.

La tabla de la secuencia empezada con el número 127 y los triángulos implicados o ciclos:



La secuencia ha recorrido 30 pasos en horizontal o iteraciones de los números impares y 16 pasos en vertical o iteraciones de los números pares, divisiones entre 2.

Secuencia empezada con el número 127 y los triángulos o ciclos que la forman:

1									
2	3								
4	6	9							
8	12	18	27						
16	24	36	54	81					
32	48	72	108	162	243				
64	96	144	216	324	486	729			
128	192	288	432	648	972	1458	2187		
256	384	576	864	1296	1944	2916	4374	6561	
512	768	1152	1728	2592	3888	5832	8748	13122	19683
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

127,191, 287, 431, 647, 971, 1457, 2186

547									
1094	1641								
2188	3282	4923							
4376	6564	9846	14769						
8752	13128	19692	29538	44307					
17504	26256	39384	59076	88614	132921				
...	...	...	...	...	...	...			

1093, 1640

103										
206	309									
412	618	927								
824	1236	1854	2781							
1648	2472	3708	5562	8343						
3296	4944	7416	11124	16686	25029					
...	...	...	...	...	...	...				

308

13										
26	39									
52	78	117								
104	156	234	351							
208	312	468	702	1053						
416	624	936	1404	2106	3159					
...	...	...	...	...	...	...				

205,

77, 116

5										
10	15									
20	30	45								
40	60	90	135							
80	120	180	270	405						
160	240	360	540	810	1215					
...	...	...	...	...	...	...				

44

1										
2	3									
4	6	9								
8	12	18	27							
16	24	36	54	81						
32	48	72	108	162	243					
...	...	...	...	...	...	...				

29,

11, 17, 26

7										
14	21									
28	42	63								
56	84	126	189							
112	168	252	378	567						
224	336	504	756	1134	1701					
...	...	...	...	...	...	...				

20

13,

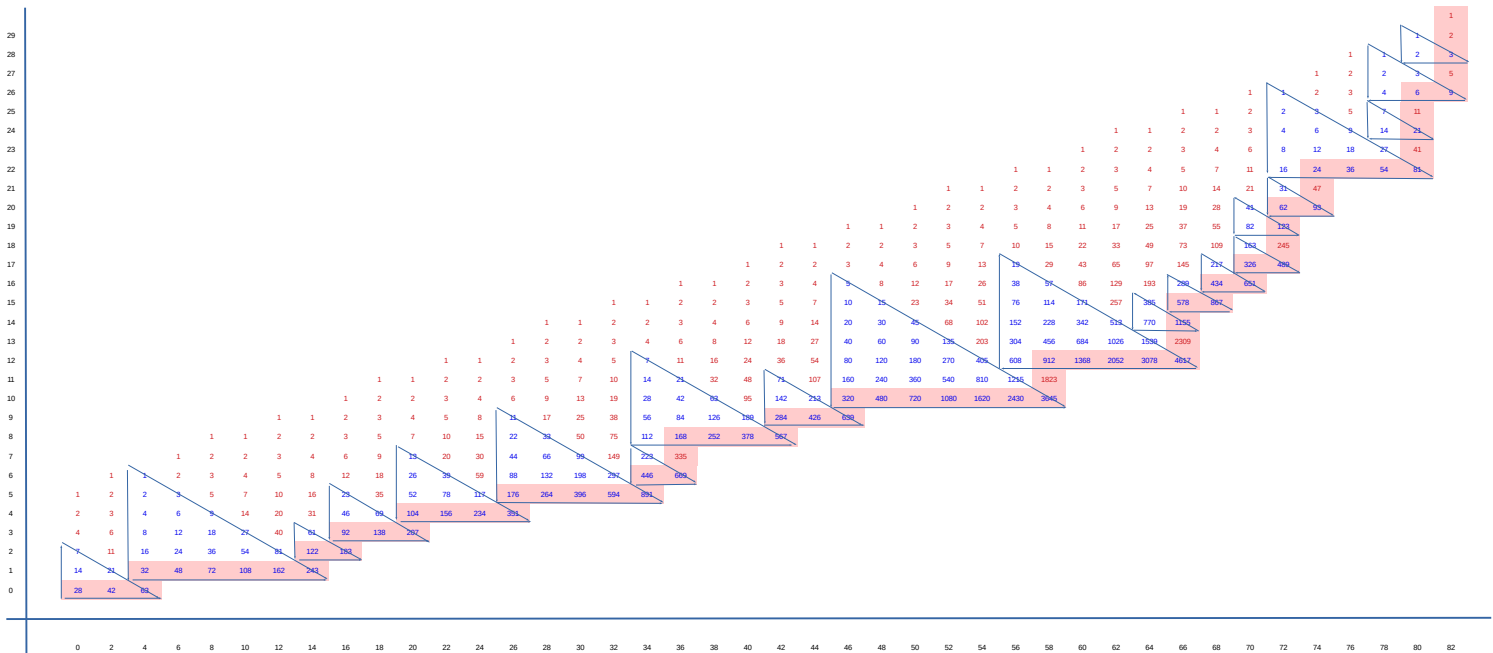
1										
2	3									
4	6	9								
8	12	18	27							
16	24	36	54	81						
32	48	72	108	162	243					
...	...	...	...	...	...	...				

5, 8

La secuencia empezada con el número 27 en las 18 columnas de la tabla o ciclos :

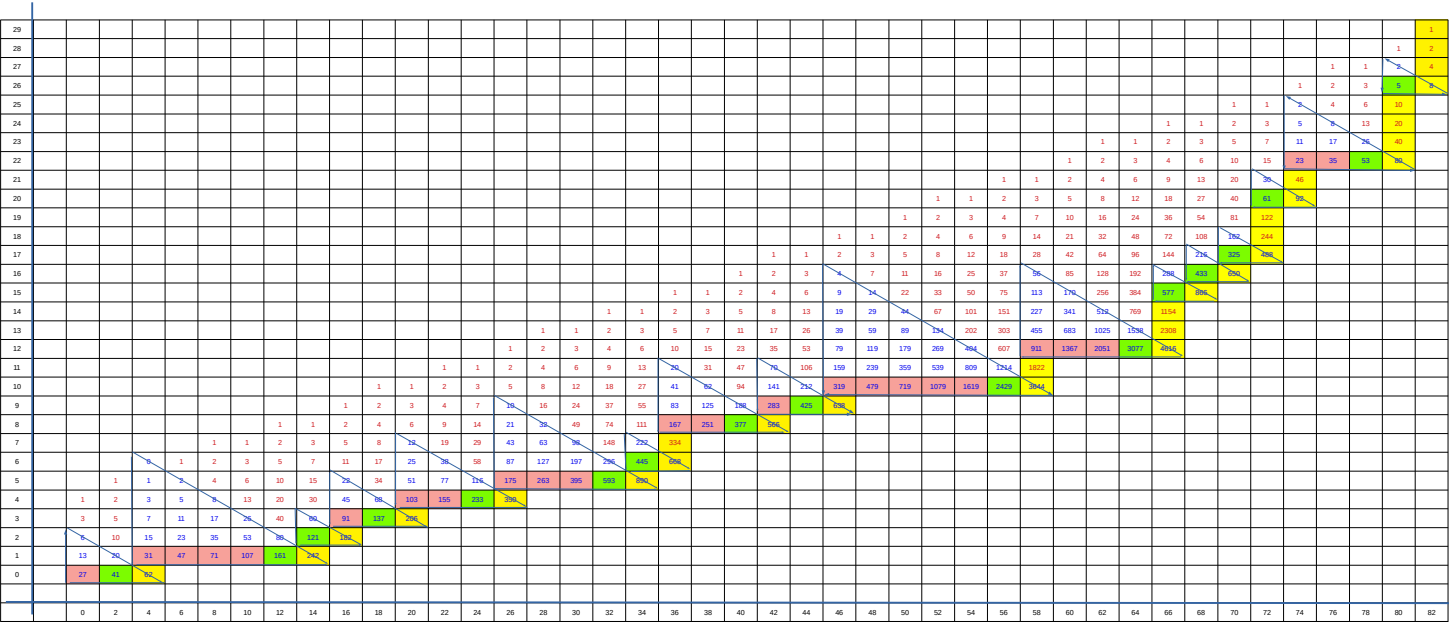
k	14	16	61	46	52	88	223	84	142	160	456	289	217	163	31	12	3	1
n																		
0	27	31	121	91	103	175	445	167	283	319	911	577	433	325	61	23	5	1
1	41	47	182	137	155	263	668	251	425	479	1367	866	650	488	92	35	8	2
2	62	71		206	233	395		377	638	719	2051					53		
3		107			350	593		566		1079	3077					80		
4		161				890				1619	4616							
5		242								2429								
6										3644								
7																		
8																		
9																		

La misma secuencia en la tabla de los triángulos :



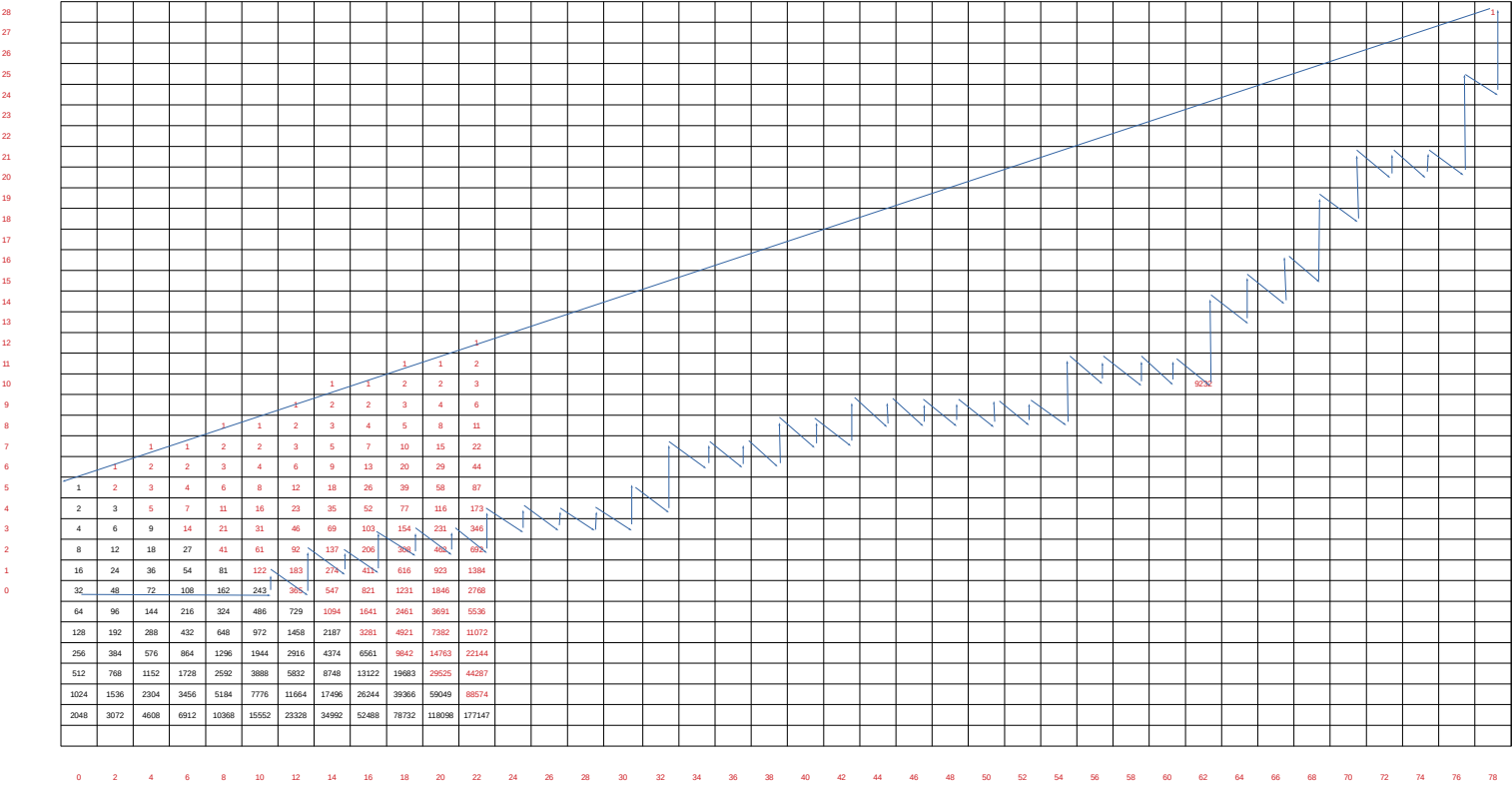
La secuencia empezada con el número 27 tiene 82 iteraciones horizontales de los números impares y 29 iteraciones verticales de los números pares.

También vemos el desarrollo de la secuencia con las columnas de la tabla de los números impares, como filas de los triángulos:



Las filas de los triángulos que forman los ciclos de la secuencia, con los impares de la forma $4n+3$ en color rojo, los impares de la forma $4n+1$ de color verde y los números pares que unen los ciclos en color amarillo.

En la siguiente tabla, una secuencia empezada con el número 31:



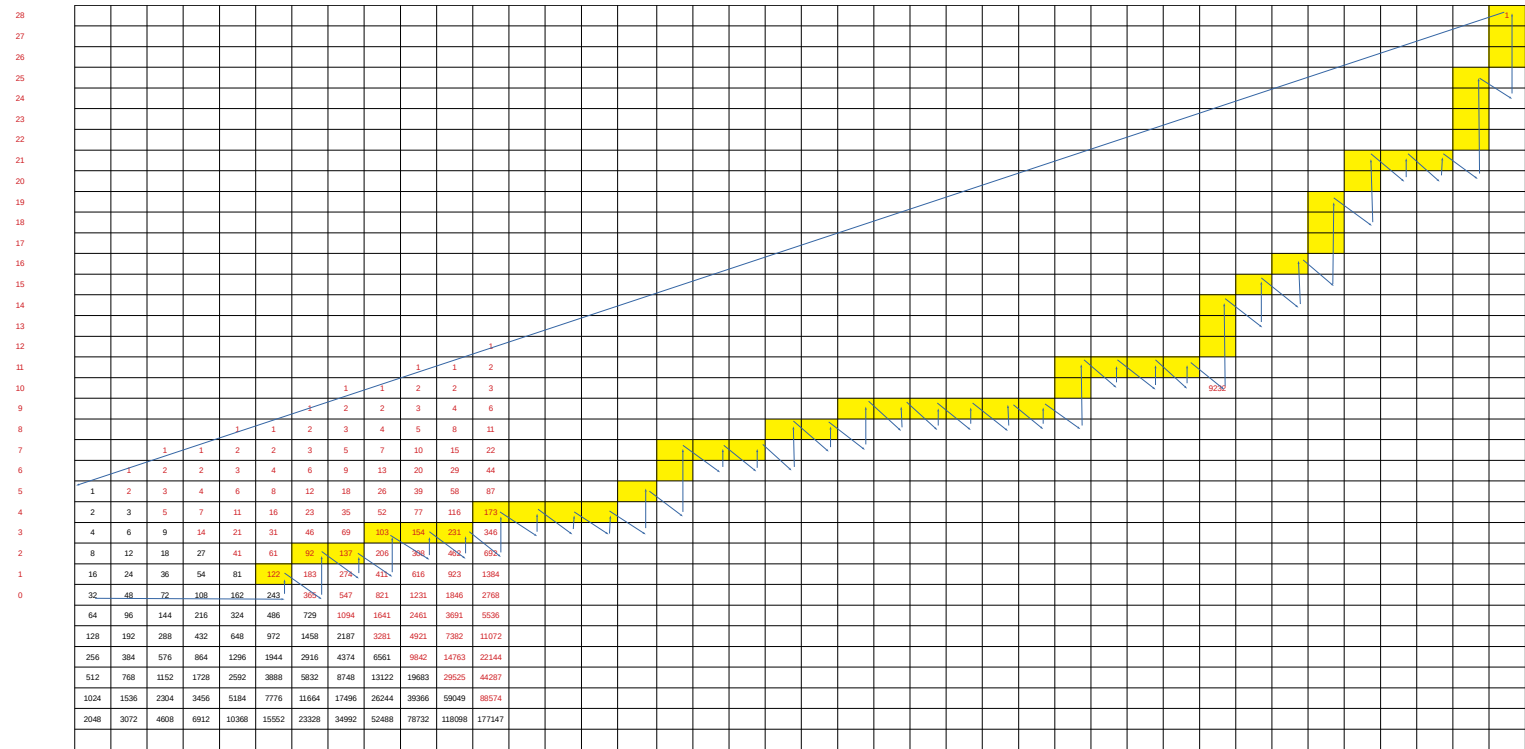
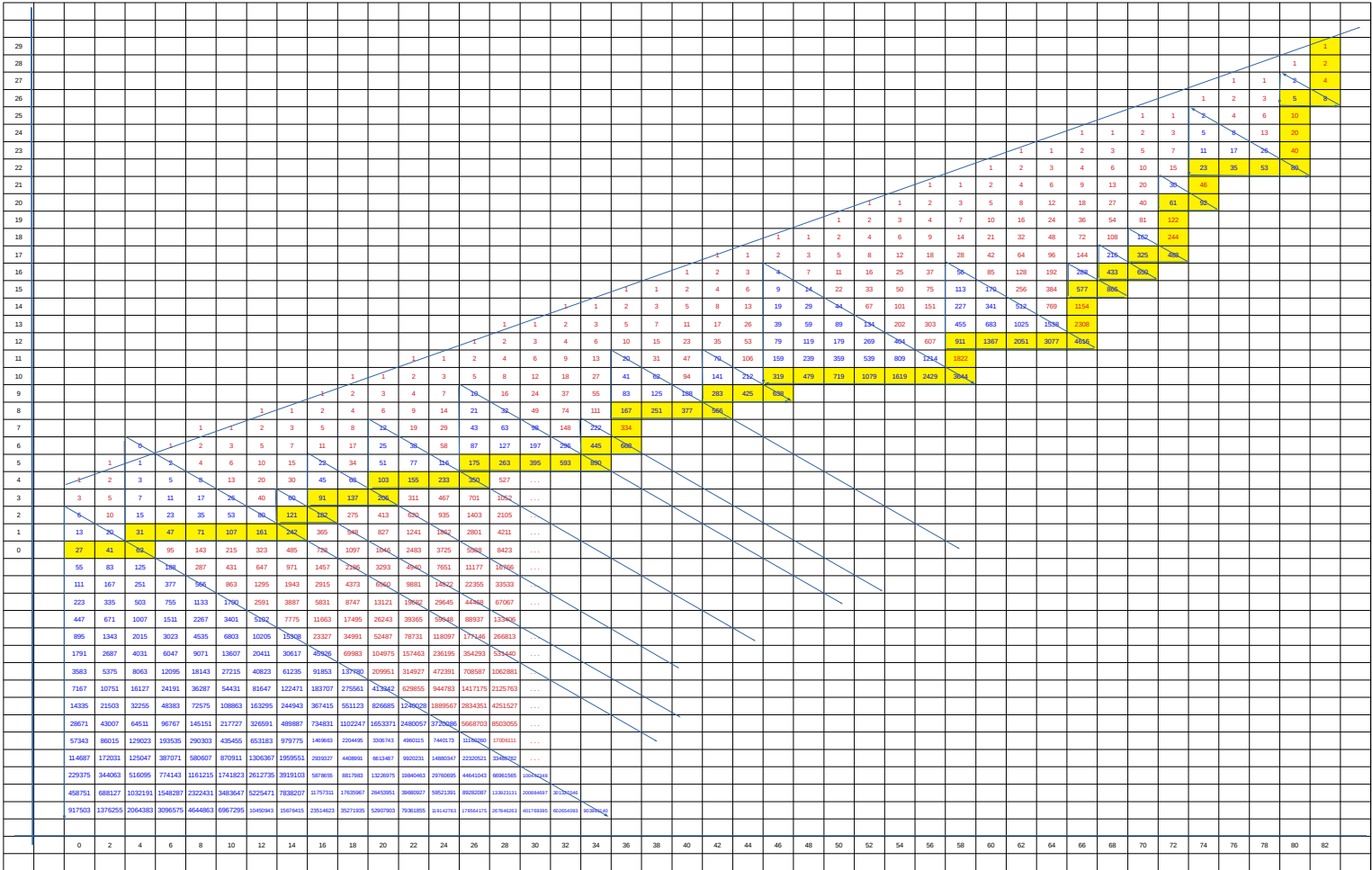


Tabla y los triángulos de la secuencia empezada con el número 27. Se podrían completar todos los números de cada triángulo, pero no son necesarios para ver el desarrollo de la secuencia.



Al aplicar $(3m+1)/2$ a un número impar provoca que la secuencia se mueva a la siguiente columna de la tabla, pero en la misma fila y asciende a filas superiores cuando al final de cada ciclo, el número par es dividido entre 2. En esta tabla, ascender significa acercarse al número 1.

En la tabla, cada ciclo o triángulo está por encima del anterior y la secuencia nunca desciende a una fila inferior.

Tampoco irá en paralelo a la línea de los números 1 ni se separará, porque los ciclos o columnas con la mayor cantidad de números impares (filas más largas) son muy escasas:

En las primeras 10.000 columnas, la que tiene mayor cantidad de números impares es la columna $k(8192)$, con 14 números. Le sigue la columna $k(4096)$ con 13 números, dos columnas tienen 12 números, cinco columnas tienen 11 números, diez columnas con 10 números, veinte columnas con 9 números, etc.

En las primeras 50.000, la columna con más números $k(32768)$ tiene 16.

En las primeras 300.000, la columna con más números $k(262144)$ tiene 19.

En las primeras 1.000.000, la columna con más números $k(524288)$ tiene 20.

Todas las filas de los triángulos o columnas de la tabla son finitas y su último número es par, por lo que inevitablemente acabará en un número 1.

Es una demostración visual de que, aunque los números sufran oscilaciones crecientes y decrecientes, todas las secuencias ascenderán hasta el número 1.

LA CANTIDAD DE NÚMEROS IMPARES que hay en cada columna de la tabla de impares y la cantidad de números pares que hay en la tabla de pares: 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, . . . coincide con la cantidad de dígitos 1 que hay a la derecha del último 0 en la representación en binario de los números impares y con la cantidad de dígitos 0 que hay a la derecha del último 1 en la representación en binario de los números pares. Ejemplo:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
1	11	101	111	1001	1011	1101	1111	10001	10011	10101
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
10	100	110	1000	1010	1100	1110	10000	10010	10100	10110
1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	

La última fila corresponde a la cantidad de números que hay en las columnas de las tablas y forma una secuencia fractal con infinitas secuencias de los números naturales, de la siguiente manera: Los números 1 están en los valores de k impar y los siguientes términos están en $2k$.

Ejemplo: Los términos de la primera secuencia están en $k(1)$, $k(2)$, $k(4)$, $k(8)$, $k(16)$, . . .

Los términos de la segunda secuencia están en $k(3)$, $k(6)$, $k(12)$, $k(24)$, $k(48)$, . . .

Los términos de la tercera secuencia están en $k(5)$, $k(10)$, $k(20)$, $k(40)$, $k(80)$, . . .

Impares	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	6	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	...

También es el valor de n del número par al final de cada columna.

También es la cantidad de dígitos 1 que hay a la derecha después del 0, de los números impares escritos en binario.

Esta es una secuencia fractal y forma infinitas secuencias de los números naturales, de la siguiente manera: Los números 1 están en los valores de k impar y los siguientes términos están en $2k$.

Los términos de la segunda secuencia están en $k(3)$, $k(6)$, $k(12)$, $k(24)$, $k(48)$, ...

Los términos de la terceraera secuencia están en $k(5)$, $k(10)$, $k(20)$, $k(40)$, $k(80)$, ...

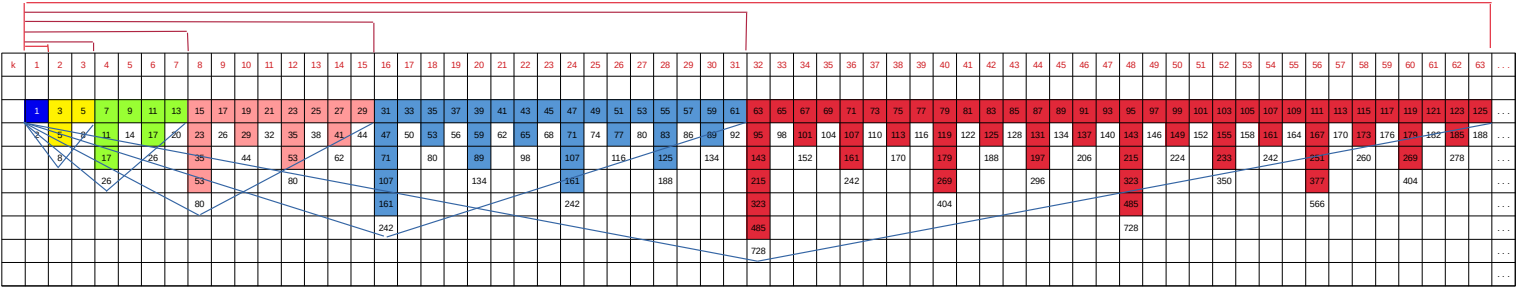
Pares	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	6	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	...

También es el valor de n del número impar al final de cada columna.

También es la cantidad de dígitos 0 que hay a la derecha después del 1, de los números pares escritos en binario.

Esta es una secuencia fractal y forma infinitas secuencias de los números naturales, igual que en la tabla de los números impares.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	...																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	103	105	107	109	111	113	115	117	119	121	123	125	...																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
2	8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	188	197	206	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296	305	314	323	332	341	350	359	368	377	386	395	404	413	422	431	440	449	458	467	476	485	494	503	512	521	530	539	548	557	566	575	584	593	602	611	620	629	638	...																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
3	26	53	80	107	134	161	188	215	242	269	296	323	350	377	404	431	458	485	512	539	566	593	620	647	674	701	728	755	782	809	836	863	890	917	944	971	998	1025	1052	1079	1106	1133	1160	1187	1214	1241	1268	1295	1322	1349	1376	1403	1430	1457	1484	1511	1538	1565	1592	1619	1646	1673	1700	1727	1754	1781	1808	1835	1862	1889	1916	1943	1970	1997	2024	2051	2078	2105	2132	2159	2186	2213	2240	2267	2294	2321	2348	2375	2402	2429	2456	2483	2510	2537	2564	2591	2618	2645	2672	2699	2726	2753	2780	2807	2834	2861	2888	2915	2942	2969	2996	3023	3050	3077	3104	3131	3158	3185	3212	3239	3266	3293	3320	3347	3374	3401	3428	3455	3482	3509	3536	3563	3590	3617	3644	3671	3698	3725	3752	3779	3806	3833	3860	3887	3914	3941	3968	3995	4022	4049	4076	4103	4130	4157	4184	4211	4238	4265	4292	4319	4346	4373	4400	4427	4454	4481	4508	4535	4562	4589	4616	4643	4670	4697	4724	4751	4778	4805	4832	4859	4886	4913	4940	4967	4994	5021	5048	5075	5102	5129	5156	5183	5210	5237	5264	5291	5318	5345	5372	5399	5426	5453	5480	5507	5534	5561	5588	5615	5642	5669	5696	5723	5750	5777	5804	5831	5858	5885	5912	5939	5966	5993	6020	6047	6074	6101	6128	6155	6182	6209	6236	6263	6290	6317	6344	6371	6398	6425	6452	6479	6506	6533	6560	6587	6614	6641	6668	6695	6722	6749	6776	6803	6830	6857	6884	6911	6938	6965	6992	7019	7046	7073	7100	7127	7154	7181	7208	7235	7262	7289	7316	7343	7370	7397	7424	7451	7478	7505	7532	7559	7586	7613	7640	7667	7694	7721	7748	7775	7802	7829	7856	7883	7910	7937	7964	7991	8018	8045	8072	8099	8126	8153	8180	8207	8234	8261	8288	8315	8342	8369	8396	8423	8450	8477	8504	8531	8558	8585	8612	8639	8666	8693	8720	8747	8774	8801	8828	8855	8882	8909	8936	8963	8990	9017	9044	9071	9098	9125	9152	9179	9206	9233	9260	9287	9314	9341	9368	9395	9422	9449	9476	9503	9530	9557	9584	9611	9638	9665	9692	9719	9746	9773	9800	9827	9854	9881	9908	9935	9962	9989	10016	10043	10070	10097	10124	10151	10178	10205	10232	10259	10286	10313	10340	10367	10394	10421	10448	10475	10502	10529	10556	10583	10610	10637	10664	10691	10718	10745	10772	10799	10826	10853	10880	10907	10934	10961	10988	11015	11042	11069	11096	11123	11150	11177	11204	11231	11258	11285	11312	11339	11366	11393	11420	11447	11474	11501	11528	11555	11582	11609	11636	11663	11690	11717	11744	11771	11798	11825	11852	11879	11906	11933	11960	11987	12014	12041	12068	12095	12122	12149	12176	12203	12230	12257	12284	12311	12338	12365	12392	12419	12446	12473	12500	12527	12554	12581	12608	12635	12662	12689	12716	12743	12770	12797	12824	12851	12878	12905	12932	12959	12986	13013	13040	13067	13094	13121	13148	13175	13202	13229	13256	13283	13310	13337	13364	13391	13418	13445	13472	13499	13526	13553	13580	13607	13634	13661	13688	13715	13742	13769	13796	13823	13850	13877	13904	13931	13958	13985	14012	14039	14066	14093	14120	14147	14174	14201	14228	14255	14282	14309	14336	14363	14390	14417	14444	14471	14498	14525	14552	14579	14606	14633	14660	14687	14714	14741	14768	14795	14822	14849	14876	14903	14930	14957	14984	15011	15038	15065	15092	15119	15146	15173	15200	15227	15254	15281	15308	15335	15362	15389	15416	15443	15470	15497	15524	15551	15578	15605	15632	15659	15686	15713	15740	15767	15794	15821	15848	15875	15902	15929	15956	15983	16010	16037	16064	16091	16118	16145	16172	16199	16226	16253	16280	16307	16334	16361	16388	16415	16442	16469	16496	16523	16550	16577	16604	16631	16658	16685	16712	16739	16766	16793	16820	16847	16874	16901	16928	16955	16982	17009	17036	17063	17090	17117	17144	17171	17198	17225	17252	17279	17306	17333	17360	17387	17414	17441	17468	17495	17522	17549	17576	17603	17630	17657	17684	17711	17738	17765	17792	17819	17846	17873	17900	17927	17954	17981	18008	18035	18062	18089	18116	18143	18170	18197	18224	18251	18278	18305	18332	18359	18386	18413	18440	18467	18494	18521	18548	18575	18602	18629	18656	18683	18710	18737	18764	18791	18818	18845	18872	18899	18926	18953	18980	19007	19034	19061	19088	19115	19142	19169	19196	19223	19250	19277	19304	19331	19358	19385	19412	19439	19466	19493	19520	19547	19574	19601	19628	19655	19682	19709	19736	19763	19790	19817	19844	19871	19898	19925	19952	19979	20006	20033	20060	20087	20114	20141	20168	20195	20222	20249	20276	20303	20330	20357	20384	20411	20438	20465	20492	20519	20546	20573	20600	20627	20654	20681	20708	20735	20762	20789	20816	20843	20870	20897	20924	20951	20978	21005	21032	21059	21086	21113	21140	21167	21194	21221	21248	21275	21302	21329	21356	21383	21410	21437	21464	21491	21518	21545	21572	21599	21626	21653	21680	21707	21734	21761	21788	21815	21842	21869	21896	21923	21950	21977	22004	22031	22058	22085	22112	22139	22166	22193	22220	22247	22274	22301	22328	22355	22382	22409	22436	22463	22490	22517	22544	22571	22598	22625	22652	22679	22706	22733	22760	22787	22814	22841	22868	22895	22922	22949	22976	23003	23030	23057	23084	23111	23138	23165	23192	23219	23246	23273	23300	23327	23354	23381	23408	23435	23462	23489	23516	23543	23570	23597	23624	23651	23678	23705	23732	23759	23786	23813	23840	23867	23894	23921	23948	23975	24002	24029	24056	24083	24110	24137	24164	24191	24218	24245	24272	24299	24326	24353	24380	24407	24434	24461	24488	24515	24542	24569	24596	24623	24650	24677	24704	24731	24758	24785	24812	24839	24866	24893	24920	24947	24974	25001	25028	25055	25082	25109	25136	25163	25190	25217	25244	25271	25298	25325	25352	25379	25406	25433	25460	25487	25514	25541	25568	25595	25622	25649	25676	25703	25730	25757	25784	25811	25838	25865	25892	25919	25946	25973	26000	26027	26054	26081	26108	26135	26162	26189	26216	26243	26270	26297	26324	26351	26378	26405	26432	26459	26486	26513	26540	26567	26594	26621	26648	26675	26702	26729	26756	26783	26810	26837	26864	26891	26918	26945	26972	27000	27027	27054	27081	27108	27135	27162	27189	27216	27243	27270	27297	27324	27351	27378	27405	27432	27459	27486	27513	27540	27567	27594	27621	27648	27675	27702	27729	27756	27783	27810	27837	27864	27891	27918	27945	27972	28000	28027	28054	28081	28108	28135	28162	28189	28216	28243	28270	28297	28324	28351	28378	28405	28432	28459	28486	28513	28540	28567	28594	28621	28648	28675	28702	28729	28756	28783	28810	28837	28864	28891	28918	28945	28972	29000	29027	29054	29081	29108	29135	29162	29189	29216	29243	29270	29297	29324	29351	29378	29405	29432	29459	29486	29513	29540	29567	29594	29621	29648	29675	29702	29729	29756	29783	29810	29837	29864	29891	29918	29945	29972	30000	30027	30054	30081	30108	30135	30162	30189	30216	30243	30270	30297	30324	30351	30378	30405	30432



ANEXO 1

Secuencia empezada con el número 2251799813685247, que es el primer número de la columna $k(2^{50})$ de la tabla.

En esta columna están los 50 primeros impares de la secuencia, que son de la forma $4n-1$ y ocupan los pasos pares del 0 al 98. El impar 51º, que es de la forma $4n-3$ en el paso 100 y el par 52º que es el último número de la columna, en el paso 102.

paso: valor

0: 2251799813685247
1: 6755399441055742
2: 3377699720527871
3: 10133099161583614
4: 5066549580791807
5: 15199648742375422
6: 7599824371187711
7: 22799473113563134
8: 11399736556781567
9: 34199209670344702
10: 17099604835172351
11: 51298814505517054
12: 25649407252758527
13: 76948221758275582
14: 38474110879137791
15: 115422332637413374
16: 57711166318706687
17: 173133498956120062
18: 86566749478060031
19: 259700248434180094
20: 129850124217090047
21: 389550372651270142
22: 194775186325635071
23: 584325558976905214
24: 292162779488452607
25: 876488338465357822
26: 438244169232678911
27: 1314732507698036734
28: 657366253849018367
29: 1972098761547055102
30: 986049380773527551
31: 2958148142320582654
32: 1479074071160291327
33: 4437222213480873982
34: 2218611106740436991
35: 6655833320221310974
36: 3327916660110655487
37: 9983749980331966462
38: 4991874990165983231
39: 14975624970497949694
40: 7487812485248974847
41: 22463437455746924542
42: 11231718727873462271
43: 33695156183620386814
44: 16847578091810193407
45: 50542734275430580222
46: 25271367137715290111

47: 75814101413145870334
48: 37907050706572935167
49: 113721152119718805502
50: 56860576059859402751
51: 170581728179578208254
52: 85290864089789104127
53: 255872592269367312382
54: 127936296134683656191
55: 383808888404050968574
56: 191904444202025484287
57: 575713332606076452862
58: 287856666303038226431
59: 86356998909114679294
60: 431784999454557339647
61: 1295354998363672018942
62: 647677499181836009471
63: 1943032497545508028414
64: 971516248772754014207
65: 2914548746318262042622
66: 1457274373159131021311
67: 4371823119477393063934
68: 2185911559738696531967
69: 6557734679216089595902
70: 3278867339608044797951
71: 9836602018824134393854
72: 4918301009412067196927
73: 14754903028236201590782
74: 7377451514118100795391
75: 22132354542354302386174
76: 11066177271177151193087
77: 33198531813531453579262
78: 16599265906765726789631
79: 49797797720297180368894
80: 24898898860148590184447
81: 74696696580445770553342
82: 37348348290222885276671
83: 112045044870668655830014
84: 56022522435334327915007
85: 168067567306002983745022
86: 84033783653001491872511
87: 252101350959004475617534
88: 126050675479502237808767
89: 378152026438506713426302
90: 189076013219253356713151
91: 567228039657760070139454
92: 283614019828880035069727
93: 850842059486640105209182
94: 425421029743320052604591
95: 1276263089229960157813774
96: 638131544614980078906887
97: 1914394633844940236720662
98: 957197316922470118360331
99: 2871591950767410355080994
100: 1435795975383705177540497
101: 4307387926151115532621492
102: 2153693963075557766310746
103: 1076846981537778883155373

104: 3230540944613336649466120
105: 1615270472306668324733060
106: 807635236153334162366530
107: 403817618076667081183265
108: 1211452854230001243549796
109: 605726427115000621774898
110: 302863213557500310887449
111: 908589640672500932662348
112: 454294820336250466331174
113: 227147410168125233165587
114: 681442230504375699496762
115: 340721115252187849748381
116: 1022163345756563549245144
117: 511081672878281774622572
118: 255540836439140887311286
119: 127770418219570443655643
120: 383311254658711330966930
121: 191655627329355665483465
122: 574966881988066996450396
123: 287483440994033498225198
124: 143741720497016749112599
125: 431225161491050247337798
126: 215612580745525123668899
127: 646837742236575371006698
128: 323418871118287685503349
129: 970256613354863056510048
130: 485128306677431528255024
131: 242564153338715764127512
132: 121282076669357882063756
133: 60641038334678941031878
134: 30320519167339470515939
135: 90961557502018411547818
136: 45480778751009205773909
137: 136442336253027617321728
138: 68221168126513808660864
139: 34110584063256904330432
140: 17055292031628452165216
141: 8527646015814226082608
142: 4263823007907113041304
143: 2131911503953556520652
144: 1065955751976778260326
145: 532977875988389130163
146: 1598933627965167390490
147: 799466813982583695245
148: 2398400441947751085736
149: 1199200220973875542868
150: 599600110486937771434
151: 299800055243468885717
152: 899400165730406657152
153: 449700082865203328576
154: 224850041432601664288
155: 112425020716300832144
156: 56212510358150416072
157: 28106255179075208036
158: 14053127589537604018
159: 7026563794768802009
160: 21079691384306406028

161: 10539845692153203014
162: 5269922846076601507
163: 15809768538229804522
164: 7904884269114902261
165: 23714652807344706784
166: 11857326403672353392
167: 5928663201836176696
168: 2964331600918088348
169: 1482165800459044174
170: 741082900229522087
171: 2223248700688566262
172: 1111624350344283131
173: 3334873051032849394
174: 1667436525516424697
175: 5002309576549274092
176: 2501154788274637046
177: 1250577394137318523
178: 3751732182411955570
179: 1875866091205977785
180: 5627598273617933356
181: 2813799136808966678
182: 1406899568404483339
183: 4220698705213450018
184: 2110349352606725009
185: 6331048057820175028
186: 3165524028910087514
187: 1582762014455043757
188: 4748286043365131272
189: 2374143021682565636
190: 1187071510841282818
191: 593535755420641409
192: 1780607266261924228
193: 890303633130962114
194: 445151816565481057
195: 1335455449696443172
196: 667727724848221586
197: 333863862424110793
198: 1001591587272332380
199: 500795793636166190
200: 250397896818083095
201: 751193690454249286
202: 375596845227124643
203: 1126790535681373930
204: 563395267840686965
205: 1690185803522060896
206: 845092901761030448
207: 422546450880515224
208: 211273225440257612
209: 105636612720128806
210: 52818306360064403
211: 158454919080193210
212: 79227459540096605
213: 237682378620289816
214: 118841189310144908
215: 59420594655072454
216: 29710297327536227
217: 89130891982608682

218: 44565445991304341
219: 133696337973913024
220: 66848168986956512
221: 33424084493478256
222: 16712042246739128
223: 8356021123369564
224: 4178010561684782
225: 2089005280842391
226: 6267015842527174
227: 3133507921263587
228: 9400523763790762
229: 4700261881895381
230: 14100785645686144
231: 7050392822843072
232: 3525196411421536
233: 1762598205710768
234: 881299102855384
235: 440649551427692
236: 220324775713846
237: 110162387856923
238: 330487163570770
239: 165243581785385
240: 495730745356156
241: 247865372678078
242: 123932686339039
243: 371798059017118
244: 185899029508559
245: 557697088525678
246: 278848544262839
247: 836545632788518
248: 418272816394259
249: 1254818449182778
250: 627409224591389
251: 1882227673774168
252: 941113836887084
253: 470556918443542
254: 235278459221771
255: 705835377665314
256: 352917688832657
257: 1058753066497972
258: 529376533248986
259: 264688266624493
260: 794064799873480
261: 397032399936740
262: 198516199968370
263: 99258099984185
264: 297774299952556
265: 148887149976278
266: 74443574988139
267: 223330724964418
268: 111665362482209
269: 334996087446628
270: 167498043723314
271: 83749021861657
272: 251247065584972
273: 125623532792486
274: 62811766396243

275: 188435299188730
276: 94217649594365
277: 282652948783096
278: 141326474391548
279: 70663237195774
280: 35331618597887
281: 105994855793662
282: 52997427896831
283: 158992283690494
284: 79496141845247
285: 238488425535742
286: 119244212767871
287: 357732638303614
288: 178866319151807
289: 536598957455422
290: 268299478727711
291: 804898436183134
292: 402449218091567
293: 1207347654274702
294: 603673827137351
295: 1811021481412054
296: 905510740706027
297: 2716532222118082
298: 1358266111059041
299: 4074798333177124
300: 2037399166588562
301: 1018699583294281
302: 3056098749882844
303: 1528049374941422
304: 764024687470711
305: 2292074062412134
306: 1146037031206067
307: 3438111093618202
308: 1719055546809101
309: 5157166640427304
310: 2578583320213652
311: 1289291660106826
312: 644645830053413
313: 1933937490160240
314: 966968745080120
315: 483484372540060
316: 241742186270030
317: 120871093135015
318: 362613279405046
319: 181306639702523
320: 543919919107570
321: 271959959553785
322: 815879878661356
323: 407939939330678
324: 203969969665339
325: 611909908996018
326: 305954954498009
327: 917864863494028
328: 458932431747014
329: 229466215873507
330: 688398647620522
331: 344199323810261

332: 1032597971430784
333: 516298985715392
334: 258149492857696
335: 129074746428848
336: 64537373214424
337: 32268686607212
338: 16134343303606
339: 8067171651803
340: 24201514955410
341: 12100757477705
342: 36302272433116
343: 18151136216558
344: 9075568108279
345: 27226704324838
346: 13613352162419
347: 40840056487258
348: 20420028243629
349: 61260084730888
350: 30630042365444
351: 15315021182722
352: 7657510591361
353: 22972531774084
354: 11486265887042
355: 5743132943521
356: 17229398830564
357: 8614699415282
358: 4307349707641
359: 12922049122924
360: 6461024561462
361: 3230512280731
362: 9691536842194
363: 4845768421097
364: 14537305263292
365: 7268652631646
366: 3634326315823
367: 10902978947470
368: 5451489473735
369: 16354468421206
370: 8177234210603
371: 24531702631810
372: 12265851315905
373: 36797553947716
374: 18398776973858
375: 9199388486929
376: 27598165460788
377: 13799082730394
378: 6899541365197
379: 20698624095592
380: 10349312047796
381: 5174656023898
382: 2587328011949
383: 7761984035848
384: 3880992017924
385: 1940496008962
386: 970248004481
387: 2910744013444
388: 1455372006722

389: 727686003361
390: 2183058010084
391: 1091529005042
392: 545764502521
393: 1637293507564
394: 818646753782
395: 409323376891
396: 1227970130674
397: 613985065337
398: 1841955196012
399: 920977598006
400: 460488799003
401: 1381466397010
402: 690733198505
403: 2072199595516
404: 1036099797758
405: 518049898879
406: 1554149696638
407: 777074848319
408: 2331224544958
409: 1165612272479
410: 3496836817438
411: 1748418408719
412: 5245255226158
413: 2622627613079
414: 7867882839238
415: 3933941419619
416: 11801824258858
417: 5900912129429
418: 17702736388288
419: 8851368194144
420: 4425684097072
421: 2212842048536
422: 1106421024268
423: 553210512134
424: 276605256067
425: 829815768202
426: 414907884101
427: 1244723652304
428: 622361826152
429: 311180913076
430: 155590456538
431: 77795228269
432: 233385684808
433: 116692842404
434: 58346421202
435: 29173210601
436: 87519631804
437: 43759815902
438: 21879907951
439: 65639723854
440: 32819861927
441: 98459585782
442: 49229792891
443: 147689378674
444: 73844689337
445: 221534068012

446: 110767034006
447: 55383517003
448: 166150551010
449: 83075275505
450: 249225826516
451: 124612913258
452: 62306456629
453: 186919369888
454: 93459684944
455: 46729842472
456: 23364921236
457: 11682460618
458: 5841230309
459: 17523690928
460: 8761845464
461: 4380922732
462: 2190461366
463: 1095230683
464: 3285692050
465: 1642846025
466: 4928538076
467: 2464269038
468: 1232134519
469: 3696403558
470: 1848201779
471: 5544605338
472: 2772302669
473: 8316908008
474: 4158454004
475: 2079227002
476: 1039613501
477: 3118840504
478: 1559420252
479: 779710126
480: 389855063
481: 1169565190
482: 584782595
483: 1754347786
484: 877173893
485: 2631521680
486: 1315760840
487: 657880420
488: 328940210
489: 164470105
490: 493410316
491: 246705158
492: 123352579
493: 370057738
494: 185028869
495: 555086608
496: 277543304
497: 138771652
498: 69385826
499: 34692913
500: 104078740
501: 52039370
502: 26019685

503: 78059056
504: 39029528
505: 19514764
506: 9757382
507: 4878691
508: 14636074
509: 7318037
510: 21954112
511: 10977056
512: 5488528
513: 2744264
514: 1372132
515: 686066
516: 343033
517: 1029100
518: 514550
519: 257275
520: 771826
521: 385913
522: 1157740
523: 578870
524: 289435
525: 868306
526: 434153
527: 1302460
528: 651230
529: 325615
530: 976846
531: 488423
532: 1465270
533: 732635
534: 2197906
535: 1098953
536: 3296860
537: 1648430
538: 824215
539: 2472646
540: 1236323
541: 3708970
542: 1854485
543: 5563456
544: 2781728
545: 1390864
546: 695432
547: 347716
548: 173858
549: 86929
550: 260788
551: 130394
552: 65197
553: 195592
554: 97796
555: 48898
556: 24449
557: 73348
558: 36674
559: 18337

560: 55012
561: 27506
562: 13753
563: 41260
564: 20630
565: 10315
566: 30946
567: 15473
568: 46420
569: 23210
570: 11605
571: 34816
572: 17408
573: 8704
574: 4352
575: 2176
576: 1088
577: 544
578: 272
579: 136
580: 68
581: 34
582: 17
583: 52
584: 26
585: 13
586: 40
587: 20
588: 10
589: 5
590: 16
591: 8
592: 4
593: 2
594: 1

LA CONJETURA DE COLLATZ

Esta conjetura, formulada por Lothar Collatz en 1937, dice lo siguiente:

Toma un entero positivo cualquiera. Si es par, divídelo entre dos; si es impar, multiplícalo por tres y súmale 1. Repite el proceso con cada uno de los resultados que vas obteniendo. Sea cual sea el número entero positivo con el que hayas comenzado, al final siempre terminarás con la secuencia 4, 2, 1, y no saldrás de ese bucle.

Esta es mi opinión sobre el problema :

Todos los números naturales se pueden poner como producto de una potencia de dos y su mayor divisor impar.

$$N = 2^{n \cdot m}$$

$2^{0*}(2n-1)$ son todos los números impares $1^*(2n-1)$

$2^{1*}(2n-1)$ son todos los números pares de la forma $2^{*}(2n-1)$

$2^{2*}(2n-1)$ son todos los números pares de la forma $4*(2n-1)$

$2^{3*}(2n-1)$ son todos los números pares de la forma $8^{*}(2n-1)$

• • • • •

Si aplicamos $3n+1$ a un número impar, resulta un número par, y todo número par llega a un número impar por iteraciones sucesivas al dividirlo entre 2. Por esta razón la sucesión está formada por una serie indeterminada de grupos compuestos de uno o más números pares y un número impar, que es el mayor divisor impar de los números pares de su grupo.

En todas las sucesiones el último grupo es el formado por los pares de la forma 2^n y su impar el 1. Los grupos anteriores los forman números pares de la forma $2^n \cdot m$, donde m es el número impar con el que acaba cada grupo.

Como que el impar (m) es divisor de los pares de su grupo, el resultado siempre es 2^n , donde n es el número de divisiones del número par entre dos que son necesarias para llegar al impar.

La tabla que sigue ilustra las sucesiones de los números pares al dividirlos entre dos y el impar al que llegan. “n” potencia de dos es el número de iteraciones necesarias.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	...
1	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	...
2	4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	...
3	8	24	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200	216	232	248	264	...
4	16	48	80	112	144	176	208	240	272	304	336	368	400	432	464	496	528	...
5	32	96	160	224	288	352	416	480	544	608	672	736	800	864	928	992	1056	...
6	64	192	320	448	576	704	832	960	1088	1216	1344	1472	1600	1728	1856	1984	2112	...
7	128	384	640	896	1152	1408	1664	1920	2176	2432	2688	2944	3200	3456	3712	3968	4224	...
8	256	768	1280	1792	2304	2816	3328	3840	4352	4864	5376	5888	6400	6912	7424	7936	8448	...
9	512	1536	2560	3584	4608	5632	6656	7680	8704	9728	10752	11776	12800	13824	14848	15872	16896	...

• • • • •

Ejemplo en que la sucesión empieza con el 928:

$$29 \times 32 = 928, \quad \Rightarrow \quad 928/29 = 32$$

$$(29 \times 32)/2 = 464, \quad \Rightarrow \quad 464/29 = 16$$

$$(29 \times 32)/4 = 232, \quad \Rightarrow \quad 232/29 = 8$$

$$(29 \times 32)/8 = 116, \quad \Rightarrow \quad 116/29 = 4$$

$$(29 \times 32)/16 = 58, \quad \Rightarrow \quad 58/29 = 2$$

$$(29 \times 32)/32 = 29, \quad \Rightarrow \quad 29/29 = 1$$

Si aplicásemos $3n+1$ al impar 29, resulta 88

$$11 \times 8 = 88, \quad \Rightarrow \quad 88/11 = 8$$

$$(11 \times 8)/2 = 44, \quad \Rightarrow \quad 44/11 = 4$$

$$(11 \times 8)/4 = 22, \quad \Rightarrow \quad 22/11 = 2$$

$$(11 \times 8)/8 = 11, \quad \Rightarrow \quad 11/11 = 1$$

Si aplicásemos $3n+1$ al impar 11, resulta 34

$$17 \times 2 = 34, \quad \Rightarrow \quad 34/17 = 2$$

$$(17 \times 2)/2 = 17, \quad \Rightarrow \quad 17/17 = 1$$

Si aplicásemos $3n+1$ al impar 17, resulta 52

$$13 \times 4 = 52, \quad \Rightarrow \quad 52/13 = 4$$

$$(13 \times 4)/2 = 26, \quad \Rightarrow \quad 26/13 = 2$$

$$(13 \times 4)/4 = 13, \quad \Rightarrow \quad 13/13 = 1$$

El 13 se convierte en 40

$$5 \times 8 = 40, \quad \Rightarrow \quad 40/5 = 8$$

$$(5 \times 8)/2 = 20, \quad \Rightarrow \quad 20/5 = 4$$

$$(5 \times 8)/4 = 10, \quad \Rightarrow \quad 10/5 = 2$$

$$(5 \times 8)/8 = 5, \quad \Rightarrow \quad 5/5 = 1$$

El 5 se convierte en el 16

$$1 \times 16 = 16, \quad \Rightarrow \quad 16/1 = 16$$

$$(1 \times 16)/2 = 8, \quad \Rightarrow \quad 8/1 = 8$$

$$(1 \times 16)/4 = 4, \quad \Rightarrow \quad 4/1 = 4$$

$$(1 \times 16)/8 = 2, \quad \Rightarrow \quad 2/1 = 2$$

$$(1 \times 16)/16 = 1, \quad \Rightarrow \quad 1/1 = 1$$

Aquí finalizaría la sucesión, o entraríamos en el bucle del 4, 2, 1, aplicando $3n+1$. Pero es suficiente hacer la sucesión con el primer tramo para comprobar que cualquier número par acaba en 1 después de n divisiones entre 2, porque en este caso el último término es 29 y

$$(29 \times 32)/32 = 29 \Rightarrow 29/29 = 1$$

Podemos decir que la solución y la demostración de la conjetura es la conjetura misma.

Todos los números pares de la tabla son el producto de $2^n(2n-1)$. También los impares, porque $2^0(2n-1) = 2n-1$. Así pues, todos los números de cualquier fila 2^n son iguales al dividirlos entre sus correspondientes impares $(2n-1)$.

$$16/1 = 48/3 = 80/5 = 112/7 = 144/9 = 176/11 = 208/13 = 240/15 \dots\dots$$

Esto quiere decir que cualquier operación aplicada a uno de esos números, la podemos hacer a cualquiera de ellos, obteniendo el mismo resultado.

Si dividimos entre 2 : $(16/1)/2 = (208/13)/2$

Si elevamos a la n potencia : $(264/33)^n = (8/1)^n$

.....

Examinando la tabla podríamos pensar que existen más números pares que impares, pues vemos que en cada columna hay un solo número impar e infinitos números pares.

Pero nos damos cuenta de que no es así cuando escribimos los números en la tabla de manera ordenada: El primer número, el 1 es el que encabeza la primera fila de los impares, $2^0(2n-1)$.

El segundo, el 2 es el que encabeza la segunda fila, que es la de los pares de la forma $2^1(2n-1)$.

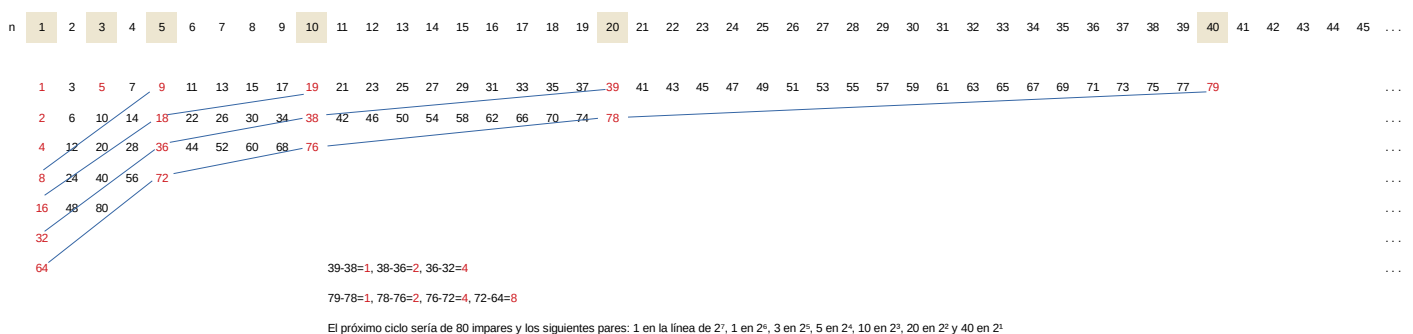
El tercero, el 3 es el segundo impar de su fila.

El número 4 es el primer número de la tercera fila, que son los pares de la forma $2^2(2n-1)$.

De esta manera, los números van apareciendo en la tabla siguiendo un estricto orden.

En la segunda fila hay una cantidad de números pares equivalente al 50% de los números impares de la primera fila. En la tercera fila hay un 50% de los números de la segunda fila. En la cuarta fila, un 50% de la tercera. Las últimas filas las ocupan 5 números, tres números en la antepenúltima y un número en las dos últimas filas.

Este orden es siempre igual : Empezando por las últimas filas, si contamos los números, hay los siguientes: 1, 1, 3, 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, . . . La primera fila, que es la que concentra mayor cantidad de números, es la de los impares. Las siguientes filas las ocupan los números pares en la forma descrita.



En esta tabla vemos el desarrollo en el orden de los números naturales y su proporción en los lugares que ocupan. La proporción en las filas ya la hemos descrita anteriormente.

La proporción en las columnas es esta :

En la primera columna 6 pares de la forma $2^n \cdot 1$ que llegan al 1 después de “n” iteraciones de dividirlos entre dos.

En la segunda columna 4 pares de la forma $2^n \cdot 3$, que llegan al 3 después de “n” iteraciones de dividirlos entre dos.

En la tercera columna 4 pares de la forma $2^n \cdot 5$, que llegan al 5 después de “n” iteraciones de dividirlos entre dos.

En la cuarta columna 3 pares de la forma $2^n \cdot 7$, que llegan al 7 después de “n” iteraciones de dividirlos entre dos.

En la quinta columna 3 pares de la forma $2^n \cdot 9$, que llegan al 9 después de “n” iteraciones de dividirlos entre dos.

De la sexta columna a la 10 columna, 2 pares en cada una de la forma $2^n \cdot 11$, $2^n \cdot 13$, $2^n \cdot 15$, $2^n \cdot 17$, $2^n \cdot 19$, que llegan al 11, 13, 15, 17, y 19 después de n iteraciones de dividirlos entre dos.

Por último un par en cada una de las filas 11 a 20.

Hemos escrito 40 números impares y 40 números pares, de los cuales :

Un 15% son de la forma 2^n .

Un 10% de las formas $2^n \cdot 3$ y $2^n \cdot 5$.

Un 7,5% de las formas $2^n \cdot 7$ y $2^n \cdot 9$.

Un 5% de las formas $2^n \cdot 11$, $2^n \cdot 13$, $2^n \cdot 15$, $2^n \cdot 17$ y $2^n \cdot 19$.

Finalmente un 2,5% de las formas 2^n , donde $n(1)$, los más numerosos.

Vemos que un 50% de la cantidad de los números impares son números pares que llegan a los primeros impares 1, 3, 5, 7, . . . después de “n” iteraciones al dividirlos entre dos.

Esta proporción es el equilibrio de los números y habría que tenerla en cuenta siempre, no solamente en la conjetura de Collatz, sino también en otros escenarios.

La tabla siguiente representa los 40 números pares formados a partir de los 40 números impares después de aplicarles $3n+1$.

La fila 1 la forman 20 números pares de la forma $2(6n-1)$

La fila 2 la forman 10 números pares de la forma $4(6n-5)$

La fila 3 la forman 5 números pares de la forma $8(6n-1)$

La fila 4 la forman 3 números pares de la forma $16(6n-5)$

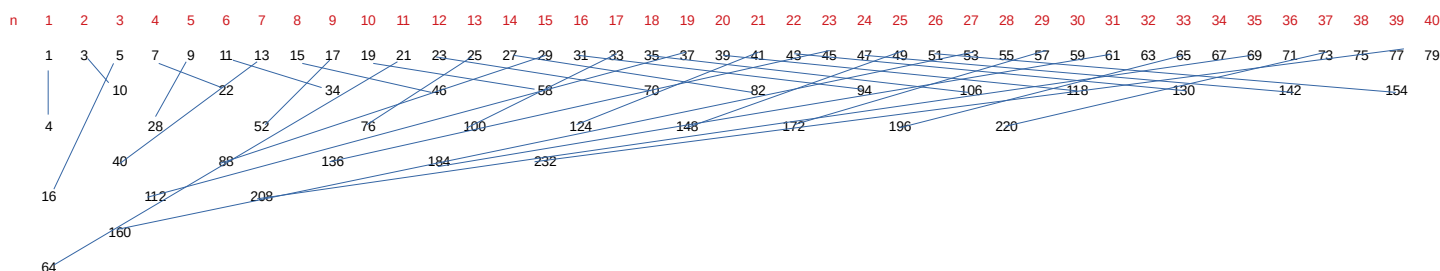
La fila 5 la forman 1 número par de la forma $32(6n-1)$

La fila 6 la forman 1 número par de la forma $64(6n-5)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40					
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79						
	10		22		34		46		58		70		82		94		106		118		130		142		154		166		178		190		202		214		226		238	...					
4		28		52		76		100		124		148		172		196		220		244		268		292		316		340		364		388		412		436		460		484	...				
	40		88		136		184		232		280		328		376		424		472		520		568		616		664		712		760		808		856		904		952		1000	...			
16		112		208		304		400		496		592		688		784		880		976		1072		1168		1264		1360		1456		1552		1648		1744		1840		1936		2032	...		
	160		320		480		640		800		960		1120		1280		1440		1600		1760		1920		2080		2240		2400		2560		2720		2880		3040		3200		3360		3520	...	
64		160		320		480		640		800		960		1120		1280		1440		1600		1760		1920		2080		2240		2400		2560		2720		2880		3040		3200		3360		3520	...

Comprobamos que aplicando $3n+1$ a un impar, nunca se forman pares de la forma $2^n \cdot 3$, $2^n \cdot 9$, $2^n \cdot 15$, $2^n \cdot 21$, ... por lo que un mayor número de pares llegan al 1, 5, 7, 11, 13, . . . que llegan al 1 en pocas iteraciones.

Esta tabla es válida para una sucesión de Collatz que empiece con cualquier número par que sea el producto de algún número impar de los 40 que hay en la tabla con cualquier potencia de dos.



Estos son los 40 números pares generados por los 40 números impares al aplicarles $3n+1$.

También se forman con la misma proporción : 1, 1, 3, 5, 10, 20. . . .

Los impares llegan a otros impares por iteraciones sucesivas de divisiones entre dos. Ejemplo: El 17 llega al 13, éste al 5 y éste al 1. El número 4 solamente llega al impar 1, por esa razón se entra en el bucle 4, 2, 1. El número 2 no lo forma ningún impar.

Los impares 3, 7, 11, 15, 19, 23, . . . de la forma $4n+3$ producen los números pares de la forma $2(6n-1)$, situados en la primera fila de la tabla y siempre por delante del impar en una situación progresiva.

O sea, que se alejan progresivamente de las primeras columnas de la tabla, donde están los otros números pares.

Los impares 5, 9, 13, 17, 21, 25, . . . de la forma $4n+1$ forman el resto de los números pares, situados siempre por detrás del impar, en las filas 2 y siguientes.

Los impares de la forma $4n-1$ forman los pares que con solamente una división entre 2 llegan al siguiente impar en la sucesión.

Sin embargo, los números impares de la forma $4n+1$ producen todos los demás pares que necesitan más iteraciones de divisiones entre 2 para llegar al siguiente impar de la sucesión. Son de la forma $4(6n-5)$, $8(6n-1)$, $16(6n-5)$, $32(6n-1)$, $64(6n-5)$, . . .

Los impares de la forma $4n+3$ se alejan del inicio de la tabla (primera columna), mientras que los impares de la forma $4n+1$ se acercan. Parece que la columna de los números 2^n repele a los primeros y atrae a los segundos.

Si imaginamos esta tabla en 3d, se parecería a un remolino como los que se forman cuando el agua escapa por un agujero. Los impares de la forma $4n+1$, generan los pares más pesados que se hunden en el agua y son engullidos irremediabilmente.

Sin embargo, los impares de la forma $4n+3$ generan los pares más ligeros que están más cerca de la superficie e intentan alejarse del centro hasta que se cruzan con los que se precipitan hacia el fondo y son arrastrados también. El centro del remolino es la primera columna de la tabla de los números 2^n , que acaban en 4, 2, 1 al ser divididos entre 2.

La zona con más actividad es la comprendida entre los valores de $n(20)$ y $n(40)$ que corresponde a la última mitad de la tabla. Es la zona externa del remolino donde la fuerza de atracción es menor.

No puedo explicarlo mediante fórmulas matemáticas, pero estoy convencido de que esa es la razón por la cual las sucesiones de Collatz siempre finalizan en 4, 2, 1.

Después de algunos meses de escribir esto me he dado cuenta que en el problema de Collatz, no son tan importantes los números pares, pues son solamente el vehículo para llegar a un impar después de las divisiones entre dos necesarias.

Para entender el problema me he centrado exclusivamente en los números impares, excluyendo los números pares.

Los números impares son en general de la forma $2n-1$. Pero en este caso consideraremos que hay tres tipos diferentes de números impares: Los de la forma $6n-1$, $6n-3$ y $6n-5$.

Los tipo $6n-1$ son: 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, ... Sus dígitos suman 5, 2, 8.

Los tipo $6n-3$ son: 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, ... Sus dígitos suman 3, 9, 6.

Los tipo $6n-5$ son: 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, ... Sus dígitos suman 1, 7, 4.

En el problema de Collatz, hay infinitos números impares que después de aplicarles $3n+1$ y dividido el resultado por dos las veces necesarias siempre llegan a otro número impar (m).

Dos fórmulas sirven para calcular dichos impares: $1/3(m \cdot 4^{n-1})$ y $1/6(m \cdot 4^{n-2})$

Con la primera calculamos todos los números impares que llegan a cualquier impar del tipo $6n-5$ y con la segunda los impares que llegan a cualquier número impar del tipo $6n-1$.

No existe ningún número impar que llegue a los impares del tipo $6n-3$.

Calculamos por ejemplo todos los números impares que llegan al impar (m).

Los que llegan al 5, $1/6(5 \cdot 4^{n-2}) = 3, 13, 53, 213, 853, 3413, ...$

Los que llegan al 11, $1/6(11 \cdot 4^{n-2}) = 7, 29, 117, 469, 1877, ...$

Los que llegan al 1, $1/3(1 \cdot 4^{n-1}) = 1, 5, 21, 85, 341, ...$

Los que llegan al 7, $1/3(7 \cdot 4^{n-1}) = 9, 37, 149, 597, ...$

m		n	1	2	3	4	5	
1	$(1 \cdot 4^n - 1)/3$		1	5	21	85	341	
7	$(7 \cdot 4^n - 1)/3$		9	37	149	597	2389	
13	$(13 \cdot 4^n - 1)/3$		17	69	277	1109	4437	
19	$(19 \cdot 4^n - 1)/3$		25	101	405	1621	6485	
25	$(25 \cdot 4^n - 1)/3$		33	133	533	2133	8533	
.....								

m		n	1	2	3	4	5	
5	$(5 \cdot 4^n - 2)/6$		3	13	53	213	853	
11	$(11 \cdot 4^n - 2)/6$		7	29	117	469	1877	
17	$(17 \cdot 4^n - 2)/6$		11	45	181	725	2901	
23	$(23 \cdot 4^n - 2)/6$		15	61	245	981	3925	
29	$(29 \cdot 4^n - 2)/6$		19	77	309	1237	4949	
.....								

Calculamos los impares que llegan al 1 con la fórmula $1/3(m \cdot 4^n - 1)$, o sea, 1, 5, 21, 85, ...

pero también $2^0=1$, $2^0+2^2=5$, $2^0+2^2+2^4=21$, $2^0+2^2+2^4+2^6=85$

Todos los impares que llegan al 1 son igual a la suma de potencias de dos con exponente par.

Los impares que llegan al 7 con la misma fórmula, $1/3(m \cdot 4^n - 1) = 9, 37, 149, 597, \dots$

pero también $2^0+2^2=9$, $2^0+2^2+2^4=37$, $2^0+2^2+2^4+2^6=149$.

Los impares que llegan al 13 son : $1/3(m \cdot 4^n - 1) = 17, 69, 277, 1109, \dots$

pero también $2^0+4 \cdot 2^2=17$, $2^0+2^2+4 \cdot 2^4=69$, $2^0+2^2+2^4+4 \cdot 2^6=277$

Los impares que llegan al 19 son : $1/3(m \cdot 4^n - 1) = 25, 101, 405, 1621, \dots$

pero también $2^0+6 \cdot 2^2=25$, $2^0+2^2+6 \cdot 2^4=101$, $2^0+2^2+2^4+6 \cdot 2^6=405$

Los impares que llegan al 25 son : $1/3(m \cdot 4^n - 1) = 33, 133, 533, 2133, \dots$

pero también $2^0+8 \cdot 2^2=33$, $2^0+2^2+8 \cdot 2^4=133$, $2^0+2^2+2^4+8 \cdot 2^6=533$

Los impares 1, 7, 13, 19, 25, son los cinco primeros de la forma $6n-5$, que sus dígitos suman 1, 7, 4 y aplicamos la fórmula $1/3(m \cdot 4^{n-1})$, donde m es el impar, para calcular los impares que llegan a ellos.

Los impares 5, 11, 17, 23, 29, son los cinco primeros de la forma $6n-1$, que sus dígitos suman 5, 2, 8 y aplicamos la fórmula $1/6(m \cdot 4^{n-2})$, donde m es el impar, para calcular los impares que llegan a ellos.

Los impares que llegan al 5 son : $1/6(5 \cdot 4^{n-2}) = 3, 13, 53, 213, \dots$

pero también $1+2=3$, $1+2 \cdot 2+8=13$, $1+2(2+8)+32=53$, $1+2(2+8+32)+128=213$

La distancia entre los impares que llegan a m es igual a $m \cdot 2^{(2n-1)}$. Ejemplo para los impares que llegan a 5:

Calculamos el primer impar que llega a 5 con la fórmula $1/6(5 \cdot 4^{n-2}) = 3$

El siguiente impar es $3+5 \cdot 2^{(2n-1)}=13$

El siguiente impar es $13+5 \cdot 2^{(2n-1)}=53$ y así de manera infinita.

Para calcular los impares de manera inversa, o sea descendente, aplicamos $(n-1)/4$, donde n es el impar inicial y siguientes. Ejemplo si partimos del impar 873813 después de 9 veces llegamos al 3, que es el primer impar que llega al 5.

$(873813-1)/4=218453$, $-1/4=54613$, $-1/4=13653$, $-1/4=3413$, $-1/4=853$, $-1/4=213$, $-1/4=53$, $-1/4=13$, $-1/4=3$

Para entender el problema me imagino una carretera con desvíos a derecha e izquierda.

Estamos en la carretera llamada "ruta 1". El primer desvío a la derecha es la "ruta 5" ($6n-1$). El próximo desvío a la izquierda es una carretera sin salida, pues es la ruta del 21 ($6n-3$). El siguiente desvío es a la izquierda, la "ruta 85" ($6n-5$). Continuando por esa carretera seguimos encontrando infinitos desvíos a derecha e izquierda y carreteras sin salida.

Ahora volvemos al principio y tomamos la carretera "ruta 5". Nos damos cuenta que es otra carretera similar a la primera, con desvíos a derecha e izquierda y otras carreteras sin salida.

A la derecha tenemos la "ruta 3" sin salida. Después a la izquierda la "ruta 13" ($6n-5$). El siguiente desvío a la derecha es la "ruta 53" ($6n-1$). El próximo es otra carretera sin salida, la "ruta 213".

Si tomamos la "ruta 13" nos encontramos nuevamente en otra carretera similar a las anteriores, con desvíos a derecha e izquierda y carreteras sin salida. Los desvíos de esta carretera son "ruta 17", "ruta 69", "ruta 277", etc.

Me imagino una fotografía aérea de este entramado de carreteras, pero con solamente el principio, con las cuatro primeras carreteras de cada desvío, porque con más me es imposible poder imaginarla.

Un número impar cualquiera es como un vehículo en una carretera con su nombre que está conectada al gigantesco entramado de carreteras que imaginamos como un infinito fractal.

Al aplicarle $3n+1$ es como poner las coordenadas al GPS y las sucesivas divisiones entre dos es la distancia recorrida hasta el próximo desvío, que es otra carretera con otro nombre. Nuevamente $3n+1$ y las divisiones de los pares le indicará el nombre de la próxima ruta que debe tomar. El final del viaje será siempre la "ruta 1".

Para que el coche no se pierda con tantas carreteras y desvíos, hemos imaginado que no tienen motor y que todo el entramado tiene pendiente hacia el inicio de la "ruta 1". De esta manera, todos los coches van cayendo por inercia por las diferentes carreteras, desde su posición inicial hasta llegar al final, la "ruta 1".

Para crear esta ruta podemos aplicar este método:

Vamos a crear una sucesión que empezando con cualquier número entero positivo acabará siempre en el número 1.

Si empezamos con un número par, lo tenemos que multiplicar por 3, sumarle 1 y dividirlo por 4. Si es un número impar, le tenemos que restar 1 y dividirlo entre 4. Si el número no es divisible entre 4, lo multiplicaremos por 3, le sumaremos 1 y lo dividiremos por 2. Siguiendo estas tres reglas, la sucesión de números impares siempre acabará en el número 1.

Ejemplo: Empezamos la sucesión con el número 65, el número siguiente lo calculamos $(65-1)/4=16$, como es par hacemos $(3*16+1)/4=13$. El tercer número: $(13-1)/4=3$, como es par hacemos $(3*3+1)/4=1$. El cuarto número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. El quinto número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. El sexto número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. El séptimo número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. El octavo número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. El noveno número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. El décimo número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. El undécimo número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. Ahora $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. Seguimos obteniendo 0 y 1, 0, 1, 0, 1, ...

La sucesión está formada por los números: 65, 49, 37, 9, 7, 11, 17, 13, 3, 5, 1, 0, 1, 0, 1, ...

Reglas a aplicar: Si el número (m) es impar hacer $(m-1)/4$. Si el resultado es un número decimal, hacer $(3*m+1)/2$. Si el resultado es un número par, hacer $(3*m+1)/4$

Vemos que para calcular los impares que llegan a un impar : $4*m+1$, donde m es el primero de ellos.

$4*1+1=5$, $4*5+1=21$, $4*21+1=85$, $4*85+1=341$, $4*341+1=1365$, ... son los impares que llegan al 1.

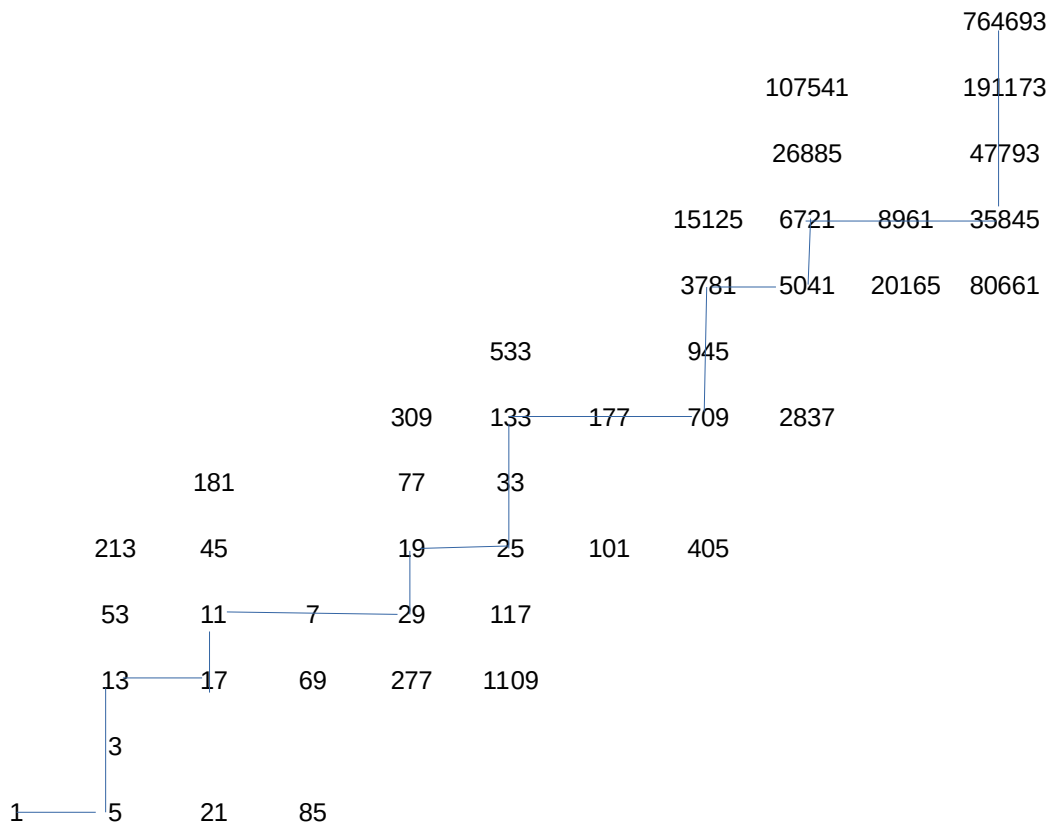
$4*3+1=13$, $4*13+1=53$, $4*53+1=213$, $4*213+1=853$, $4*853+1=3413$, ... son los impares que llegan al 5.

Vamos a crear una sucesión que empezando con cualquier número entero positivo acabará siempre en el número 1.

Si empezamos con un número par, lo tenemos que multiplicar por 3, sumarle 1 y dividirlo por 4. Si es un número impar, le tenemos que restar 1 y dividirlo entre 4. Si el número no es divisible entre 4, lo multiplicaremos por 3, le sumaremos 1 y lo dividiremos por 2. Siguiendo estas tres reglas, la sucesión de números impares siempre acabará en el número 1.

Ejemplo: Empezamos la sucesión con el número 65, el número siguiente lo calculamos $(65-1)/4=16$, como es par hacemos $(3*16+1)/4=13$. El tercer número: $(13-1)/4=3$, como es par hacemos $(3*3+1)/4=1$. El cuarto número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. El quinto número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. El sexto número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. El séptimo número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. El octavo número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. El noveno número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. El décimo número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. El undécimo número: $(1-1)/4=0$, como es par hacemos $(3*0+1)/4=1$. La sucesión está formada por los números: 65, 49, 37, 9, 7, 11, 17, 13, 3, 5, 1

Reglas a aplicar: Si el número (m) es impar hacer $(m-1)/4$. Si no es divisible hacer $(3*m+1)/2$. Si el número es par hacer $(3*m+1)/4$



En este ejemplo vemos la ruta del impar 764693 hasta llegar al 1. La ruta se sigue de esta forma:

$(764693-1)/4=191173$, $(191173-1)/4=47793$, $(47793-1)/4=11948$, porque ese número es par, hay que hacer: $(3*47793+1)/4=35845$,
 Seguimos, $(35845-1)/4=8961$, $(8961-1)/4=2240$, como que es par hacemos $(3*8961+1)/4=6721$, $(6721-1)/4=1680$, como que es
 par hacemos $(3*6721+1)/4=5041$, $(5041-1)/4=1260$, como es par hacemos $(3*5041+1)/4=3781$, $(3781-1)/4=945$, $(945-1)/4=236$,
 como que es par hacemos $(3*945+1)/4=709$, $(709-1)/4=177$, $(177-1)/4=44$, como que es par hacemos $(3*177+1)/4=133$,
 $(133-1)/4=33$, $(33-1)/4=8$, como que es par hacemos $(3*33+1)/4=25$, $(25-1)/4=6$, como que es par hacemos $(3*25+1)/4=19$,
 $(19-1)/4=4,5$ como que es un número decimal hacemos $(3*19+1)/2=29$, $(29-1)/4=7$, $(7-1)/4=1,5$ como es decimal hacemos
 $(3*7+1)/2=11$, $(11-1)/4=2,5$ como es decimal hacemos $(3*11+1)/2=17$, $(17-1)/4=4$, como es par hacemos $(3*17+1)/4=13$,
 $(13-1)/4=3$, $(3-1)/4=0,5$ como que es decimal hacemos $(3*3+1)/2=5$, $(5-1)/4=1$

El 764693 llega al 35845 pasando por el 191173 y el 47793. El 35845 llega al 6721 pasando por el 8961. El 6721 llega directamente al 5041.

El 5041 llega directamente al 3781. El 3781 llega al 709 pasando por el 945. El 709 llega al 133 pasando por el 177. El 133 llega al 25 pasando por el 33,

El 25 llega directamente al 19. El 19 llega directamente al 29. El 29 llega al 11 pasando por el 7. El 11 llega directamente al 17, El 17 llega directamente al 13,

El 13 llega al 5 pasando por el 3 y el 5 llega directamente al 1.

Todo este entramado que forman los números impares es un fractal infinito, regular, que no puedo visualizar en mi imaginación.

La base del fractal la imagino como una esfera con una conexión en su parte superior a la que se puede conectar un tubo. Esta conexión es el número 1.

El tubo que uniremos a esa conexión es un tubo con infinitas conexiones. La primera conexión de este segundo tubo es el número 5, la segunda el número 21, la tercera el 85, . . .

En cada una de esas conexiones hay otros tubos que tienen a su vez infinitas conexiones, a las que se unen otros tubos, y así de manera infinita.

En el ejemplo vemos el tubo de la conexión 5, que tiene a su vez las conexiones 3, 13, 53, 213, . . .

Todas las conexiones de cada tubo representan a los números impares que llegan a la conexión (un impar) a la que está unido el tubo.

El tubo que está unido a la conexión 5, tiene a su vez las conexiones de los impares que llegan al 5.

Los impares o conexiones que tienen cada tubo se calculan mediante dos fórmulas. Solamente es necesario saber el impar de la conexión a la que se une el tubo.

Si el impar de la conexión a la que se unirá el tubo es de la forma $6n-1$ que sus dígitos suman 2, 5 y 8, la fórmula para hallar las conexiones de ese tubo es: $1/6(m*4^n-2)$

Si el impar de la conexión a la que se unirá el tubo es de la forma $6n-5$ que sus dígitos suman 1, 4 y 7, la fórmula para hallar las conexiones de ese tubo es: $1/3(m*4^n-1)$

En el ejemplo, el tubo que conecta al 5 tiene a su vez las conexiones del 3, 13, 53, 213, . . . porque $1/6(5*4^n-2) = 3, 13, 53, 213, \dots$

El tubo que conecta al 13 tiene a su vez las conexiones del 17, 69, 277, . . . porque $1/3(13*4^n-1) = 17, 69, 277, \dots$

Hay conexiones a las que no se conecta ningún cubo. Son las conexiones de los impares de la forma $6n-3$ que sus dígitos suman 3, 6 y 9.

Obtenemos un fractal formado por un primer tubo con infinitas conexiones a las que se unen infinitos tubos, también con infinitas conexiones que unen infinitos tubos.

El camino a través de los tubos de cualquier impar empieza en el tubo donde se encuentra y sigue por los otros tubos a través de las conexiones hasta llegar al final que es el tubo del 1.

La ruta de los impares hasta llegar al número 1 es esta:

*Dado un número impar cualquiera (m) le restamos 1 y lo dividimos entre 4. El resultado será uno de estos tres posibles:
Un número impar, un número par o un número decimal.*

Si el resultado es un número impar, no hacemos nada más.

Si el resultado es un número par, lo restamos al número impar (m).

Si el resultado es un número decimal, lo multiplicamos por 2, le sumamos 1 y lo sumamos a (m).

Ejemplo: Empezamos con el impar 341.

Los siguientes impares de la sucesión los calculamos según lo dicho anteriormente.

$$(341-1)/4=85.$$

$$(85-1)/4=21.$$

$$(21-1)/4=5.$$

$$(5-1)/4=1$$

La sucesión es 341, 85, 21, 5, 1.

Otro ejemplo: Empezamos con el impar 237.

Los siguientes impares los calculamos: $(237-1)/4=59$.

$$(59-1)/4=14,5 \text{ el impar: } 2*14,5+1+59=89.$$

$(89-1)/4=22$ el impar: $89-22=67$.

$(67-1)/4=16,5$ el impar: $2*16,5+1+67=101$.

$(101-1)/4=25$.

$(25-1)/4=6$ el impar: $25-6=19$.

$(19-1)/4=4,5$ el impar: $2*4,5+1+19=29$.

$(29-1)/4=7$.

$(7-1)/4=1,5$ el impar: $2*1,5+1+7=11$.

$(11-1)/4=2,5$ el impar: $2*2,5+1+11=17$.

$(17-1)/4=4$ el impar: $17-4=13$.

$(13-1)/4=3$.

$(3-1)/4=0,5$ el impar: $2*0,5+1+3=5$.

$(5-1)/4=1$.

La sucesión es la siguiente: 237, 59, 89, 67, 101, 25, 19, 29, 7, 11, 17, 13, 3, 5, 1.

De los tres resultados posibles que obtenemos al dividir entre 4 al impar menos 1, hay dos que disminuyen su valor y uno que lo aumenta.

Si disminuye, lo puede hacer hasta llegar a 1, pero si aumenta, lo puede hacer infinitamente y precisamente por esto también hay infinitas probabilidades que disminuya y más pronto o más tarde llegará al 1.

Un ejemplo podría ser un edificio de muchos pisos (de hecho, infinitos pisos). Los pisos están enumerados con los números impares, empezando con el 1, 3, 5, 7, . . . En cada piso hay tres ascensores. Todos están programados para subir o bajar un número predeterminado de pisos. Un ascensor sube al piso $(3*m+1)/2$. Otro ascensor baja al piso $(m-1)/4$ y el tercero baja al $(3*m+1)/4$. El piso en que nos encontramos es "m".

Desde el piso número 15 llegaremos al primer piso después de coger 7 ascensores, pasando por los pisos 23, 35, 53, 13, 3, 5 y 1. Cuatro veces ha subido y tres veces ha bajado.

Dos de los tres ascensores van a pisos inferiores y solamente un ascensor siempre va a los pisos superiores, por lo que las probabilidades sobre tres son dos que bajan y una que sube. Además, como que el edificio tiene infinitos pisos, hay infinitas probabilidades de coger el ascensor que sube, pero tenemos el doble de probabilidades de coger alguno de los dos ascensores que bajan y llegar al piso número 1.

Creo que esto explica el motivo por el cual siempre se llega al número 1 en la conjetura de Collatz.

La Conjetura de Collatz es demostrable mediante FRACTALES y PROBABILIDADES.

Pollença, 21 de Julio de 2018

Conjetura de Collatz

La sucesión obtenida mediante la aplicación del enunciado a un número inicial cualquiera está formada por números pares y números impares, pero la única función de los pares es llegar al próximo número impar, por lo que propongo eliminarlos y formar la sucesión con solo los números impares.

Para ello haremos lo siguiente, dado un número entero (m) :

Si es un número par, lo dividiremos entre dos hasta llegar a un número impar.

Si es un número impar, $(m-1)/4$. Obtendremos parte de una sucesión infinita, decreciente, de números impares que acaba cuando el resultado es un número par o un número decimal.

Un ejemplo : Comenzamos con el número 38228. Como es un número par, lo dividimos entre 2 las veces necesarias hasta llegar al 9557. Seguimos $(9557-1)/4=2389$. $(2389-1)/4=597$. $(597-1)/4=149$. $(149-1)/4=37$. $(37-1)/4=9$. $(9-1)/4=2$. Como es un número par, esto nos indica que la sucesión acaba con el número impar 9.

Otro ejemplo : Comenzamos por el 469. $(469-1)/4=117$. $(117-1)/4=29$. $(29-1)/4=7$. $(7-1)/4=1,5$. Como es un número decimal, esto nos indica que la sucesión termina con el número 7.

Otras sucesiones están formadas solamente por un solo número impar : El número 966 par, lo dividimos entre 2 y obtenemos el impar 483. $(483-1)/4=120,5$ La sucesión acaba con el 483. Aunque esta sucesión esté formada solamente por el impar 483, podemos saber todos los impares anteriores aplicando $4*m+1$, donde m es el número impar : $4*483+1=1933$. $4*1933+1=7733$. $4*7733+1=30933$ En cualquier sucesión podemos hacer lo mismo.

Para saber a qué impar conecta cada sucesión a través de su último impar, haremos :

Si el último impar a dado un número par, como es el caso del 9 en el ejemplo anterior, haremos $(3*9+1)/4=7$. La sucesión que termina en 9 estará unida a otra sucesión mediante el impar 7.

Si el último par ha dado como resultado un número decimal, como es el caso del 7 en el ejemplo anterior, haremos $(3*7+1)/2=11$. La sucesión que termina en 7 estará unida a otra sucesión mediante el impar 11.

Todas las sucesiones unidas entre sí forman un fractal infinito, cuyo tronco principal es la sucesión de los números impares que acaban en 1. ($4*1+1=5$, $4*5+1=21$, $4*21+1=85$, $4*85+1=341$, ...)

Este tronco principal tiene a su vez conectadas a cada número otras sucesiones, también infinitas, a las cuales también hay conectadas otras sucesiones, que también conectan otras sucesiones, etc.

El último número del tronco principal antes de llegar al 1 es el 5, que conecta con la sucesión que calculamos de esta manera : $(4*5-2)/6=3$, $4*3+1=13$, $4*13+1=53$, $4*53+1=213$, ...

Calculo de los impares que conectan con los impares de la forma $6n-1$, que sus dígitos suman 5, 2, 8 aplicamos $(m*4-2)/6$, donde m es el impar al que conectan.

Si los impares son de la forma $6n-5$ que sus dígitos suman 1, 7, 4 aplicamos $(m*4-1)/3$

Hay impares que no forman ninguna sucesión porque no llegan a ellos ningún impar. Son los impares de la forma $6n-3$ que sus dígitos suman 3, 9, 6.

La sucesión que se forma con el enunciado de la conjetura de Collatz sin los números pares, la forman números impares que forman parte de otras sucesiones de impares perfectamente organizadas con una distancia entre ellos siempre igual. La distancia entre los impares en todas las sucesiones es la misma y es $(m-1)/4$, motivo por el cual siempre llegamos al 1 a través de las diferentes sucesiones conectadas entre sí.

UNA SECUENCIA DE NÚMEROS QUE SIEMPRE ACABA EN 5, 1, 0.

Empezamos con un número entero o por la mitad de un número impar cualquiera, o sea que podemos elegir la mitad de cualquier número natural ($N/2$) y le aplicamos los siguientes cálculos:

Si es un número impar le restamos 1 y dividimos el resultado entre 4.

Si es un número par lo multiplicamos por 3 y le sumamos 1 al resultado.

Si es la mitad de un impar lo multiplicamos por 6 y le sumamos 2 al resultado.

Con el número obtenido en cada cálculo repetimos el proceso hasta que la secuencia acaba con el 5, 1, 0. Cuando llegamos al cero acabamos la secuencia, porque si seguimos con el cero como número par, entraremos en un ciclo infinito con el cero y el uno.

Un ejemplo:

Escogemos para empezar el número el 23

CÁLCULOS:

$$(23 - 1) / 4 = 5.5$$

$$(5.5 \times 6) + 2 = 35$$

$$(35 - 1) / 4 = 8.5$$

$$(8.5 \times 6) + 2 = 53$$

$$(53 - 1) / 4 = 13$$

$$(13 - 1) / 4 = 3$$

$$(3 - 1) / 4 = 0.5$$

$$(0.5 \times 6) + 2 = 5$$

$$(5 - 1) / 4 = 1$$

$$(1 - 1) / 4 = 0$$

SECUENCIA OBTENIDA:

23, 5.5, 35, 8.5, 53, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0

Empezando con el número 33 :

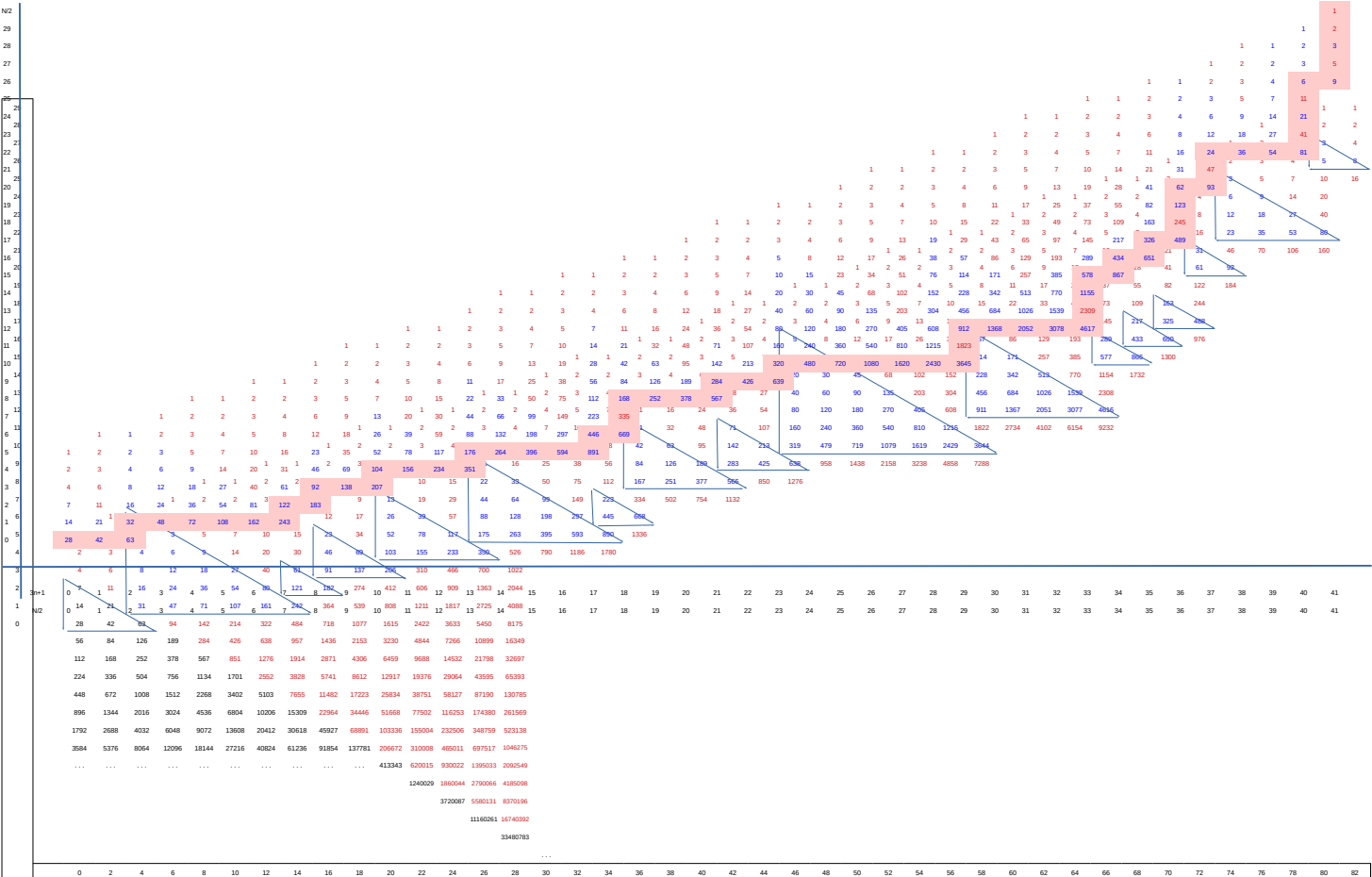
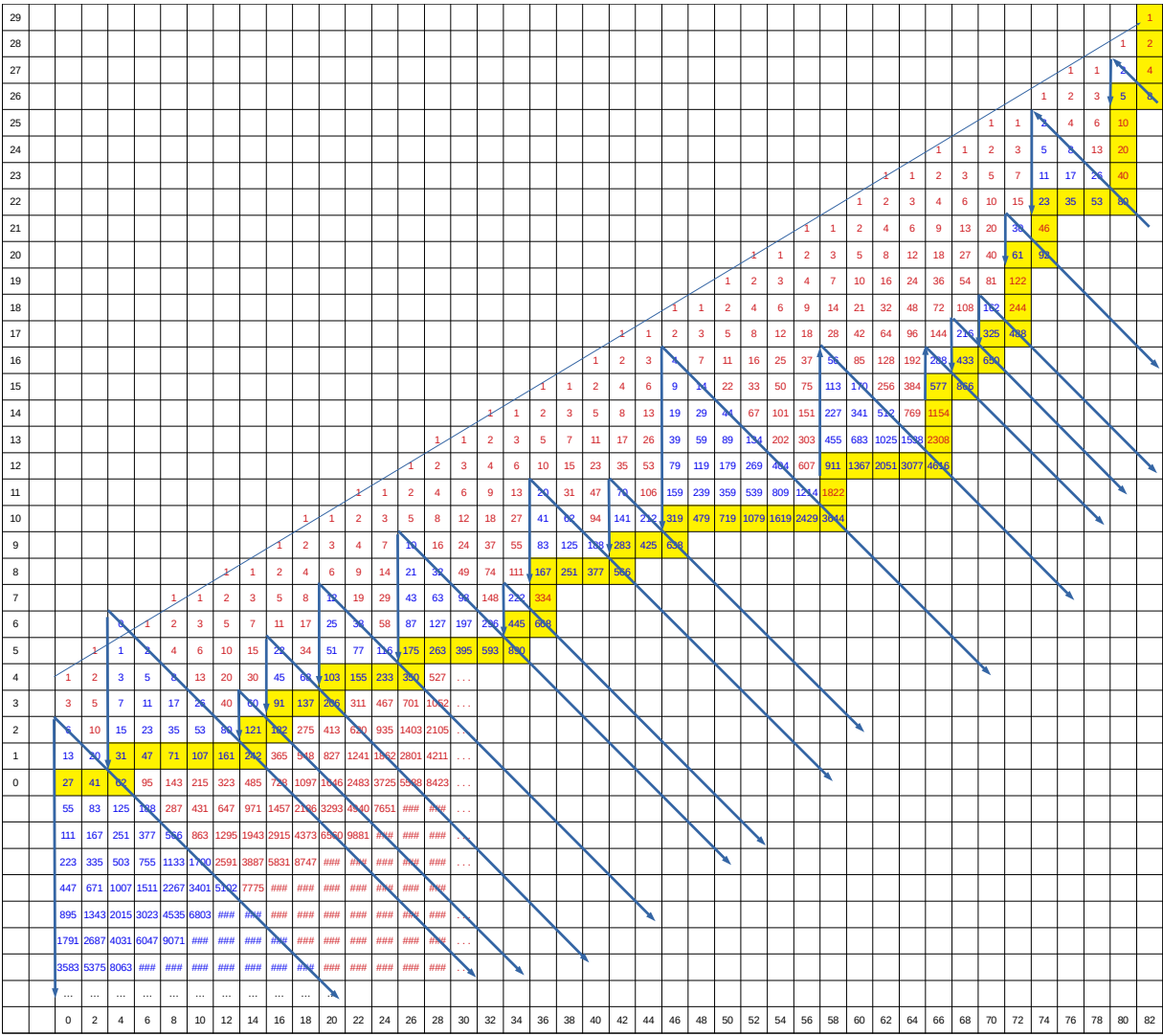
33, 8, 25, 6, 19, 4.5, 29, 7, 1.5, 11, 2.5, 17, 4, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0

Las secuencias obtenidas con este algoritmo están formadas por mitades de los números naturales ($N/2$). El ejemplo es una secuencia formada por las mitades de los números 46, 11, 70, 17, 106, 26, 6, 1, 10, 2, 0.

[illegible]

The diagram is a grid of numbers from 0 to 89, arranged in a sequence. A blue diagonal line runs from the top-left to the bottom-right. The numbers are organized into rows and columns, with some cells highlighted in red, green, or blue. The grid is labeled with '28' on the left and '1' on the right.

The numbers are arranged in a sequence from 0 to 89, with some cells highlighted in red, green, or blue. The grid is labeled with '28' on the left and '1' on the right.



n	m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
0		1										
1		2	3									
2		4	6	9								
3		8	12	18	27							
4		16	24	36	54	81						
5		32	48	72	108	162	243					
6		64	96	144	216	324	486	729				
7		128	192	288	432	648	972	1458	2187			
8		256	384	576	864	1296	1944	2916	4374	6561		
9		512	768	1152	1728	2592	3888	5832	8748	13122	19683	
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Ejemplo: La columna $k(31)$ de la tabla es la fila $n(5)$ del triángulo, si le restamos 1 a sus números y la columna $k(32)$ de la tabla es la columna $m(1)$ del triángulo.

En las columnas $k(\text{impar})$ y la siguiente $k(\text{par})$, la relación entre los números de una misma fila es 3^n .

Ejemplo: En las columnas $k(23)$ - $k(24)$:

$$\begin{array}{llll} (23+1)/1=24 & (35+1)/3=12 & (53+1)/9=6 & (80+1)/27=3 \\ 24*1-1=23 & 12*3-1=35 & 6*9-1=53 & 3*27-1=80 \end{array}$$

Sean A los números de las columnas $k(\text{impar})$ y B los números de las columnas $k(\text{par})$, entonces:

$$B*3^n-1=A$$

$$(A+1)/B=3^n$$

$$\begin{array}{llll} \text{En } k(3)-k(4) & (3+1)/1=4. & (5+1)/3=2. & (8+1)/9=1. \\ \text{En } k(11)-k(12) & (11+1)/1=12. & (17+1)/3=6. & (26+1)/9=3. \\ \text{En } k(23)-k(24) & (23+1)/1=24. & (35+1)/3=12. & (53+1)/9=6. & (80+1)/27=3. \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} 4/2 = (5+1)/3 & 12/2 = (17+1)/3 & 16/2 = (23+1)/3 & 24/2 = (35+1)/3 & \dots \\ 3*4 = 2*(5+1) & 3*12 = 2*(17+1) & 3*16 = 2*(23+1) & 3*24 = 2*(35+1) & \dots \\ 4 = 2/3*(5+1) & 12 = 2/3*(17+1) & 16 = 2/3*(23+1) & 24 = 2/3*(35+1) & \dots \\ 4/2 = 6/3 & 12/2 = 18/3 & 16/2 = 24/3 & 24/2 = 36/3 & \dots \end{array}$$

$$((72*3)/2)-1 = 107 \quad ((24*9)/2)-1 = 107 \quad ((8*27)/2)-1 = 107$$

$$(2*107+2)/3 = 72 \quad (2*107+2)/9 = 24 \quad (2*107+2)/27 = 8$$

El 72 llega al 9

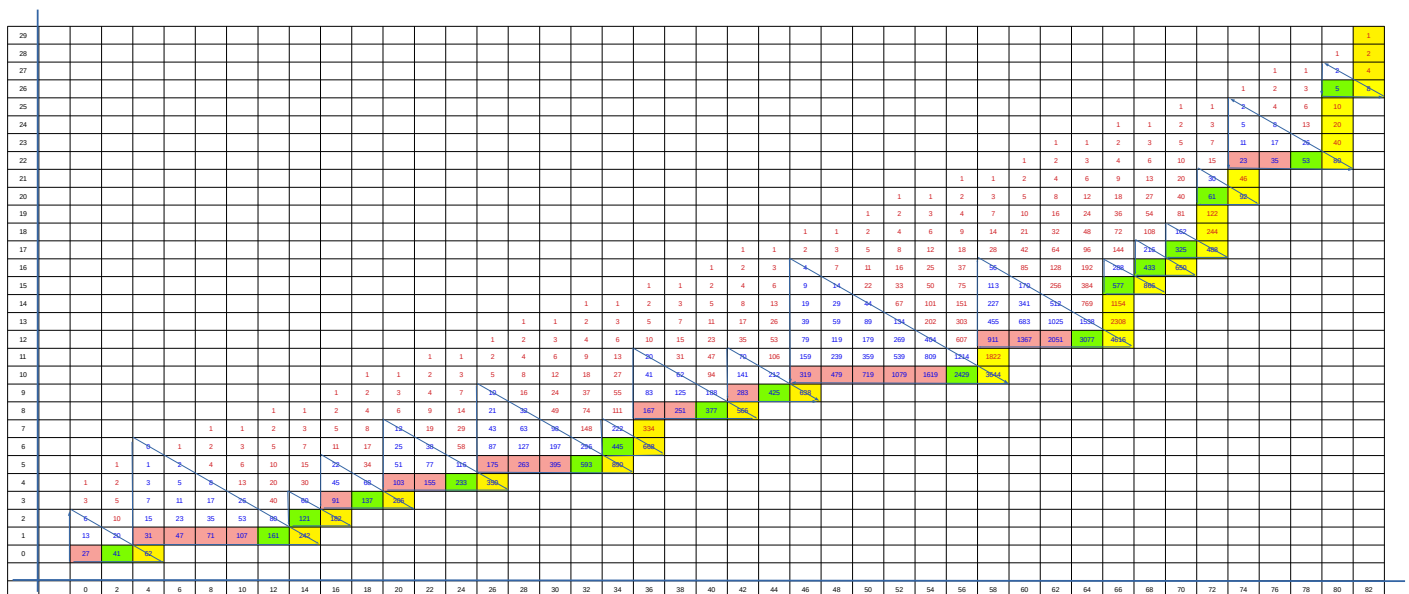
El 24 llega al 3

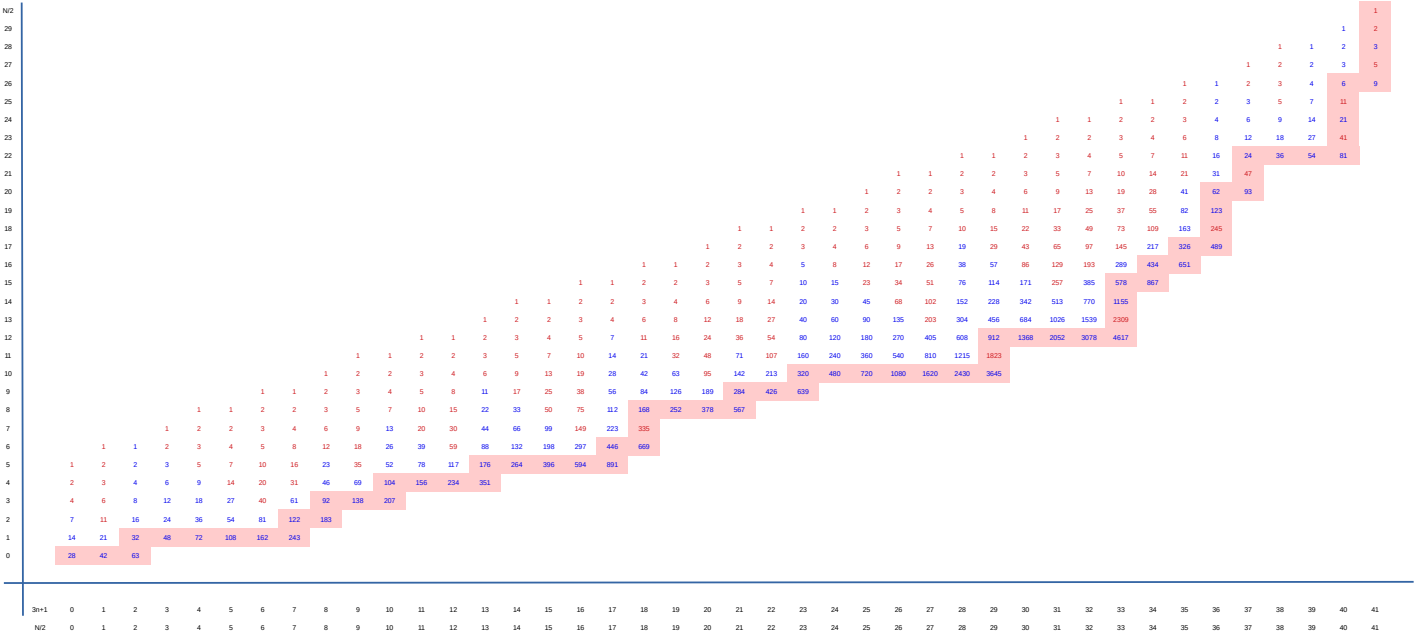
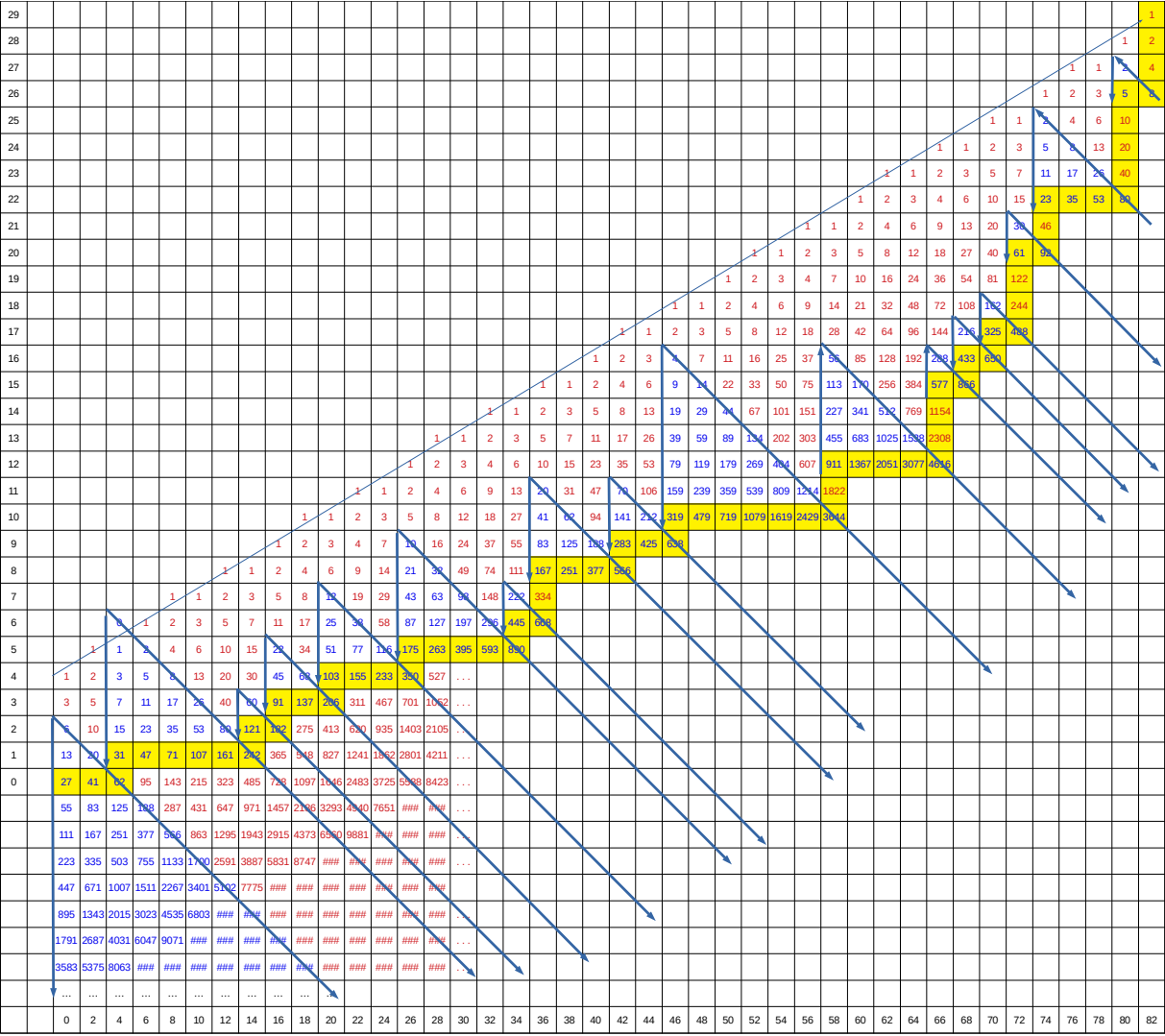
El 8 llega al 1

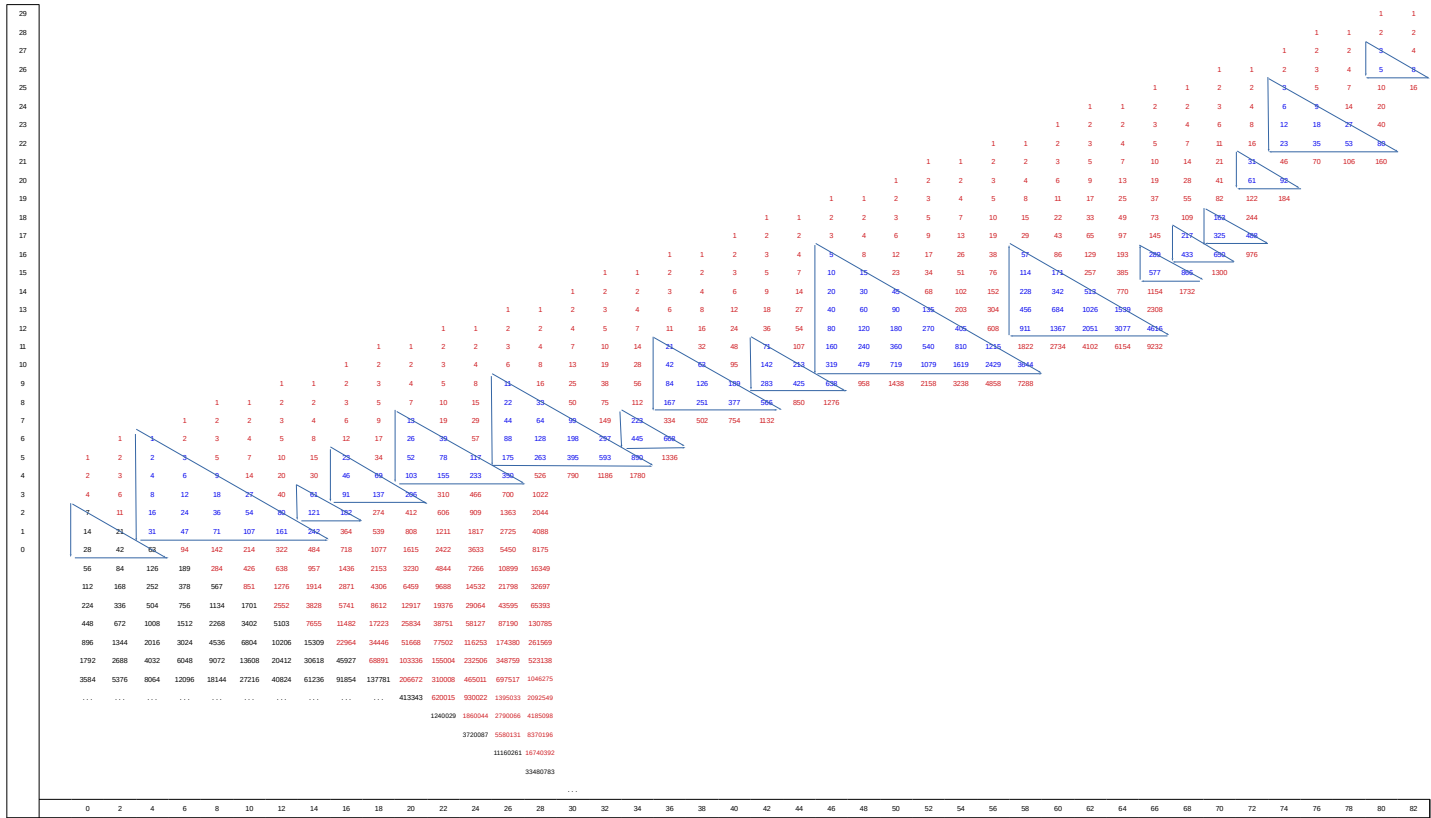
n												
0		5										
1		10	15									
2		20	30	45								
3		40	60	90	135							
4		80	120	180	270	405						
5		160	240	360	540	810	1215					
6		320	480	720	1080	1620	2430	3645				
7		640	960	1440	2160	3240	4860	7290	10935			
8		1280	1920	2880	4320	6480	9720	14580	21870	32805		
9		2560	3840	5760	8640	12960	19440	29160	43740	65610	98415	
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

En la tabla siguiente comprobamos que en todos los ciclos de la secuencia los números impares de la forma $4n-1$ (color rojo) acaban en un último impar de la forma $4n-3$ (color verde), que al aplicarle la operación del algoritmo $3n+1$ produce un número par (color amarillo) que admite como mínimo dos divisiones entre 2, provocando que la secuencia sea descendente.

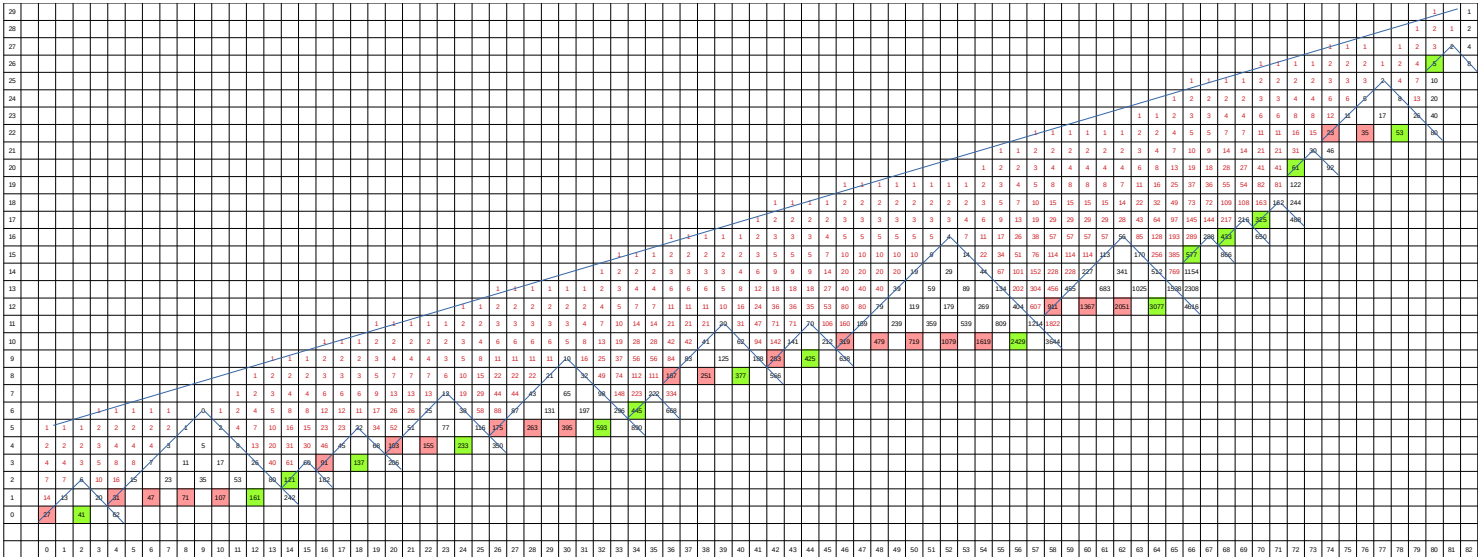
Esta tabla representa la secuencia iniciada con el número 27, que desde ese número sigue por las últimas filas de los triángulos o ciclos, hasta llegar al 1. Ha necesitado 82 pasos horizontales y 29 pasos verticales.







Si ponemos los triángulos equiláteros:



Las secuencias de Collatz se pueden formar de otra manera, que explico a continuación.

Dividir entre 2 y multiplicar por 3. Este es el argumento de los ciclos que forman una secuencia formada con el algoritmo de L  thar Collatz de su conjetura.

PRIMER CICLO: Si el número que empieza la secuencia es un número par m , el primer número del ciclo A es $m-1$ y si es un número impar, A es ese número.

El segundo número es $A+1$. Los demás números del ciclo se obtienen de la siguiente forma: $A+1$ se divide entre 2 las veces que se pueda y después se multiplica por 3 las mismas veces.

$(A+1)/2^n * 3^n$. El último número del ciclo $B = (A+1)/2^n * 3^n - 1$.

SIGUIENTES CICLOS: El primer número es $B/2^n$. Los demás números se obtienen de la misma forma que los del primer ciclo.

Los ciclos se sucederán hasta que el último número de un ciclo sea $B = 2^n$. El ciclo más corto consta de 5 números: A , $A+1$, $(A+1)/2$, $(A+1)*3/2$ y $(A+1)*3/2-1$.

La longitud de los ciclos depende de 2^n que divide $A+1$, siendo el más corto cuando $n=1$.   Cual sería el más largo?   Puede existir 2^∞ ?

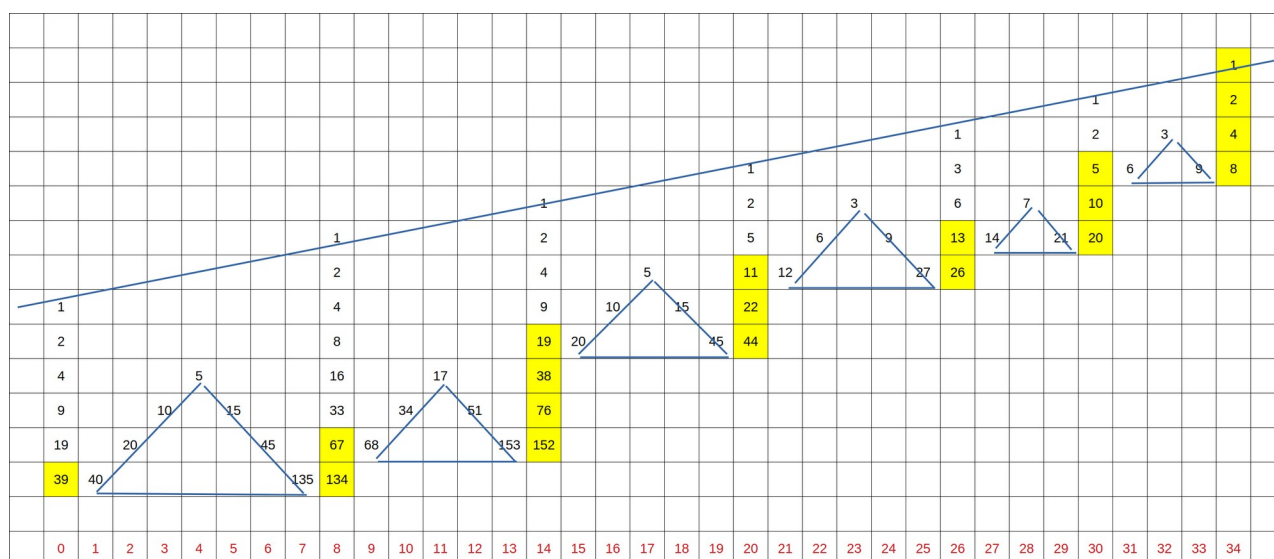


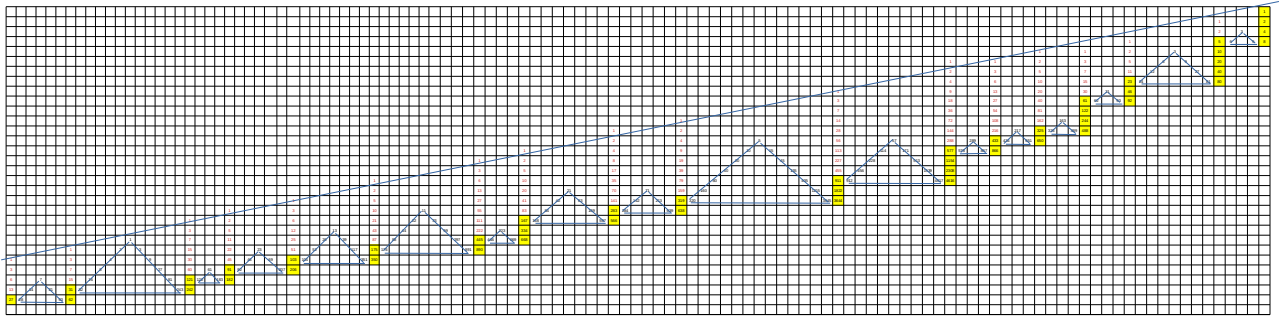
Tabla con la secuencia empezada con el número 39 y los 6 triángulos o ciclos que la componen. En cada ciclo, el primer impar es x y el último impar es y , entonces $(x+1)*(3/2)^n-1=y$.

Los números en amarillo son los números de la secuencia, que se lee empezando por las columnas de la izquierda y de abajo a arriba: 39, 134, 67, 152, 76, 38, 19, 44, 22, 11, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

El valor de n es el que le corresponde al número del vértice superior de cada triángulo o ciclo, que es el número de la fila que ocupa en el triángulo, empezando con la base que es la fila 0.

Ejemplos: $(39+1)*(3/2)^3-1=134$ $(67+1)*(3/2)^2-1=152$ $(19+1)*(3/2)^2-1=44$
 $(11+1)*(3/2)^2-1=26$ $(13+1)*(3/2)-1=20$ $(5+1)*(3/2)-1=8$

La tabla que representa los ciclos de la secuencia empezada con el número 27:



OTRA SECUENCIA DISTINTA A LA DE COLLATZ CON IGUAL RESULTADO.

Empiezo con un número entero o por la mitad de un número impar cualquiera, o sea que podemos elegir la mitad de cualquier número natura $N/2$ y le aplico los siguientes cálculos:

Si es un número par lo multiplico por 3 y le sumo 1 al resultado.

Si es un número impar le resto 1 y divido el resultado entre 4.

Si es la mitad de un impar lo multiplico por 6 y le sumo 2 al resultado.

Con el número obtenido repito el proceso sucesivamente y la secuencia acaba siempre con el 5, 1, 0. Si sigo con el cero como número par, entro en un ciclo infinito con el cero y el uno.

Un ejemplo:

Escogemos para empezar el número el 23

CALCULOS:

$$(23 - 1) / 4 = 5.5$$

$$(5.5 \times 6) + 2 = 35$$

$$(35 - 1) / 4 = 8.5$$

$$(8.5 \times 6) + 2 = 53$$

$$(53 - 1) / 4 = 13$$

$$(13 - 1) / 4 = 3$$

$$(3 - 1) / 4 = 0.5$$

$$(0.5 \times 6) + 2 = 5$$

$$(5 - 1) / 4 = 1$$

23, 5.5, 35, 8.5, 53, 13, 3, 0.5, 5, 1

La secuencia obtenida con este algoritmo la forman números impares, números pares y números decimales que son $\frac{1}{2}$ de los impares. Estos dos últimos tipos de números son los elementos cota inferior de las progresiones que se forman con los números impares. Su razón es igual a $4n+1$, o sea $a(n+1) = 4 \cdot a(n) + 1$.

$$2n+1 = \text{impar}, (\text{impar}-1)/2 = n, (\text{impar}-1)/4 = n/2 \quad ((2n-1)-1)/4 \rightarrow (2n-2)/4 \rightarrow (n-1)/2$$

A diagram showing a sequence of numbers arranged in a spiral pattern. The numbers are: 1, 5, 21, 85, 341, 141, 565, 213, 53, 8.5, 35, 23, 5.5, 93, 373. Blue arrows indicate the direction of the sequence, starting from 1 and moving right, then up, then left, then down, and so on, forming a spiral.

La formación del diagrama se hace de igual forma que el de las progresiones obtenidas con el algoritmo de Collatz.

Los números impares sometidos a la operación del algoritmo nos dan las mitades de todos los números naturales: $1/4$
 $((2n+1)-1) = n/2$.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	...
0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	...

Comparación de las secuencias obtenidas con el algoritmo de Collatz y con el mío, empezando con el número 51:

PASOS COLLATZ MIQUEL

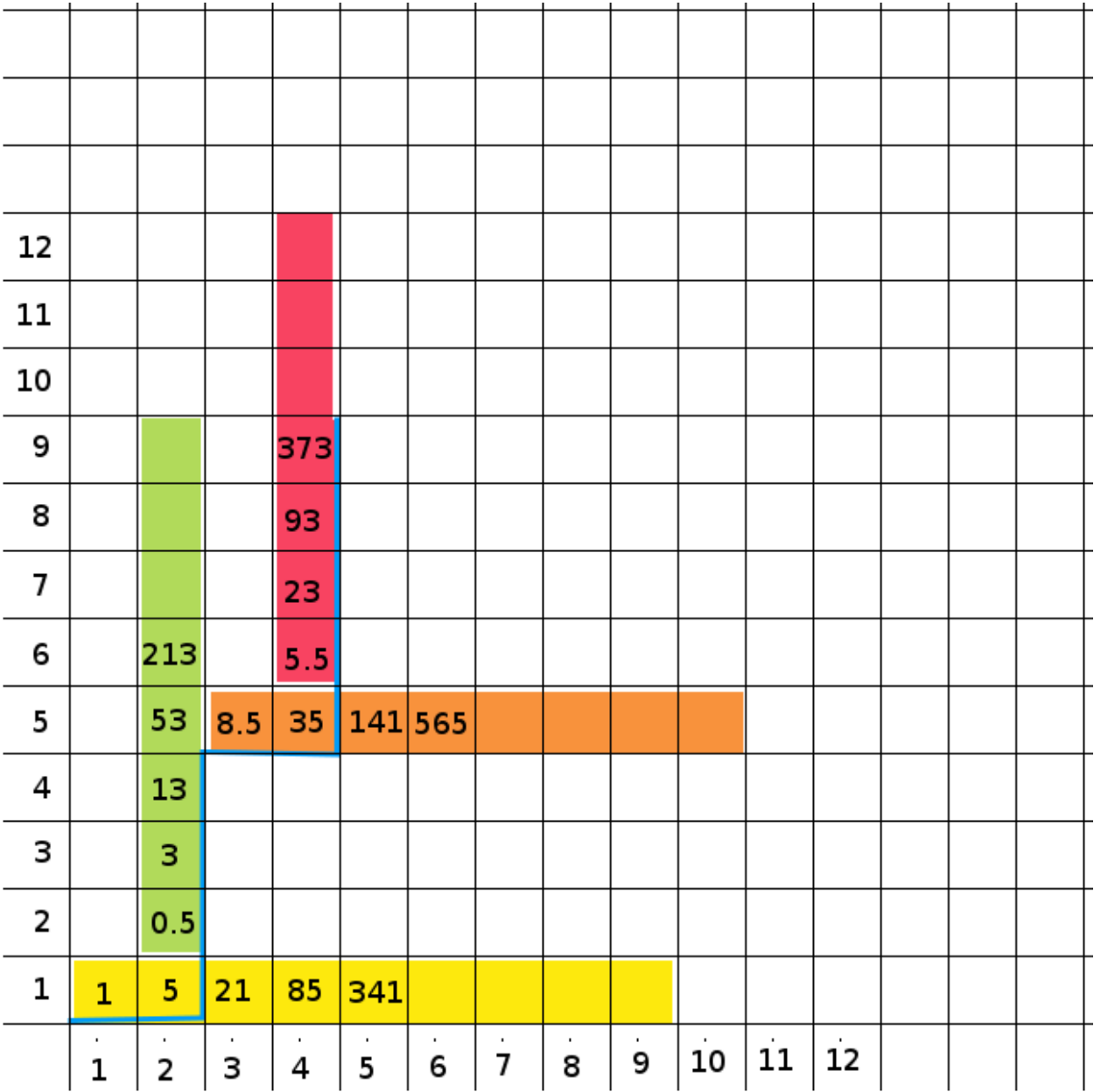
0	51	51
1	154	12.5
2	77	77
3	232	19
4	116	4.5
5	58	29
6	29	7
7	88	1.5
8	44	11
9	22	2.5
10	11	17
11	34	4
12	17	13
13	52	3
14	26	0.5
15	13	5
16	40	1
17	20	
18	10	
19	5	
20	16	
21	8	
22	4	
23	2	
24	1	

Otra comparación empezando con el número 23:

PASOS COLLATZ MIQUEL

0	23	23
1	70	5.5
2	35	35
3	106	8.5
4	53	53
5	160	13
6	80	3
7	40	0.5
8	20	5
9	10	1
10	5	
11	16	
12	8	
13	4	
14	2	
15	1	

El diagrama colocado en un eje de coordenadas nos permitirá conocer la posición de cada número en el mismo.



[illegible]

Las progresiones con cota inferior igual a la mitad de un número impar se unen a la siguiente progresión con los impares de la forma $6n+5$ y las progresiones con cota inferior igual a un número par lo hacen con los impares de la forma $6n+1$.

UN ALGORITMO

Empiezo con un número entero o por la mitad de un número impar cualquiera y le aplico los siguientes cálculos:

Si es un número par lo multiplico por 3 y le sumo 1 al resultado.

Si es un número impar le resto 1 y divido el resultado entre 4.

Si es la mitad de un impar lo multiplico por 6 y le sumo 2 al resultado.

Con el número obtenido repito el proceso sucesivamente y la secuencia acaba siempre con el 5, 1, 0. Si sigo con el cero como número par, entro en un ciclo infinito con el cero y el uno.

Ejemplo:

Elijo el número 2573 y la secuencia que obtengo es ésta:

2573, 643, 160.5, 965, 241, 60, 181, 45, 11, 2.5, 17, 4, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0

Explicación:

La explicación del porqué sucede siempre lo mismo con cualquier número que elija, sea par, impar o la mitad de un impar:

Asumo que los números de la secuencia obtenida son elementos de progresiones geométricas cuyos términos son números impares y el término cota inferior puede ser un número par o una mitad de un número impar. La razón es $4n+1$, o sea $a(n+1) = 4 \cdot a(n) + 1$ y no tienen cota superior.

Para formar el diagrama antes debo identificar dichas progresiones.

Las que hay en la secuencia del ejemplo son:

- 1) 2573, 643, 160.5*
- 2) 965, 241, 60*
- 3) 181, 45, 11, 2.5*
- 4) 17, 4*
- 5) 13, 3, 0.5*
- 6) 5, 1, 0*

Tengo seis progresiones que no tienen límite superior, por lo que calculo los elementos necesarios en cada una para que todas tengan el mismo número de elementos, aunque eso no es esencial.

Completo las progresiones del ejemplo con seis elementos en cada una.

- 1) 164693, 41173, 10293, 2573, 643, 160.5*
- 2) 61781, 15445, 3861, 965, 241, 60*
- 3) 2901, 725, 181, 45, 11, 2.5*
- 4) 4437, 1109, 277, 69, 17, 4*
- 5) 853, 213, 53, 13, 3, 0.5*
- 6) 341, 85, 21, 5, 1, 0*

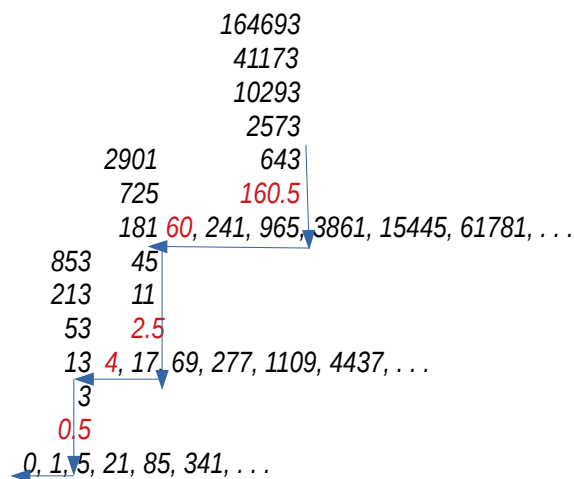
Ahora formo el diagrama de esta manera:

Empiezo escribiendo las progresiones en la parte superior derecha, según estas dos normas:

Si la cantidad de progresiones obtenidas es un número par, coloco la primera en sentido vertical y decreciente. Si el número de progresiones es un número impar, coloco la primera en sentido horizontal y decreciente a la izquierda.

La cota inferior de cada progresión se coloca junto al elemento impar de la progresión siguiente, según el orden de la secuencia obtenida.

Este es el diagrama del ejemplo en el que he empezado con el número 2573 y después de las operaciones sucesivas del algoritmo he llegado al cero.



Veo el orden que siguen los números, que es perfectamente lógico y nada caótico.

Este diagrama es una parte infinitamente pequeña de un inmenso fractal formado por un número infinito de progresiones infinitas unidas unas con otras, cuyo origen es la progresión primigenia que tiene cota inferior cero.

En ese fractal están todos los números naturales y las mitades de todos los números impares porque son el resultado de aplicar la operación del algoritmo a los números impares: $\{(2n+1)-1\}/4 = n/2$

Esta es la operación principal del proceso porque de las otras dos, aplicadas a los números pares y a las mitades de los números impares, vuelvo a obtener los mismos números impares repetidamente.

Pero son imprescindibles porque me indican la unión de cada progresión con la siguiente.

La razón de estas progresiones en sentido decreciente es $(n-1)/4$, que por ser (n) números impares es lo mismo que $\{(2n+1)-1\}/4 = n/2$. Esto significa que debemos aceptar todos los elementos de estas progresiones como la mitad de todos los números naturales.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5

UNA SECUENCIA DE NÚMEROS QUE ACABA SIEMPRE EN 0.

Para empezar la secuencia se escoge la mitad de cualquier número natural n , o sea $n/2$ al que se aplica las siguientes operaciones:

Si es un número par, se multiplica por 3 y se suma 1 al resultado.

Si es un número impar, se resta 1 y el resultado se divide entre 4.

Si es la mitad de un impar, se multiplica por 6 y se suma 2 al resultado.

Con cada número obtenido se repite el proceso hasta que la secuencia acaba en 0.

Continuando el proceso con el cero como número par, la secuencia entra en un bucle con el uno y el cero.

Ejemplo:

Empezando con el número 2573, la secuencia obtenida es:

2573, 643, 160.5, 965, 241, 60, 181, 45, 11, 2.5, 17, 4, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0.

Los números de la secuencia obtenida son elementos de un determinado número de progresiones geométricas cuyos términos son números impares a excepción del término cota inferior, que puede ser un número par o la mitad de un número impar. En cada progresión, $a(n+1) = 4 \cdot a(n) + 1$.

Las progresiones de la secuencia del ejemplo son seis:

- 1) 2573, 643, 160.5
- 2) 965, 241, 60
- 3) 181, 45, 11, 2.5
- 4) 17, 4
- 5) 13, 3, 0.5
- 6) 5, 1, 0

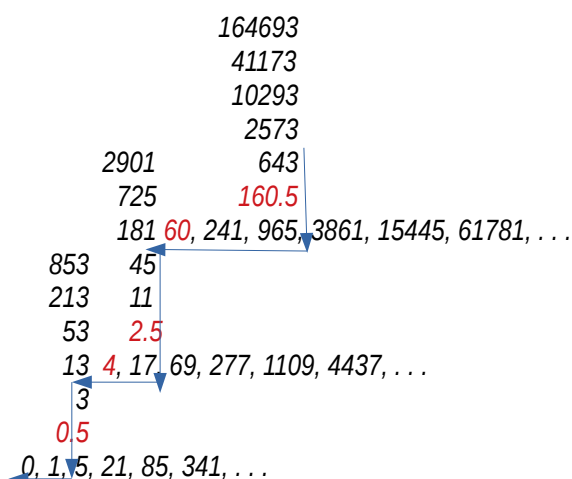
2573	643	160.5	965							
			241							
			60							
			181	45	11	2.5	17			
							4			
							13	3	0.5	5
										1
										0

Estas progresiones no tienen cota superior, por lo que se pueden calcular más elementos en cada una de ellas para que todas tengan el mismo número de elementos, aunque esto no es esencial.

Completamos las progresiones del ejemplo con seis elementos en cada una.

- 1) 164693, 41173, 10293, 2573, 643, 160.5
- 2) 61781, 15445, 3861, 965, 241, 60
- 3) 2901, 725, 181, 45, 11, 2.5
- 4) 4437, 1109, 277, 69, 17, 4
- 5) 853, 213, 53, 13, 3, 0.5
- 6) 341, 85, 21, 5, 1, 0

La cota inferior de cada progresión se coloca junto al elemento impar de la progresión siguiente, según el orden de la secuencia obtenida, de esta forma:



Este diagrama es una parte muy pequeña de un fractal formado por infinitas progresiones unidas unas con otras, cuyo origen es la progresión que tiene cota inferior cero.

En ese fractal están todos los números naturales y las mitades de todos los números impares porque son el resultado de aplicar la operación del algoritmo a los números impares: $1/4((2n+1)-1) = n/2$.

Esta es la operación principal del proceso porque de las otras dos, aplicadas a los números pares y a las mitades de los números impares, se vuelven a obtener los mismos números impares repetidamente, pero son imprescindibles porque indican la unión de cada progresión con la siguiente.

La razón de las progresiones en sentido decreciente es $(n-1)/4$, que por ser (n) números impares es lo mismo que $((2n+1)-1)/4$ y esto es $n/2$, por lo que todos los elementos de las progresiones son la mitad de todos los números naturales.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5

Cuando resulta un número par nos lleva a : $3*((m-1)/4)+1 ==> (3m+1)/4$.

Cuando resulta la mitad de un impar nos lleva a : $6*((m-1)/4)+2 ==> (3m+1)/2$.

ALGORITMO

Empezando con la mitad de cualquier número natural y aplicándole el algoritmo siempre llegaremos al número 1.

Las tres operaciones son:

Si el número es par se multiplica por 3 y se suma 1.

Si el número es impar se resta 1 y se divide entre 4.

Si el número es la mitad de un impar se multiplica por 6 y se suma 2.

Iteramos el proceso hasta llegar al 1 y si se considera al cero como número par, la secuencia entra en un bucle infinito con el uno y el cero.

Ejemplo: Empezamos con el número 713.

CALCULOS:

$(713 - 1) / 4 = 178$
 $(178 \times 3) + 1 = 535$
 $(535 - 1) / 4 = 133.5$
 $(133.5 \times 6) + 2 = 803$
 $(803 - 1) / 4 = 200.5$
 $(200.5 \times 6) + 2 = 1205$
 $(1205 - 1) / 4 = 301$
 $(301 - 1) / 4 = 75$
 $(75 - 1) / 4 = 18.5$
 $(18.5 \times 6) + 2 = 113$
 $(113 - 1) / 4 = 28$
 $(28 \times 3) + 1 = 85$
 $(85 - 1) / 4 = 21$
 $(21 - 1) / 4 = 5$
 $(5 - 1) / 4 = 1$

Empezamos con el 5,5.

CALCULOS:

$(5.5 \times 6) + 2 = 35$
 $(35 - 1) / 4 = 8.5$
 $(8.5 \times 6) + 2 = 53$
 $(53 - 1) / 4 = 13$
 $(13 - 1) / 4 = 3$
 $(3 - 1) / 4 = 0.5$
 $(0.5 \times 6) + 2 = 5$
 $(5 - 1) / 4 = 1$

Proceso para la demostración :

Formamos un conjunto con los números impares obtenidos:

713 || 535 || 803 || 1205 || 301 || 75 || 113 || 85 || 21 || 5 || 1 ||

Ahora creamos las sucesiones para desarrollar gráficamente la parte del fractal donde se encuentran los números impares obtenidos con el algoritmo. Lo destacable de este algoritmo es que nos permite conocer exactamente la cota inferior de cada sucesión y el término con el que se enlaza de la siguiente sucesión.

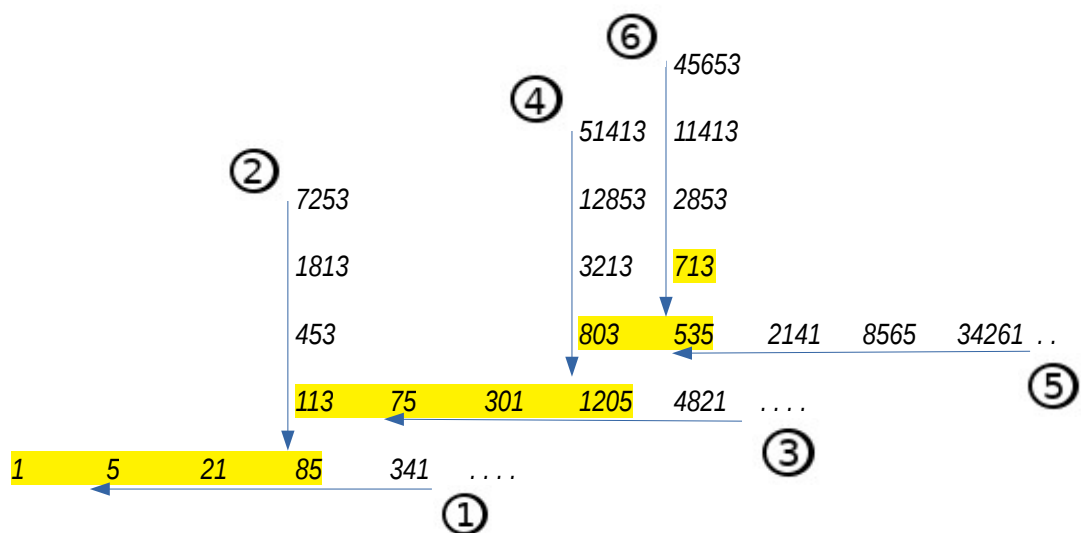
Empezando por el último impar, el 1, aplicamos a éste y a cada resultado la fórmula $4n+1$, formando una sucesión infinita cuya cota inferior es el 1.

El siguiente impar, que no haya salido en la secuencia anterior, será el primer impar (cota inferior) de la próxima sucesión.

Se calculan tantas sucesiones como impares han resultado del algoritmo, a excepción de los impares que ya estén en la sucesión anterior.

Es muy importante que la primera sucesión del 1 esté representada en sentido horizontal con los términos de menor a mayor a la derecha. Las secuencias siguientes se colocarán alternativamente en sentido vertical y horizontal y juntando los primeros impares (cotas inferiores) de cada una de ellas.

En este ejemplo, en el que hemos calculado 4 términos de cada sucesión, se juntan los impares 85 de la primera con el 113 de la segunda. El 113 de la segunda con el 75 de la tercera. El 1205 de la tercera con el 803 de la cuarta. El 803 de la cuarta con el 535 de la quinta y el 535 de la quinta con el 713 de la sexta.



Otro ejemplo empezando con el 4.5 (9/2)

CALCULOS:

$$(4.5 \times 6) + 2 = 29$$

$$(29 - 1) / 4 = 7$$

$$(7 - 1) / 4 = 1.5$$

$$(1.5 \times 6) + 2 = 11$$

$$(11 - 1) / 4 = 2.5$$

$$(2.5 \times 6) + 2 = 17$$

$$(17 - 1) / 4 = 4$$

$$(4 \times 3) + 1 = 13$$

$$(13 - 1) / 4 = 3$$

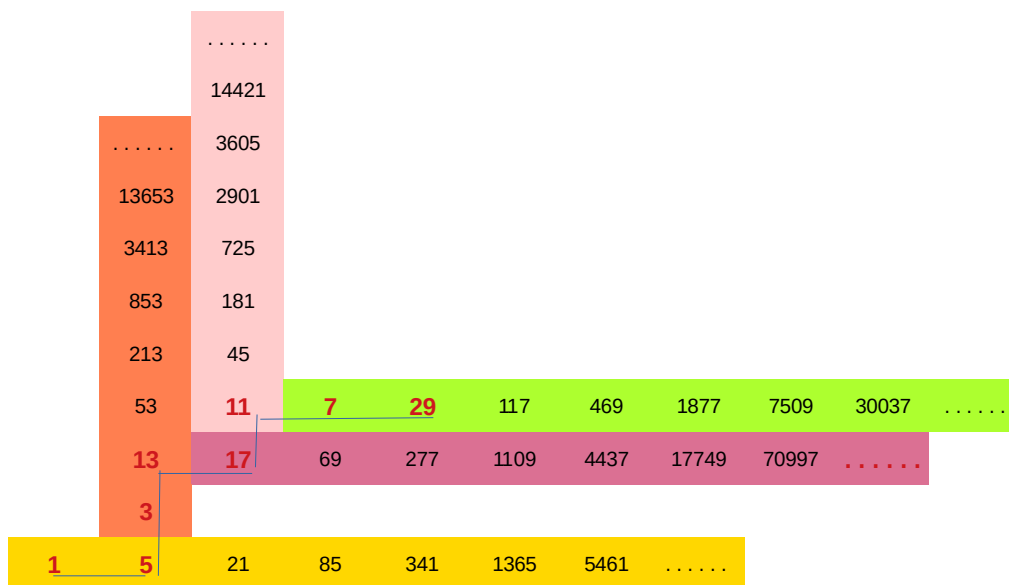
$$(3 - 1) / 4 = 0.5$$

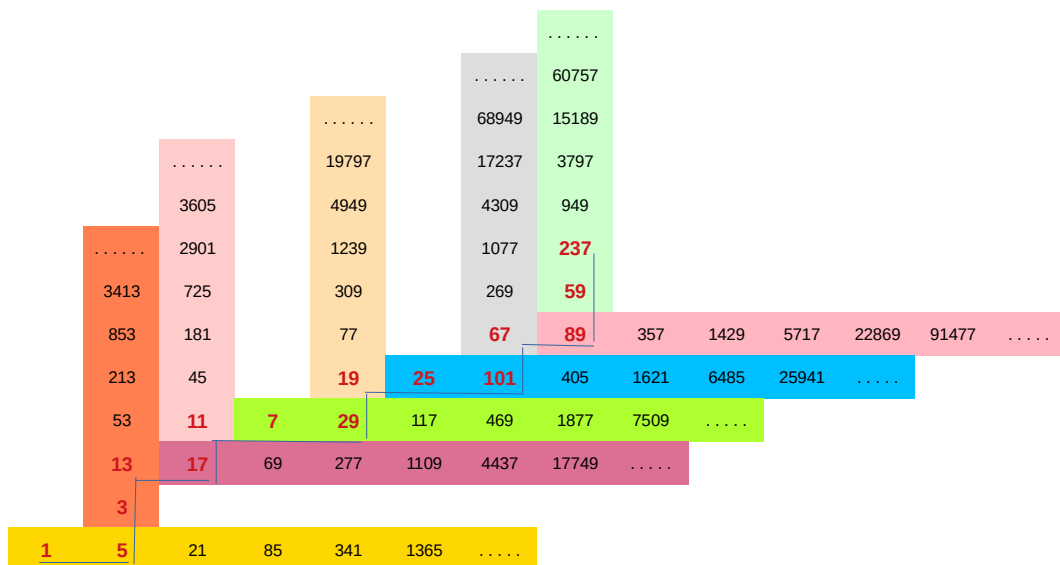
$$(0.5 \times 6) + 2 = 5$$

$$(5 - 1) / 4 = 1$$

Formamos un conjunto con los números impares: 29 || 7 || 11 || 17 || 13 || 3 || 5 || 1 ||

Como en el primer ejemplo, calculamos la secuencia de los impares para desarrollar gráficamente la parte del fractal donde se encuentran los números impares obtenidos con el algoritmo.





Al igual que existen infinitos números impares, podemos calcular infinitas sucesiones cuya cota inferior será un número impar.

Como que todas y cada una de las sucesiones se forman con la misma razón o factor $(4m+1)$ y son acotadas inferiormente, todos sus términos llegarán a dicha cota al aplicarles $(m-1)/4$.

Todas las sucesiones se enlazan unas con otras ordenadamente, por medio de su primer impar (cota inferior de la sucesión) con un término de la sucesión siguiente, siempre siguiendo el mismo orden que los resultados del algoritmo.

Cuando el resultado del algoritmo es un número par o un medio, quiere decir que la sucesión enlaza con la siguiente en ese punto. Cuando el resultado del algoritmo al aplicar $(m-1)/4$ es un número impar, quiere decir que son términos de la misma sucesión.

Cualquier término de cualquier sucesión llegará a la cota inferior de la misma al aplicar iteradamente la fórmula $(m-1)/4$. La cota inferior de todas las sucesiones enlaza con un término de la siguiente sucesión que al aplicarle $(m-1)/4$ llega también a su cota inferior, que a su vez enlaza con la siguiente sucesión y así sucesivamente hasta llegar a la sucesión inicial cuya cota inferior es el 1. Esta es la causa por la que cualquier número natural, incluso su mitad, llega al 1 al aplicar el algoritmo.

El algoritmo es una variante del que Collatz utilizó en su conjetura, por lo que la explicación es la misma.

Los primeros números de las sucesiones, cotas inferiores de cada una de ellas, todos son congruentes $\{1,3,7\} \bmod 8$.

Para saber a qué impar enlaza cada sucesión a través de su último impar, haremos :

Si el último impar ha dado un número par, haremos $(3*9+1)/4=7$. La sucesión que termina en 9 estará unida a otra sucesión mediante el impar 7.

Si el último par ha dado como resultado un número decimal, haremos $(3*7+1)/2=11$. La sucesión que termina en 7 estará unida a otra sucesión mediante el impar 11.

RESUMEN:

Se trata de un algoritmo que aplicado a la mitad de cualquier número natural ($n/2$) se forma una secuencia que acaba siempre en el cero, y si se sigue aplicando, la secuencia entra en un ciclo infinito con el cero y el uno.

DESCRIPCIÓN:

Dada la mitad de cualquier número natural ($n/2$), se le aplica la operación correspondiente según las tres reglas:

Si el número es par se multiplica por 3 y se suma 1 al resultado.

Si el número es impar se le resta 1 y el resultado se divide entre 4.

Si el número es $1/2$ de un impar se multiplica por 6 y se suma 2 al resultado.

Se sigue aplicando estas operaciones de forma iterada a cada resultado obtenido hasta llegar al cero.

A continuación un ejemplo empezando con el número 2647:

La secuencia obtenida:

2647 | 661.5 | 3971 | 992.5 | 5957 | 1489 | 372 | 1117 | 279 | 69.5 | 419 | 104.5 | 629 | 157 | 39 | 9.5 | 59 | 14.5 | 89 | 22 | 67 | 16.5 | 101 | 25 | 6 | 19 | 4.5 | 29 | 7 | 1.5 | 11 | 2.5 | 17 | 4 | 13 | 3 | 0.5 | 5 | 1 | 0 |

Los cálculos aplicados:

$(2647 - 1) / 4 = 661.5$
 $(661.5 \times 6) + 2 = 3971$
 $(3971 - 1) / 4 = 992.5$
 $(992.5 \times 6) + 2 = 5957$
 $(5957 - 1) / 4 = 1489$
 $(1489 - 1) / 4 = 372$
 $(372 \times 3) + 1 = 1117$
 $(1117 - 1) / 4 = 279$
 $(279 - 1) / 4 = 69.5$
 $(69.5 \times 6) + 2 = 419$
 $(419 - 1) / 4 = 104.5$
 $(104.5 \times 6) + 2 = 629$
 $(629 - 1) / 4 = 157$
 $(157 - 1) / 4 = 39$
 $(39 - 1) / 4 = 9.5$
 $(9.5 \times 6) + 2 = 59$
 $(59 - 1) / 4 = 14.5$
 $(14.5 \times 6) + 2 = 89$
 $(89 - 1) / 4 = 22$
 $(22 \times 3) + 1 = 67$
 $(67 - 1) / 4 = 16.5$
 $(16.5 \times 6) + 2 = 101$
 $(101 - 1) / 4 = 25$
 $(25 - 1) / 4 = 6$
 $(6 \times 3) + 1 = 19$
 $(19 - 1) / 4 = 4.5$
 $(4.5 \times 6) + 2 = 29$

$(29 - 1) / 4 = 7$
 $(7 - 1) / 4 = 1.5$
 $(1.5 \times 6) + 2 = 11$
 $(11 - 1) / 4 = 2.5$
 $(2.5 \times 6) + 2 = 17$
 $(17 - 1) / 4 = 4$
 $(4 \times 3) + 1 = 13$
 $(13 - 1) / 4 = 3$
 $(3 - 1) / 4 = 0.5$
 $(0.5 \times 6) + 2 = 5$
 $(5 - 1) / 4 = 1$
 $(1 - 1) / 4 = 0$

EXPLICACIÓN:

Para explicar la razón por la que todas las secuencias acaban en el cero, debemos desarrollar las progresiones geométricas implicadas, partiendo de los resultados del algoritmo que son números pares o 1/2 de un impar como primer elemento cota inferior y con la razón o factor $4n+1$, o sea $a(n) = 4 \cdot a(n-1) + 1$. Estas progresiones no tienen límite cota superior. En este ejemplo vemos que en los cálculos aplicados hay tres iteraciones seguidas cuyo resultado son números impares, por lo que será suficiente calcular cuatro términos de cada progresión infinita.

Progresiones implicadas en la ruta al cero del número 2647 del ejemplo:

661.5	2647	10589	42357	
992.5	3971	15885	63541	
372	1489	5957	23829	
69.5	279	1117	4469	
104.5	419	1677	6709	
9.5	39	157	629	
14.5	59	237	949	
22	89	357	1429	
16.5	67	269	1077	
6	25	101	405	
4.5	19	77	309	
1.5	7	29	117	
2.5	11	45	181	
4	17	69	277	
0.5	3	13	53	
0	1	5	21	

Ahora formaremos un diagrama con las progresiones enlazadas adecuadamente que indica la ruta que sigue el número 2647 hasta llegar al cero.

Para formar el diagrama se procede de la siguiente manera:

Se empieza escribiendo la primera progresión en la parte superior derecha, siguiendo estas pautas:

Si la cantidad de progresiones implicadas es un número par, la primera progresión se pone en sentido vertical y decreciente.

Si la cantidad de progresiones implicadas es un número impar, la primera progresión se pone en sentido horizontal y decreciente hacia la izquierda.

Las progresiones se unen mediante la cota inferior de la primera con el término número impar de la siguiente, siguiendo el mismo orden que los resultados obtenidos del cálculo con el algoritmo.

Este diagrama es una parte infinitamente pequeña de un inmenso fractal formado por un número infinito de progresiones infinitas unidas unas con otras, cuyo origen es la progresión primigenia que tiene cota inferior cero.

Cada una de las progresiones que forman el fractal está formada por infinitos términos que son números impares y un término cota inferior que es un número par o la mitad de un número impar.

El conjunto de las progresiones del fantástico fractal, que difícilmente logramos imaginar, contiene las mitades de todos los números naturales ($n/2$), o sea, los números pares, los números impares y los $1/2$ de los impares, por lo que cualquiera de esos números al que le apliquemos el algoritmo formará una secuencia que acabará siempre en el cero.

OTRAS CONSIDERACIONES:

Los primeros términos cota inferior de las progresiones son los números pares y los números que son $1/2$ de los números impares.

Los siguientes términos son impares de la forma $6n-1$, que la suma de sus dígitos es 2, 5, 8 y a ellos enlazan las progresiones cuya cota inferior es $1/2$ de un número impar. Otros elementos son impares de la forma $6n-5$, que sus dígitos suman 1, 4, 7 y a ellos enlazan las progresiones cuya cota inferior es un número par. Y los elementos que son impares de la forma $6n-3$, cuyos dígitos suman 3, 6, 9 que no tienen enlace con ninguna progresión.

Otras fórmulas para calcular los términos de las progresiones:

Sea (t) el término de la progresión (a) al que se une la cota inferior (c) de la progresión (b), entonces la fórmula de los términos de la progresión (b) es:

Si la cota inferior es un número par $(t \cdot 4^n - 1)/3$.

Si la cota inferior es la mitad de un número impar $(t \cdot 4^n - 2)/6$.

Si colocamos el diagrama de las progresiones en un conjunto de coordenadas cartesianas nos indicará los niveles en altitud y latitud de los términos.

A continuación una tabla con los ciclos de las seis secuencias, sin tener en cuenta las distancias que hay entre los números, ya que verlas a tamaño real es imposible porque la distancia entre los números aumenta en cada fila, en la primera (9n-1) la distancia es de 5, en la segunda es de 11, en la tercera 23, en la cuarta 47, . . . $3 \cdot 2^{n-1}$.

		n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	...
9n-1			8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	188	197	206	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296	305	314	323	332	341	350	359	...
9n-5			4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	229	238	247	256	265	274	283	292	301	310	319	328	337	346	355	...
9n-7			2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173	182	191	200	209	218	227	236	245	254	263	272	281	290	299	308	317	326	335	344	353	...
9n-8			1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154	163	172	181	190	199	208	217	226	235	244	253	262	271	280	289	298	307	316	325	334	343	352	...
9n-4			5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	185	194	203	212	221	230	239	248	257	266	275	284	293	302	311	320	329	338	347	356	...
9n-2			7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205	214	223	232	241	250	259	268	277	286	295	304	313	322	331	340	349	358	...

En estas seis filas estarían todos los números pares e impares que pueden formar parte de cualquier secuencia de Collatz, a partir del primer número impar.

Los números impares 1, 5, 7, 11, 13, 17, . . . y los números pares 2, 4, 8, 10, 14, 16, . . .

Los valores de la primera columna son la raíz digital de todos los números de su fila.

Hay tres tipos de impares según su raíz digital:

Los de la forma $6n+5$ que sus raíces digitales son 5, 2, 8.

Los de la forma $6n+1$ que sus raíces digitales son 1, 7, 4.

Los de la forma $6n+3$ que sus raíces digitales son 3, 9, 6. Estos no están en la tabla porque solamente si es el primer número impar de una secuencia de Collatz, pueden estar en la secuencia.

	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	...
9n+8		8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	188	197	206	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296	305	314	323	332	341	350	359	368	377	386	395	404	413	422	431	440	449	458	...
9n+4		4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	229	238	247	256	265	274	283	292	301	310	319	328	337	346	355	364	373	382	391	400	409	418	427	436	445	454	...
9n+2		2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173	182	191	200	209	218	227	236	245	254	263	272	281	290	299	308	317	326	335	344	353	362	371	380	389	398	407	416	425	434	443	452	...
9n+1		1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154	163	172	181	190	199	208	217	226	235	244	253	262	271	280	289	298	307	316	325	334	343	352	361	370	379	388	397	406	415	424	433	442	451	...
9n+5		5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	185	194	203	212	221	230	239	248	257	266	275	284	293	302	311	320	329	338	347	356	365	374	383	392	401	410	419	428	437	446	455	...
9n+7		7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205	214	223	232	241	250	259	268	277	286	295	304	313	322	331	340	349	358	367	376	385	394	403	412	421	430	439	448	457	...

Aplicando 3n+1 a los impares:

impar par resultante

9n+8 9n+7

9n+4 9n+4

9n+2 9n+7

9n+1 9n+4

9n+5 9n+7

9n+7 9n+4

9n+3, 9n+6, 9n+9 9n+1

Los impares que su raíz digital es 2, 5 y 9 producen pares que su raíz digital es 7.

Los impares que su raíz digital es 1, 4 y 7 producen pares que su raíz digital es 4.

Los impares que su raíz digital es 3, 6 y 9 producen pares que su raíz digital es 1.

raíz digital		
1	3n+1=	4
4	3n+1=	4
7	3n+1=	4
2	3n+1=	7
5	3n+1=	7
8	3n+1=	7
3	3n+1=	1
6	3n+1=	1
9	3n+1=	1

Los impares múltiplos de 3 no están en las secuencias
solamente el primer número impar de la secuencia puede serlo

	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	...
9n+8		8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	188	197	206	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296	305	314	323	332	341	350	359	368	377	386	395	404	413	422	431	440	449	458	...
9n+4		4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	229	238	247	256	265	274	283	292	301	310	319	328	337	346	355	364	373	382	391	400	409	418	427	436	445	454	...
9n+2		2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173	182	191	200	209	218	227	236	245	254	263	272	281	290	299	308	317	326	335	344	353	362	371	380	389	398	407	416	425	434	443	452	...
9n+1		1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154	163	172	181	190	199	208	217	226	235	244	253	262	271	280	289	298	307	316	325	334	343	352	361	370	379	388	397	406	415	424	433	442	451	...
9n+5		5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	185	194	203	212	221	230	239	248	257	266	275	284	293	302	311	320	329	338	347	356	365	374	383	392	401	410	419	428	437	446	455	...
9n+7		7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205	214	223	232	241	250	259	268	277	286	295	304	313	322	331	340	349	358	367	376	385	394	403	412	421	430	439	448	457	...

Aplicando n/2 a los pares:

par par e impar resultantes

9n+8 9n+4

9n+4 9n+2

9n+2 9n+1

9n+1 9n+5

9n+5 9n+7

9n+7 9n+8

9n+3 9n+6

9n+6 9n+3

9n+9 9n+9

Los pares que su raíz digital es 8 producen pares e impares que su raíz digital es 4.

Los pares que su raíz digital es 4 producen pares e impares que su raíz digital es 2.

Los pares que su raíz digital es 2 producen pares e impares que su raíz digital es 1.

Los pares que su raíz digital es 1 producen pares e impares que su raíz digital es 5.

Los pares que su raíz digital es 5 producen pares e impares que su raíz digital es 7.

Los pares que su raíz digital es 7 producen pares e impares que su raíz digital es 8.

Los pares que su raíz digital es 3 producen pares e impares que su raíz digital es 6.

Los pares que su raíz digital es 6 producen pares e impares que su raíz digital es 3.

Los pares que su raíz digital es 9 producen pares e impares que su raíz digital es 9.

raíz digital		
1	n/2=	5
4	n/2=	2
7	n/2=	8
2	n/2=	1
5	n/2=	7
8	n/2=	4
3	n/2=	6
6	n/2=	3
9	n/2=	9

ciclos	
1	5
5	7
7	8
8	4
4	2
2	1
3	6
6	3
9	9

Con 6 números

Con 2 números

Con 1 número

En el siguiente gráfico, los números naturales clasificados según su raíz digital y los números que resultan aplicándoles el algoritmo de Collatz, clasificados también por su raíz digital.

Par 1 = par o impar 5
Impar 5 = par 7
Par 5 = par o impar 7
impar 1 = par 4
par 4 = par o impar 2
par 2 = par o impar 1
Impar 2 = par 7
Par 7 = par o impar 8
Par 8 = par o impar 4
impar 8 = par 7
Impar 7 = par 4
Impar 4 = par 4

"par 1" quiere decir todos los números pares cuya raíz digital es 1.

"impar 5" quiere decir todos los números impares cuya raíz digital es 5.

"par 5" quiere decir todos los números pares cuya raíz digital es 5.

etc, etc, etc.

Todos los impares llegan a pares con raíz digital 4 o 7.

esos pares llegan a impares y pares con raíz digital 2 y 8

Los impares con raíz digital 2 y 8 llegan a pares con raíz digital 7

Los pares con raíz digital 2 llegan a pares e impares con raíz digital 1

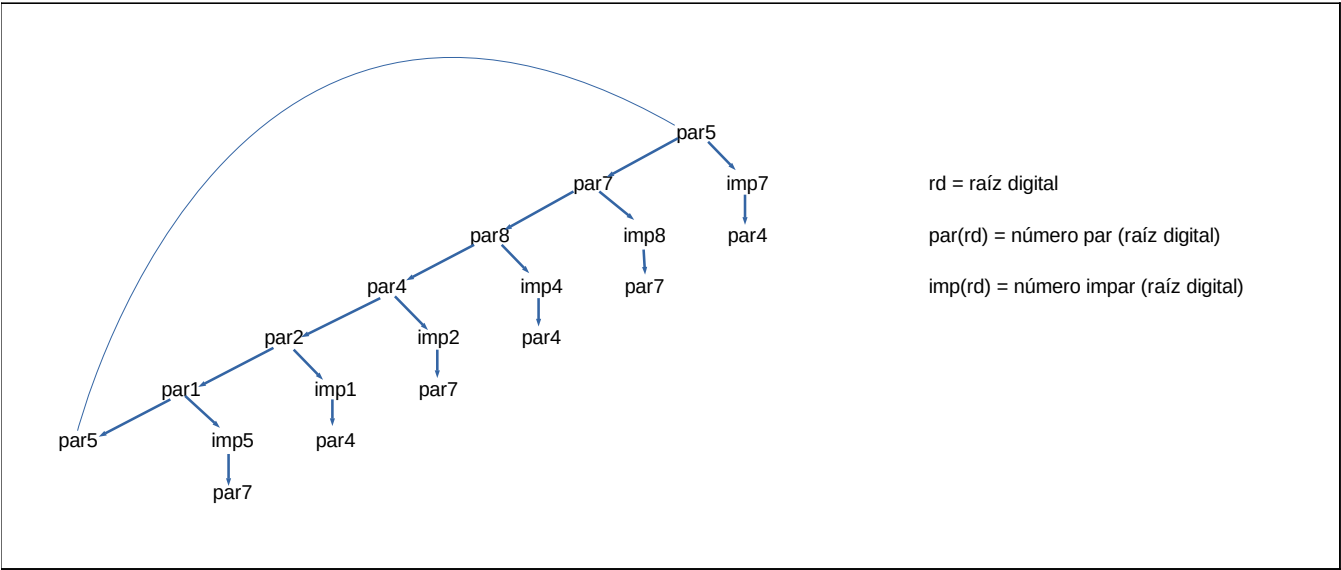
Los pares con raíz digital 8 llegan a pares e impares con raíz digital 4

etc, etc. Completado el ciclo, se llega al número 1.

La secuencia será más larga o más corta dependiendo de la cantidad de pares o impares

Par 1 = par o impar 5 par 4 = par o impar 2 Par 7 = par o impar 8 par 2 = par o impar 1 Par 5 = par o impar 7 Par 8 = par o impar 4	...	Par 5 = par o impar 7 par 2 = par o impar 1 Par 8 = par o impar 4 Par 1 = par o impar 5 Par 7 = par o impar 8 par 4 = par o impar 2	...	Par 7 = par o impar 8 Par 1 = par o impar 5 par 4 = par o impar 2 Par 5 = par o impar 7 Par 8 = par o impar 4 par 2 = par o impar 1	...	Par 8 = par o impar 4 Par 5 = par o impar 7 par 2 = par o impar 1 Par 1 = par o impar 5 par 4 = par o impar 2 Par 7 = par o impar 8	...	par 4 = par o impar 2 Par 7 = par o impar 8 Par 1 = par o impar 5 Par 8 = par o impar 4 par 2 = par o impar 1 Par 5 = par o impar 7
Impar 5 = par 7 Impar 2 = par 7 impar 8 = par 7 impar 1 = par 4 Impar 7 = par 4 Impar 4 = par 4	...	Par 7 = par o impar 8 Par 7 = par o impar 8 par 4 = par o impar 2 par 4 = par o impar 2 par 4 = par o impar 2	...	Par 8 = par o impar 4 Par 8 = par o impar 4 par 2 = par o impar 1 par 2 = par o impar 1 par 2 = par o impar 1	...	par 4 = par o impar 2 par 4 = par o impar 2 par 4 = par o impar 2	...	par 2 = par o impar 1 par 2 = par o impar 1 par 2 = par o impar 1

Los números impares llegan todos a números pares cuya raíz digital es 7 o 4 y esos números pares llegan todos a números pares o impares cuya raíz digital es 1.



[illegible]

9n-1		8	17	26	35	44	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	188	197	206	215	224	...
9n-5		4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	...
9n-7		2	11	20	29	38	47	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	173	182	191	200	209	218	...
9n-8		1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100	109	118	127	136	145	154	163	172	181	190	199	208	217	...
9n-4		5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104	113	122	131	140	149	158	167	176	185	194	203	212	221	...
9n-2		7	16	25	34	43	52	61	70	79	88	97	106	115	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205	214	223	...

[illegible]

Triángulos formados con las columnas de la tabla anterior:

[illegible]

Dividir entre 2 y multiplicar por 3. Este es el argumento de los ciclos que forman una secuencia formada con el algoritmo de la conjetura de Collatz.

	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	...																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
n		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	...																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
0		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	...																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
1		2	1	5	2	8	3	11	4	14	5	17	6	20	7	23	8	26	9	29	10	32	11	35	12	38	13	41	14	44	15	47	16	50	17	53	18	56	19	59	20	62	21	65	22	68	23	71	24	74	25	77	26	80	27	83	28	86	29	89	30	92	31	95	32	...																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
2				8	1		17	2		26	3		35	4		44	5		53	6		62	7		71	8		80	9		89	10		98	11		107	12		116	13		125	14		134	15		143	16		152	17		161	18		170	19		179	20		188	21		197	22		206	23		215	24		224	25		233	26		242	27		251	28		260	29		269	30		278	31		287	32		296	33		305	34		314	35		323	36		332	37		341	38		350	39		359	40		368	41		377	42		386	43		395	44		404	45		413	46		422	47		431	48		440	49		449	50		458	51		467	52		476	53		485	54		494	55		503	56		512	57		521	58		530	59		539	60		548	61		557	62		566	63		575	64		584	65		593	66		602	67		611	68		620	69		629	70		638	71		647	72		656	73		665	74		674	75		683	76		692	77		701	78		710	79		719	80		728	81		737	82		746	83		755	84		764	85		773	86		782	87		791	88		800	89		809	90		818	91		827	92		836	93		845	94		854	95		863	96		872	97		881	98		890	99		899	100		908	101		917	102		926	103		935	104		944	105		953	106		962	107		971	108		980	109		989	110		998	111		1007	112		1016	113		1025	114		1034	115		1043	116		1052	117		1061	118		1070	119		1079	120		1088	121		1097	122		1106	123		1115	124		1124	125		1133	126		1142	127		1151	128		1160	129		1169	130		1178	131		1187	132		1196	133		1205	134		1214	135		1223	136		1232	137		1241	138		1250	139		1259	140		1268	141		1277	142		1286	143		1295	144		1304	145		1313	146		1322	147		1331	148		1340	149		1349	150		1358	151		1367	152		1376	153		1385	154		1394	155		1403	156		1412	157		1421	158		1430	159		1439	160		1448	161		1457	162		1466	163		1475	164		1484	165		1493	166		1502	167		1511	168		1520	169		1529	170		1538	171		1547	172		1556	173		1565	174		1574	175		1583	176		1592	177		1601	178		1610	179		1619	180		1628	181		1637	182		1646	183		1655	184		1664	185		1673	186		1682	187		1691	188		1700	189		1709	190		1718	191		1727	192		1736	193		1745	194		1754	195		1763	196		1772	197		1781	198		1790	199		1799	200		1808	201		1817	202		1826	203		1835	204		1844	205		1853	206		1862	207		1871	208		1880	209		1889	210		1898	211		1907	212		1916	213		1925	214		1934	215		1943	216		1952	217		1961	218		1970	219		1979	220		1988	221		1997	222		2006	223		2015	224		2024	225		2033	226		2042	227		2051	228		2060	229		2069	230		2078	231		2087	232		2096	233		2105	234		2114	235		2123	236		2132	237		2141	238		2150	239		2159	240		2168	241		2177	242		2186	243		2195	244		2204	245		2213	246		2222	247		2231	248		2240	249		2249	250		2258	251		2267	252		2276	253		2285	254		2294	255		2303	256		2312	257		2321	258		2330	259		2339	260		2348	261		2357	262		2366	263		2375	264		2384	265		2393	266		2402	267		2411	268		2420	269		2429	270		2438	271		2447	272		2456	273		2465	274		2474	275		2483	276		2492	277		2501	278		2510	279		2519	280		2528	281		2537	282		2546	283		2555	284		2564	285		2573	286		2582	287		2591	288		2600	289		2609	290		2618	291		2627	292		2636	293		2645	294		2654	295		2663	296		2672	297		2681	298		2690	299		2699	300		2708	301		2717	302		2726	303		2735	304		2744	305		2753	306		2762	307		2771	308		2780	309		2789	310		2798	311		2807	312		2816	313		2825	314		2834	315		2843	316		2852	317		2861	318		2870	319		2879	320		2888	321		2897	322		2906	323		2915	324		2924	325		2933	326		2942	327		2951	328		2960	329		2969	330		2978	331		2987	332		2996	333		3005	334		3014	335		3023	336		3032	337		3041	338		3050	339		3059	340		3068	341		3077	342		3086	343		3095	344		3104	345		3113	346		3122	347		3131	348		3140	349		3149	350		3158	351		3167	352		3176	353		3185	354		3194	355		3203	356		3212	357		3221	358		3230	359		3239	360		3248	361		3257	362		3266	363		3275	364		3284	365		3293	366		3302	367		3311	368		3320	369		3329	370		3338	371		3347	372		3356	373		3365	374		3374	375		3383	376		3392	377		3401	378		3410	379		3419	380		3428	381		3437	382		3446	383		3455	384		3464	385		3473	386		3482	387		3491	388		3500	389		3509	390		3518	391		3527	392		3536	393		3545	394		3554	395		3563	396		3572	397		3581	398		3590	399		3599	400		3608	401		3617	402		3626	403		3635	404		3644	405		3653	406		3662	407		3671	408		3680	409		3689	410		3698	411		3707	412		3716	413		3725	414		3734	415		3743	416		3752	417		3761	418		3770	419		3779	420		3788	421		3797	422		3806	423		3815	424		3824	425		3833	426		3842	427		3851	428		3860	429		3869	430		3878	431		3887	432		3896	433		3905	434		3914	435		3923	436		3932	437		3941	438		3950	439		3959	440		3968	441		3977	442		3986	443		3995	444		4004	445		4013	446		4022	447		4031	448		4040	449		4049	450		4058	451		4067	452		4076	453		4085	454		4094	455		4103	456		4112	457		4121	458		4130	459		4139	460		4148	461		4157	462		4166	463		4175	464		4184	465		4193	466		4202	467		4211	468		4220	469		4229	470		4238	471		4247	472		4256	473		4265	474		4274	475		4283	476		4292	477		4301	478		4310	479		4319	480		4328	481		4337	482		4346	483		4355	484		4364	485		4373	486		4382	487		4391	488		4400	489		4409	490		4418	491		4427	492		4436	493		4445	494		4454	495		4463	496		4472	497		4481	498		4490	499		4499	500		4508	501		4517	502		4526	503		4535	504		4544	505		4553	506		4562	507		4571

PRIMER CICLO: Si el número que empieza la secuencia es un número par m , el primer número del ciclo A es $m-1$ y si el número es impar, ese número es A . El último número del ciclo es B .

Los demás números del ciclo se obtienen de la siguiente forma: $A+1$ se divide entre 2 las veces que se pueda y después se multiplica por 3 las mismas veces.

SIGUIENTES CICLOS: El primer número es $B/2^n$. Los demás números se obtienen de la misma forma que los del primer ciclo.

Los ciclos se sucederán hasta que el último número de un ciclo sea $B = 2^n$. El ciclo más corto consta de 5 números: A , $A+1$, $(A+1)/2$, $(A+1)*3/2$ y $(A+1)*3/2-1$

La longitud de los ciclos depende de 2^n que divide $A+1$, siendo el más corto cuando $n=1$. ¿Cual sería el más largo? ¿Puede existir 2^∞ ?

$$(A(3/2)^x + (3/2)^{x-1})/2^n = A1 \quad (A1(3/2)^x + (3/2)^{x-1})/2^n = A2 \quad (A2(3/2)^x + (3/2)^{x-1})/2^n = A3 \quad \dots$$

Fórmula para cada ciclo:

$$\frac{A(n) \left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}{2^n}$$

El numerador es siempre un número par.

$A(n)$ son los números impares de la secuencia, hasta el 5.

El exponente x es el que corresponde al número par de la columna del impar. Ejemplo: Al número 31 le corresponde $x=5$, que es el valor de

n de la tabla para el número par de su columna, el 242. Podemos conocerlo, sin consultar la tabla, de la forma siguiente: Sumamos 1 al

número impar A y el número de divisiones entre 2 que se puedan hacer, ese será el valor de x .

El valor del exponente n es el número de divisiones posibles entre 2 del número par.

Iniciamos una secuencia con el número 77:

Para conocer el valor de x , le sumamos 1 y dividimos entre 2 las veces posibles: $78/2=39$. El valor es $x=1$

$$77(3/2) + (3/2) - 1 = 116 \quad 116/2 = 58 \quad 58/2 = 29$$

$$29(3/2) + (3/2) - 1 = 44 \quad 44/2 = 22 \quad 22/2 = 11$$

$$11(3/2) + (3/2) - 1 = 26 \quad 26/2 = 13$$

$$13(3/2) + (3/2) - 1 = 20 \quad 20/2 = 10 \quad 10/2 = 5$$

$$5(3/2) + (3/2) - 1 = 8 \quad 8/2 = 4 \quad 4/2 = 2 \quad 2/2 = 1$$

La secuencia: 77, 29, 11, 13, 5, 1, 1, 1, ...

Un ejemplo : Comenzamos con el número 38228. Como es un número par, lo dividimos entre 2 las veces necesarias hasta llegar al 9557. Seguimos $(9557-1)/4=2389$. $(2389-1)/4=597$. $(597-1)/4=149$. $(149-1)/4=37$. $(37-1)/4=9$. $(9-1)/4=2$. Como es un número par, esto nos indica que la sucesión acaba con el número impar 9.

Otro ejemplo : Comenzamos por el 469. $(469-1)/4=117$. $(117-1)/4=29$. $(29-1)/4=7$. $(7-1)/4=1,5$. Como es un número decimal, esto nos indica que la sucesión termina con el número 7.

Otras sucesiones están formadas solamente por un solo número impar : El número 966 par, lo dividimos entre 2 y obtenemos el impar 483. $(483-1)/4=120,5$ La sucesión acaba con el 483.

Aunque esta sucesión esté formada solamente por el impar 483, podemos saber todos los impares anteriores aplicando $4*m+1$, donde m es el número impar : $4*483+1=1933$. $4*1933+1=7733$. $4*7733+1=30933$ En cualquier sucesión podemos hacer lo mismo.

Para saber a qué impar conecta cada sucesión a través de su último impar, haremos :

Si el último impar ha dado un número par, como es el caso del 9 en el ejemplo anterior, haremos $(3*9+1)/4=7$. La sucesión que termina en 9 estará unida a otra sucesión mediante el impar 7.

Si el último par ha dado como resultado un número decimal, como es el caso del 7 en el ejemplo anterior, haremos $(3*7+1)/2=11$. La sucesión que termina en 7 estará unida a otra sucesión mediante el impar 11.

Todas las sucesiones unidas entre sí forman un fractal infinito, cuyo tronco principal es la sucesión de los números impares que acaban en 1. ($4*1+1=5$, $4*5+1=21$, $4*21+1=85$, $4*85+1=341$, ...). Este tronco principal tiene a su vez conectadas a cada número otras sucesiones, también infinitas, a las cuales también hay conectadas otras sucesiones, que también conectan otras sucesiones, etc.

El último número del tronco principal antes de llegar al 1 es el 5, que conecta con la sucesión que calculamos de esta manera : $(4*5-2)/6=3$, $4*3+1=13$, $4*13+1=53$, $4*53+1=213$, ...

Calculo de los impares que conectan con los impares de la forma $6n-1$, que sus dígitos suman 5, 2, 8 aplicamos $(m*4-2)/6$, donde m es el impar al que conectan.

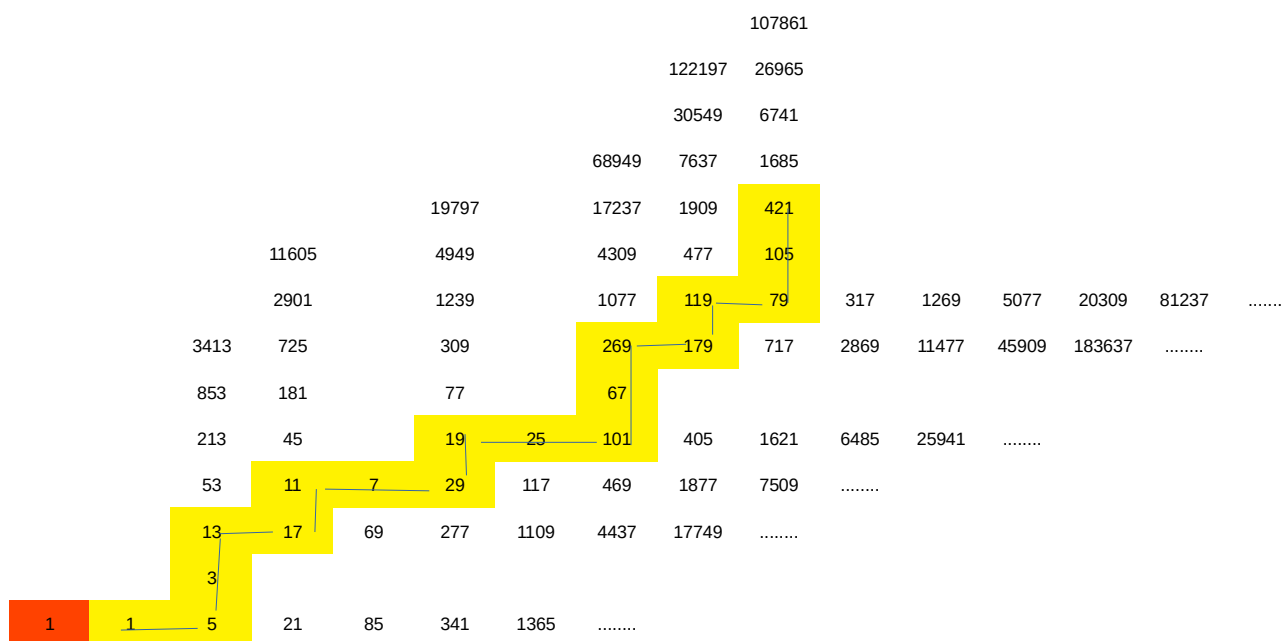
Si los impares son de la forma $6n-5$ que sus dígitos suman 1, 7, 4 aplicamos $(m*4-1)/3$

Hay impares que no forman ninguna sucesión porque no llegan a ellos ningún impar. Son los impares de la forma $6n-3$ que sus dígitos suman 3, 9, 6.

La sucesión que se forma con el enunciado de la conjetura de Collatz sin los números pares, la forman números impares que forman parte de otras sucesiones de impares perfectamente organizadas con una distancia entre ellos siempre igual. La distancia entre los impares en todas las sucesiones es la misma y es $(m-1)/4$, motivo por el cual siempre llegamos al 1 a través de las diferentes sucesiones conectadas entre sí.

El 1 es el principio de todos los caminos. Es el inicio de la partida pero también es el final del regreso. El principio del camino es el final a la vuelta.

A continuación el gráfico de la parte del fractal en la que vemos la ruta del número 421 hasta el 1. Todos los números llegan al 1 a través de las diferentes sucesiones conectadas entre sí.



A continuación las diferentes sucesiones que intervienen en el gráfico anterior.

Las sucesiones que intervienen											
verticales						horizontales					
3413	11605	19797	68949	122197	107861	1	5	21	85	341	1365
853	2901	4949	17237	30549	26965	17	69	277	1109	4437	17749
213	725	1239	4309	7637	6741	7	29	117	469	1877	7509
53	181	309	1077	1909	1685	25	101	405	1621	6485	25941
13	45	77	269	477	421	179	717	2869	11477	45909	183637
3	11	19	67	119	105	79	317	1269	5077	20309	81237

Los números en amarillo son los números que conectan las diferentes sucesiones que interviene para formar la sucesión principal que, aplicando el algoritmo de Collatz, empieza en el número 421 hasta acabar en el 1.

Pollensa, 24 de Julio de 2018

M	Fórmula	n	1	2	3	4	5	
1	$(1 \cdot 4^n - 1)/3$	1		5	21	85	341	
7	$(7 \cdot 4^n - 1)/3$	9		37	149	597	2389	
13	$(13 \cdot 4^n - 1)/3$	17		69	277	1109	4437	
19	$(19 \cdot 4^n - 1)/3$	25		101	405	1621	6485	
25	$(25 \cdot 4^n - 1)/3$	33		133	533	2133	8533	
.....								
			$(3 \cdot \text{Impar} + 1)/2^{2n+2} = M$					

M	Fórmula	n	1	2	3	4	5	
5	$(5 \cdot 4^n - 2)/6$	3		13	53	213	853	
11	$(11 \cdot 4^n - 2)/6$	7		29	117	469	1877	
17	$(17 \cdot 4^n - 2)/6$	11		45	181	725	2901	
23	$(23 \cdot 4^n - 2)/6$	15		61	245	981	3925	
29	$(29 \cdot 4^n - 2)/6$	19		77	309	1237	4949	
.....								
			$(3 \cdot \text{Impar} + 1)/2^{2n+1} = M$					

Cálculo de los impares que llegan a los impares de la forma $6n-5$ (sus dígitos suman 1, 7, 4)

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 1 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 7 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 13 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 19 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 25 después de aplicarles el problema de Collatz

Podemos seguir con los impares "M" de la forma $6n-5$ y calcular los impares que llegan a ellos.

Cálculo de los impares que llegan a los impares de la forma $6n-1$ (sus dígitos suman 5, 2, 8)

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 5 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 11 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 17 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 23 después de aplicarles el problema de Collatz

Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 29 después de aplicarles el problema de Collatz

Podemos seguir con los impares "M" de la forma $6n-1$ y calcular los impares que llegan a ellos.

Las columnas kn de la tabla puestas como filas de triángulos.

Vértices $T_n = 0, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 24, \dots$ A0047233 Números congruentes a 0, 4 mod 6.

0, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 24, 28, 30, 34, 36, 40, 42, 46, 48, 52, 54, 58, 60, 64, 66,
70, 72, 76, 78, 82, 84, 88, 90, 94, 96, 100, 102, 106, 108, 112, 114, 118, 120, 124,
126, 130, 132, 136, ...

Triángulo $T=0$

c	n																	
	0	0																
1	1	1	2															
2	2	3	5	8														
4	3	7	11	17	26													
8	4	15	23	35	53	80												
16	5	31	47	71	107	161	242											
32	6	63	95	143	215	323	485	728										
64	7	127	191	287	431	647	971	1457	2186									
128	8	255	383	575	863	1295	1943	2915	4373	6560								
256	9	511	767	1151	1727	2591	3887	5831	8747	13121	19682							
512	10	1023	1535	2303	3455	5183	7775	11663	17495	26243	39365	59048						
1024	11	2047	3071	4607	6911	10367	15551	23327	34991	52487	78731	118097	177146					
2048	12	4095	6143	9215	13823	20735	31103	46655	69983	104475	157463	236195	354293	531440				
4096	13	8191	12287	18431	27647	41471	62207	93311	139967	209951	314927	472391	708587	1062881	1594322			
8192	14	16383	24575	36863	55295	82943	124415	186623	279935	419903	629855	944783	1417175	2125763	3188645	4782968		
16384	15	32767	49151	73727	110591	165887	248831	373247	559871	839807	1259711	1889567	2834351	4251527	6377291	9565937	14348906	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

c = columna kn de la tabla.

n = fila del triángulo.

En cada fila: $1 \cdot 2^n (3/2)^{n-1} = 1 \cdot 3^{n-1}$

$$n0 : 1 \cdot (2^0) (3/2)^{0-1} = 0$$

$$n1 : 1 \cdot (2^1) (3/2)^{1-1} = 2$$

$$2/2 = 1$$

$$n2 : 1 \cdot (2^2) (3/2)^{2-1} = 8$$

$$8/2^3 = 1$$

$$n3 : 1 \cdot (2^3) (3/2)^{3-1} = 26$$

$$26/2 = 13$$

$$n4 : 1 \cdot (2^4) (3/2)^{4-1} = 80$$

$$80/2^4 = 5$$

$$n5 : 1 \cdot (2^5) (3/2)^{5-1} = 242$$

$$242/2 = 121$$

$$n6 : 1 \cdot (2^6) (3/2)^{6-1} = 728$$

$$728/2^3 = 91$$

...

$$1 \cdot 2^n (3/2)^{n-1} = 1 \cdot 3^{n-1} = \text{PAR}$$

$$1 \cdot 2^{n-1} = \text{PRIMER IMPAR}$$

$$1 \cdot 2^{n-1} \text{ llega hasta } 1 \cdot 3^{n-1}$$

La trayectoria de las secuencias en el triángulo:

c	n	0		1									
	0	0	1	2		5							
1	1	1	2	4		10							
2	2	3	5	8	13	20							
4	3	7	11	17	26	40		91		205			
8	4	15	23	35	53	80	121	182		410			
16	5	31	47	71	107	161	242	364		820			
32	6	63	95	143	215	323	485	728	1093	1640			
64	7	127	191	287	431	647	971	1457	2186	3280		7381	
128	8	255	383	575	863	1295	1943	2915	4373	6560	9841	14762	
256	9	511	767	1151	1727	2591	3887	5831	8747	13121	19682	29524	
512	10	1023	1535	2303	3455	5183	7775	11663	17495	26243	39365	59048	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

n	1	2	3	4	5
$\frac{1}{4} (9^n - 1)$	2	20	182	1640	14762

La fórmula: $\frac{1}{4}((T+1)*9^n-1)$, porque el número del vértice, 0 rojo, es par.

Triángulo T=4

n																	
0	4																
1	9	14															
2	19	29	44														
3	39	59	89	134													
4	79	119	179	269	404												
5	159	239	359	539	809	1214											
6	319	479	719	1079	1619	2429	3644										
7	639	959	1439	2159	3239	4859	7289	10934									
8	1279	1919	2879	4319	6479	9719	14579	21869	32804								
9	2559	3839	5759	8639	12959	19439	29159	43739	65609	98414							
10	5119	7679	11519	17279	25919	38879	58319	87479	131219	196829	295244						
11	10239	15359	23039	34559	51839	77759	116639	174959	262439	393659	590489	885734					
12	20479	30719	46079	69119	103679	155519	233279	349919	524879	787319	1180979	1771469	2657204				
13	40959	61439	92159	138239	207359	311039	466559	699839	1049759	1574639	2361959	3542939	5294409	7971614			
14	81919	122879	184319	276479	414719	622079	933119	1399679	2099519	3149279	4723919	7085879	10588819	15943229	23914844		
15	163839	245759	368639	552959	829439	1244159	1866239	2799359	4199039	6298559	9447839	14171759	21177639	31886459	47829689	71744534	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

En cada fila:

$$\begin{aligned}
 5(2^0)(3/2)^{0-1} &= 4 & 4/2^2 &= 1 \\
 5(2^1)(3/2)^{1-1} &= 14 & 14/2 &= 7 \\
 5(2^2)(3/2)^{2-1} &= 44 & 44/2^2 &= 11 \\
 5(2^3)(3/2)^{3-1} &= 134 & 134/2 &= 67 \\
 5(2^4)(3/2)^{4-1} &= 404 & 404/2^2 &= 101 \\
 5(2^5)(3/2)^{5-1} &= 1214 & 1214/2 &= 607 \\
 5(2^6)(3/2)^{6-1} &= 3644 & 3644/2^2 &= 911 \\
 & \dots & &
 \end{aligned}$$

$$5 \cdot 2^n (3/2)^{n-1} = 5 \cdot 3^{n-1} = \text{PAR}$$

$$5 \cdot 2^{n-1} = \text{PRIMER IMPAR}$$

$$5 \cdot 2^{n-1} \text{ llega hasta } 5 \cdot 3^{n-1}$$

La trayectoria de las secuencias en el triángulo:

c	n	2											
	0	4	7	11									
5	1	9	14	22									
10	2	19	29	44	67	101							
20	3	39	59	89	134	202							
40	4	79	119	179	269	404	607	911					
80	5	159	239	359	539	809	1214	1822					
160	6	319	479	719	1079	1619	2429	3644	5467	8201			
320	7	639	959	1439	2159	3239	4859	7289	10934	16402			
640	8	1279	1919	2879	4319	6479	9719	14579	21869	32804	49207	73811	
1280	9	2559	3839	5759	8639	12959	19439	29159	43739	65609	98414	147622	
2560	10	5119	7679	11519	17279	25919	38879	58319	87479	131219	196829	295244	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

n	1	2	3	4	5
$\frac{1}{4} (5 \times 9^n - 1)$	11	101	911	8201	73811

La fórmula: $\frac{1}{4}((T+1) \cdot 9^n - 1)$, porque el número del vértice, 2 rojo, es par.

Triángulo T=6

n																	
0	6																
1	13	20															
2	27	41	62														
3	55	83	125	188													
4	111	167	251	377	566												
5	223	335	503	755	1133	1700											
6	447	671	1007	1511	2267	3401	5102										
7	895	1343	2015	3023	4535	6803	10205	15308									
8	1791	2687	4031	6047	9071	13607	20411	30617	45926								
9	3583	5375	8063	12095	18143	27215	40823	61235	91853	137780							
10	7167	10751	16127	24191	36287	54431	81647	122471	183707	275561	413342						
11	14335	21503	32255	48383	72575	108863	163295	244943	367415	551123	826685	1240028					
12	28671	43007	64511	96767	145151	217727	326591	489887	734831	1102247	1653371	2480057	3720086				
13	57343	86015	129023	193535	290303	435455	653183	979775	1469663	2204495	3306743	4960115	7440173	11160260			
14	114687	172031	125047	387071	580607	870911	1306367	1959551	2939327	4408991	6613487	9920231	14880347	22320521	33480782		
15	229375	344063	516095	774143	1161215	1741823	2612735	3919103	5878655	8817983	13226975	19840463	29760695	44641043	66961565	100442348	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

La trayectoria de las secuencias en el triángulo:

c	n	3	5														
	0	6	10														
7	1	13	20	31	47												
14	2	27	41	62	94												
28	3	55	83	125	188	283	425										
56	4	111	167	251	377	566	850										
112	5	223	335	503	755	1133	1700	2551	3827								
224	6	447	671	1007	1511	2267	3401	5102	7654								
448	7	895	1343	2015	3023	4535	6803	10205	15308	22963	34445						
896	8	1791	2687	4031	6047	9071	13607	20411	30617	45926	68890						
1792	9	3583	5375	8063	12095	18143	27215	40823	61235	91853	137780	206671					
3584	10	7167	10751	16127	24191	36287	54431	81647	122471	183707	275561	413342					
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

n	1	2	3	4	5
$\frac{1}{12}(7 \times 9^n - 3)$	5	47	425	3827	34445

La fórmula: $\frac{1}{12}((T+1)*9^n-3)$, porque el número del vértice, 3 rojo, es impar.

La trayectoria de las secuencias en el triángulo Triángulo T=10:

			1										
			2										
			4										
c	n	5	8										
	0	10	16		37								
11	1	21	32	49	74		167						
22	2	43	65	98	148		334						
44	3	87	131	197	296	445	668				3383		
88	4	175	263	395	593	890	1336		3007		6766		
176	5	351					2672	4009	6014		13532		
352	6	703						8018	12028		27064		
704	7	1407							24056	36085	54128		
1408	8	2817								72170	108256		243577
2816	9	5631									216512	324769	487154
5632	10	11263										649538	974308
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

n	1	2	3	4	5
$\frac{1}{12} (11 \times 9^n - 3)$	8	74	668	6014	54128

La fórmula: $\frac{1}{12}((T+1)*9^n-3)$, porque el número del vértice, 5 rojo, es impar.

La trayectoria de las secuencias en el triángulo T=12:

c	n	6											
	0	12	19	29									
13	1	25	38	58									
26	2	51		116	175	263							
52	3	103			350	526							
104	4	207				1052	1579	2369					
208	5	415					3158	4738					
416	6	831						9476	14215	21323			
832	7	1663							28430	42646			
1664	8	3327								85292	127939	191909	
3328	9	6655									255878	383818	
6656	10	13311											767636
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

n	1	2	3	4	5
$\frac{1}{4} (13 \times 9^n - 1)$	29	263	2369	21 323	191 909

La fórmula: $\frac{1}{4}((T+1)*9^n-1)$, porque el número del vértice, 6 rojo, es par.

La trayectoria de las secuencias en el triángulo:

		1											
		2											
		4											
c	n	8		19		43							
	0	16	25	38		86							
17	1	33	50	76		172							
34	2	67		152	229	344							
68	3	135			458	688		1549					
136	4	271				1376	2065	3098		6971			
272	5	543					4130	6196		13942			
544	6	1087						12392	18589	27884			
1088	7	2175							37178	55768		125479	
2176	8	4351								111536	167305	250958	
4352	9	8703									334610	501916	
8704	10	17407										1003832	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

n	1	2	3	4	5
$\frac{1}{4}(17 \times 9^n - 1)$	38	344	3098	27884	250958

La fórmula: $\frac{1}{4}((T+1) \cdot 9^n - 1)$, porque el número del vértice, 8 rojo, es par.

La trayectoria de las secuencias en el triángulo:

					1									
					2									
					4									
					8									
		3			16									
c	n		7		32									
	0	9	14		64									
		18	28											
19	1	37	56		128									
38	2	75	113	170	256									
76	3	151	227	341	512	769	1154							
152	4	303	455	683	1025	1538	2308			2597				
304	5	607	911	1367	2051	3077	4616	6925	10388					
608	6	1215	1823	2735	4103	6155	9233	13850	20776					
1216	7	2431	3647	5471	8207	12311	18467	27701	41552	62329	93494			
2432	8	4863	7295	10943	16415	24623	36935	55403	83105	124658	186988			
4864	9	9727	14591	21887	32831	49247	73871	110807	166200	249317	373976	560965		
9728	10	19455	29183	43775	65663	98495	147743	221615	332423	498635	747953	1121930	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

n	1	2	3	4	5
$\frac{1}{12}(19 \times 9^n - 3)$	14	128	1154	10388	93494

La fórmula: $\frac{1}{12}((T+1) \cdot 9^n - 3)$, porque el número del vértice, 9 rojo, es impar.

$T(0) = 2, 20, 182, 1640, 14762, \dots$
 $T(4) = 11, 101, 911, 8201, 73811, \dots$
 $T(6) = 5, 47, 425, 3827, 34445, \dots$
 $T(10) = 8, 74, 668, 6014, 54128, \dots$
 $T(12) = 29, 263, 2369, 21323, 191909, \dots$
 $T(16) = 38, 344, 3098, 27884, 250958, \dots$

$T(18) = 14, 128, 1154, 10388, 93494, \dots$
 $T(22) = 17, 155, 1397, 12575, 113177, \dots$
 $T(24) = 56, 506, 4556, 41006, 369056, \dots$
 $T(28) = 65, 587, 5285, 47567, 428105, \dots$
 $T(30) = 23, 209, 1883, 16949, 152543, \dots$
 $T(34) = 26, 236, 2126, 19136, 172226, \dots$
 $T(36) = 83, 749, 6743, 60689, 546203, \dots$
 $T(40) = 92, 830, 7472, 67250, 605252, \dots$
 $T(42) = 32, 290, 2612, 23510, 211592, \dots$
 $T(46) = 35, 317, 2855, 25697, 231275, \dots$
 $T(48) = 110, 992, 8930, 80372, 723350, \dots$
 $T(52) = 119, 1073, 9659, 86933, 782399, \dots$
 $T(54) = 41, 371, 3341, 30071, 270641, \dots$
 $T(58) = 44, 398, 3584, 32258, 290324, \dots$

Las dos fórmulas son:

Cuando $T/2$ es par	$1/4((T+1)*9^n-1)$
Cuando $T/2$ es impar	$1/12((T+1)*9^n-3)$

Todas las secuencias pasan por los números:

$$2, 5, 8, \underline{11}, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, \dots, 3n+2$$

Todas las secuencias convergen a un número $3n+2$ antes de llegar a 1.

1876, 938, 469, 704, 352, 176, 88, 44, 22, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1

Los números 938, 704, 176, 44, 11, 17, 26, 20, 5, 8, 2, son de la forma $3n+2$.

Todos los números de los triángulos $T(n)$ convergen a los números que son $3n+2$.

La raíz digital de estos números es 2, 5 y 8. Quiere decir esto que en los triángulos se encuentran de la siguiente manera: Los de raíz digital 2 y 5 están en la segunda columna. Los de raíz digital 8 están en la tercera columna y siguientes. Solamente en la primera columna están los números con raíz digital 1, 4, 7, 3, 6 y 9.

En la primera fila los números de la forma $3n+2$ a los que llegan todas las secuencias y en las demás filas, los números que resultan de aplicarles el algoritmo de Collatz: si n es par, $n/2$ y si n es impar, $(3n+1)/2$:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38

II. LA CONJETURA DE COLLATZ.

Orden y armonía en los números de las secuencias. (Continuación).

Miquel Cerdà Bennassar

Noviembre 2019

No se puede entender este escrito si no se conoce el anterior de Agosto 2019.

La tabla de los números pares:

	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	...
n																																																		...			
0		2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100	102	...
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	...	
2		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14		15		16		17		18		19		20		21		22		23		24		25	...		
3				1				2				3				4				5				6							8					9				10						11			12			...	
4					1				1								2								3								4							5							6			...			
5																	1																	2																...			
6																																																			...		
7																																																			...		
Pares	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	6	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	...	

En la fila "Pares", la cantidad de divisores de k de la forma 2^n . También son la cantidad de iteraciones $n/2$ que necesita el número par para llegar al número impar. También son la n -ésima potencia 2 que divide a los números pares: $2^1|2$, $2^2|4$, $2^1|6$, $2^3|8$, $2^1|10$, $2^2|12$, ... También son el valor de n del último número impar de las columnas y también son la cantidad de números pares que hay en las columnas.

La tabla de los números impares:

[illegible]

En la fila "Impares", la cantidad de divisores de k de la forma 2^n . También son la cantidad de iteraciones $(3n+1)/2$ que necesita el primer número impar de la columna para llegar al número par. También son el valor de n del último número par de las columnas y también son la cantidad de números impares que hay en las columnas.

A continuación, las tablas de números pares y de números impares agrupadas en una sola tabla:

[illegible]

A partir de las columnas k de la tabla, formamos los triángulos de la siguiente manera:

Empezando por k impar, cada fila del triángulo es $2k+1$ y empezando por k par, cada fila es $2k$.

Ejemplos de triángulos formados con las columnas k impar:

[illegible]

Ejemplos de triángulos formados con las columnas k par:

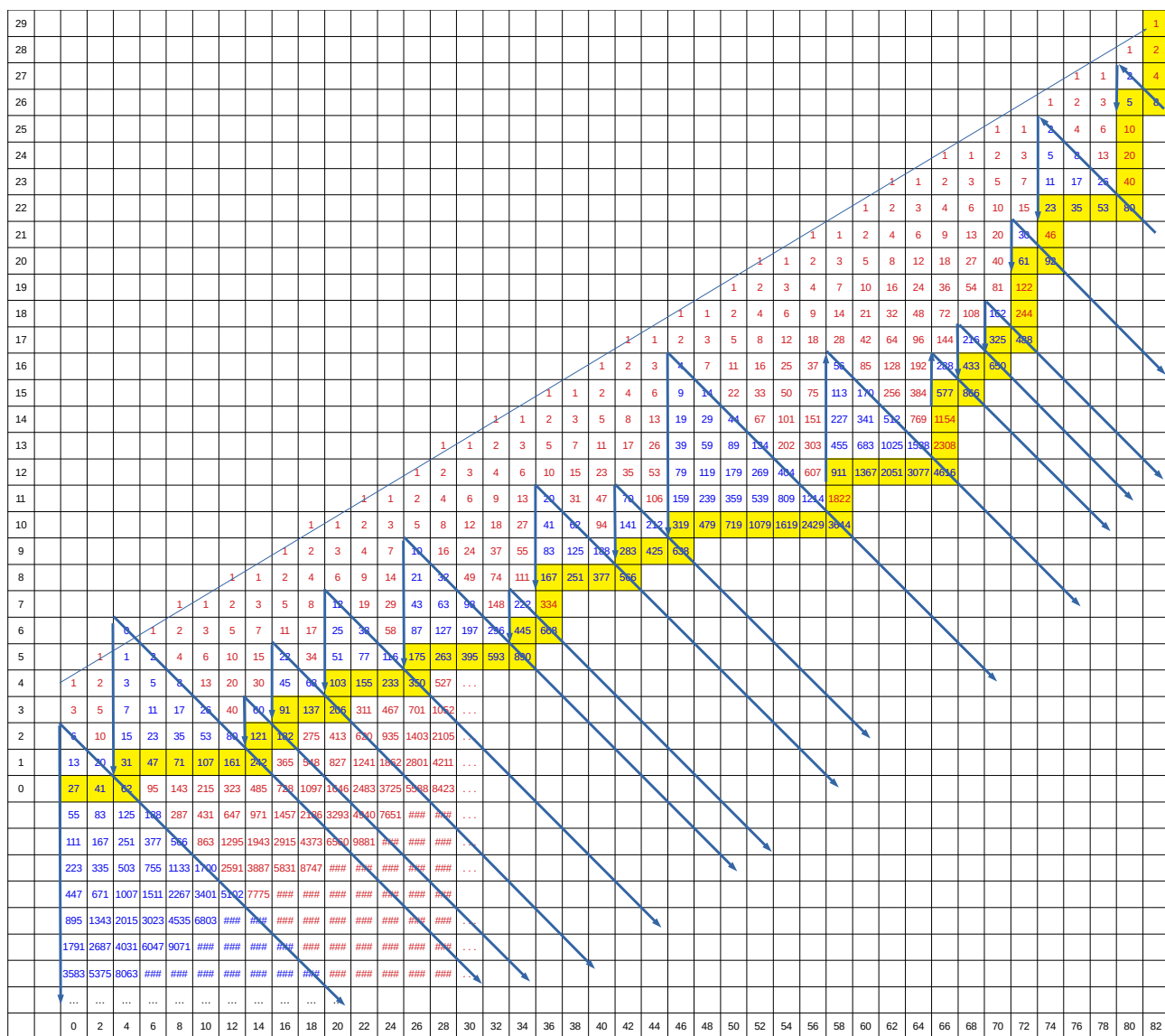
[illegible]

Todas las columnas de impares de la tabla las podemos poner como filas de los triángulos.

Las columnas de números pares de la tabla también son las columnas de los triángulos, si les sumamos 1 a sus números.

Ejemplo: La columna $k(39)$ de la tabla es la fila $k(39)$ del triángulo $T(4)$ y la columna $k(40)$ de la tabla está en la primera columna del mismo triángulo $T(5)$.

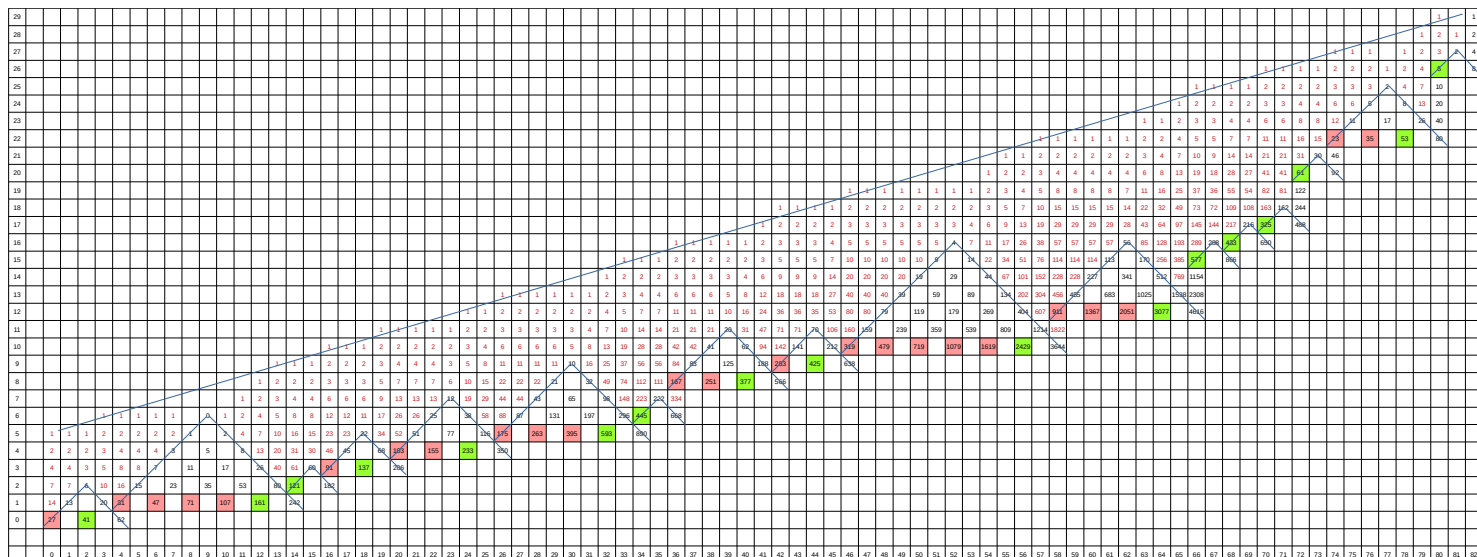
	k	...	39	40
n				
0		...	39	40
1		...	59	20
2			89	10
3			134	5
4				
5				
...				



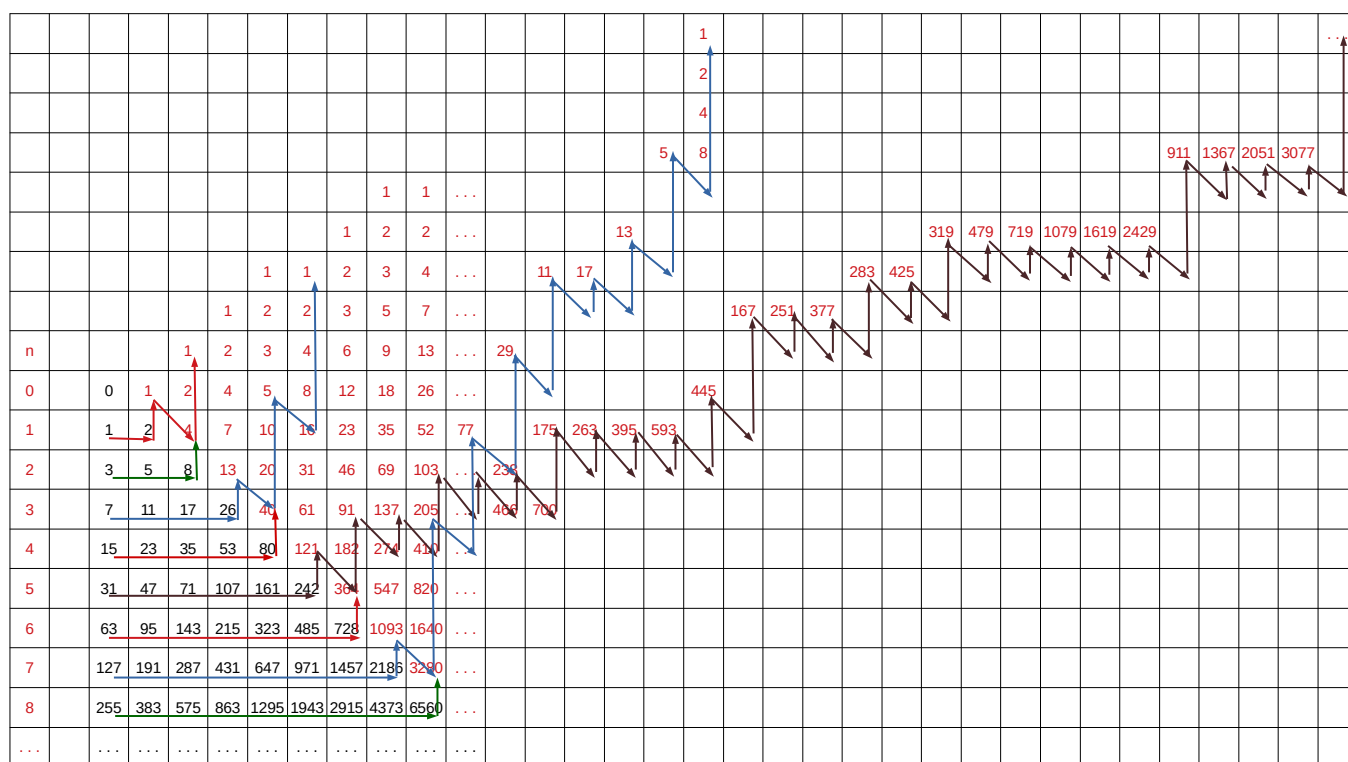
Los pasos horizontales en las filas de los triángulos de números impares, hacen que la secuencia se aleje de la línea de los números 1 y son los pasos verticales de los números pares los responsables de que la secuencia se acerque a dicha línea.

Todas las columnas de la tabla terminan en el número 1 y cualquier secuencia por larga que sea, llegará siempre a la columna que le lleve al número 1, porque hay infinitas columnas.

Los diferentes ciclos de las secuencias se pueden representar también como filas de triángulos equiláteros:



En la tabla siguiente, desarrollada a partir del triángulo $T(0)$, se podrá representar cualquier secuencia cuyo primer número impar de la misma esté en ese triángulo.



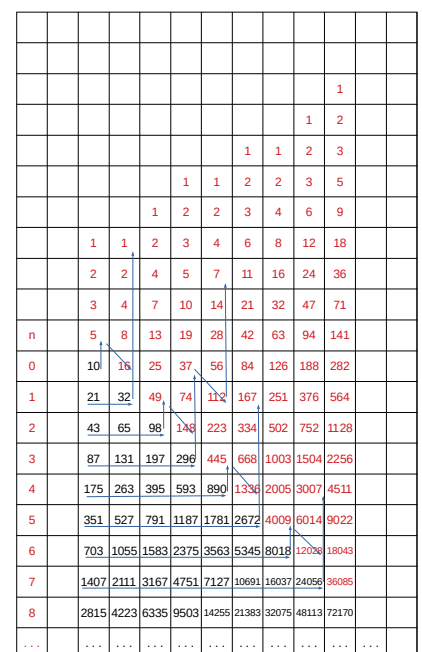
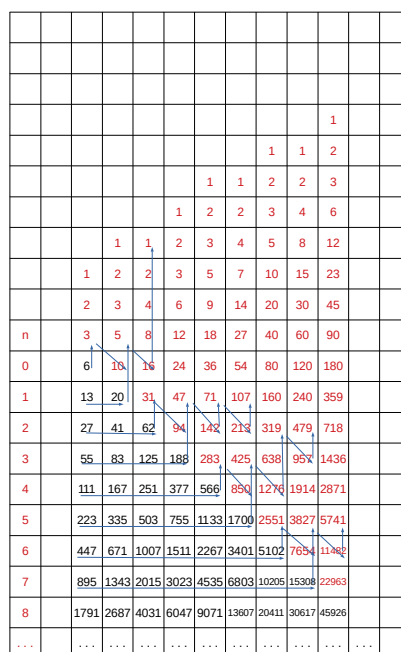
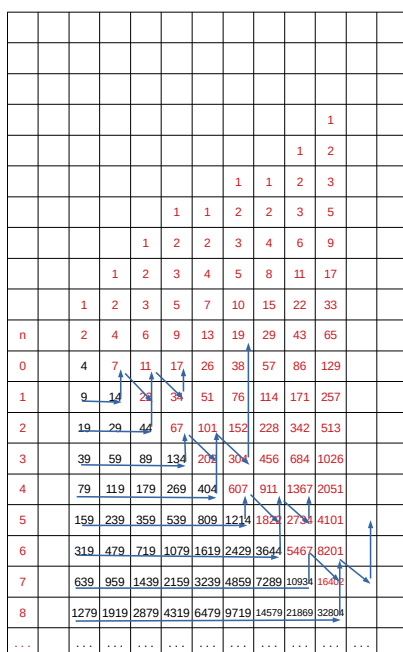
Las filas del triángulo $n(1)$, $n(2)$, $n(3)$, $n(4)$, $\dots$ son las columnas $k(1)$, $k(2)$, $k(4)$, $k(8)$, $\dots$ de la tabla de los números impares.

Muchas secuencias comparten la misma trayectoria desde la salida del triángulo hasta llegar al 1. En esta tabla, los números de las secuencias que comparten la ruta son los de $n(1)$ con $n(2)$, $n(3)$ con $n(4)$, $n(5)$ con $n(6)$, $n(7)$ con $n(8)$, etc. Las 44 secuencias que se podrían formar empezando con cada uno de los 44 números del triángulo, todas tendrían solamente 4 rutas por las que llegar hasta el 1. Esto ocurre no solamente en el primer triángulo

También en la tabla de los números impares podemos identificar las columnas que tienen los números impares de las secuencias que compartirán la misma ruta hasta el 1 y podemos formar el triángulo, o parte de él, escogiendo una columna $k(n)$ y continuar con $k(n)*2^n$ y cada columna será una fila del triángulo.

Un ejemplo:	Comenzamos por la columna	$k(10)$	19, 29, 44
		$k(20)$	39, 59, 89, 134
		$k(40)$	79, 119, 179, 269, 404
		$k(80)$	159, 239, 359, 539, 809
		$\vdots$	$\vdots$

Tres ejemplos de tablas desarrolladas en los triángulos $T(4)$, $T(6)$ y $T(10)$:



En las tres tablas anteriores, formadas a partir de los triángulos $T(4)$, $T(6)$ y $T(10)$, vemos el comienzo de algunas secuencias y como se unen a la salida del triángulo. Cuando digo “se unen” quiero decir que a partir de ese punto, las secuencias tendrán los mismos números hasta llegar al 1.

Otras fórmulas en el algoritmo distintas de $(3n+1)/2$ y las secuencias no cumplirán la conjetura.

A continuación tres ejemplos de tablas formadas aplicando a los impares $(5n+1)/2$, $(7n+1)/2$ y $(9n+1)/2$ respectivamente, en vez de $(3n+1)/2$.

Las columnas $k(22)$ hasta $k(51)$ son los números que resultan de aplicar $(5n+1)/2$ a los impares y el lugar que ocuparían en la tabla por cantidad de números en cada columna.

[illegible]

	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	6	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	...

Las columnas $k(28)$ hasta $k(57)$ son los números que resultan de aplicar $(9n+1)/2$ a los impares y el lugar que ocuparían en la tabla por cantidad de números en cada columna.

[illegible]

	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	6	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	3	1	...

Las columnas $k(103)$ hasta $k(132)$ son los números que resultan de aplicar $(7n+1)/2$ a los impares y el lugar que ocuparían en la tabla por cantidad de números en cada columna.

...	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	...																																																																																															
...	159	161	163	165	167	169	171	173	175	177	179	181	183	185	187	189	191	193	195	197	199	201	203	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	265	267	269	271	273	275	277	279	281	...																																																																																															
...	239	242	245	248	251	254	257	260	263	266	269	272	275	278	281	284	287	290	293	296	299	302	305	4	11	18	25	32	39	46	53	60	67	74	81	88	95	102	109	116	123	130	137	144	151	158	165	172	179	186	193	200	207	398	401	404	407	410	413	416	419	422	...																																																																																															
...	359	368	377	386	395	404	413	422	431	440	449	458	39	88	138	186	235	284	333	382	431	480	529	578	627	676	725	602	611	620	629	638	647	656	665	674	683	692	701	710	719	728	737	746	755	764	773	782	791	800	809	818	827	836	845	854	863	872	881	890	899	908	917	926	935	944	953	962	971	980	989	998	...																																																																																					
...	539	548	557	566	575	584	593	602	611	620	629	638	647	656	665	674	683	692	701	710	719	728	737	746	755	764	773	782	791	800	809	818	827	836	845	854	863	872	881	890	899	908	917	926	935	944	953	962	971	980	989	998	...																																																																																																									
...	809	818	827	836	845	854	863	872	881	890	899	908	917	926	935	944	953	962	971	980	989	998	...																																																																																																																																							
...	1214	1215	1216	1217	1218	1219	1220	1221	1222	1223	1224	1225	1226	1227	1228	1229	1230	1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1240	1241	1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249	1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259	1260	1261	1262	1263	1264	1265	1266	1267	1268	1269	1270	1271	1272	1273	1274	1275	1276	1277	1278	1279	1280	1281	1282	1283	1284	1285	1286	1287	1288	1289	1290	1291	1292	1293	1294	1295	1296	1297	1298	1299	1300	1301	1302	1303	1304	1305	1306	1307	1308	1309	1310	1311	1312	1313	1314	1315	1316	1317	1318	1319	1320	1321	1322	1323	1324	1325	1326	1327	1328	1329	1330	1331	1332	1333	1334	1335	1336	1337	1338	1339	1340	1341	1342	1343	1344	1345	1346	1347	1348	1349	1350	1351	1352	1353	1354	1355	1356	1357	1358	1359	1360	1361	1362	1363	1364	1365	1366	1367	1368	1369	1370	1371

...	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	8	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	...

Las cantidades de divisores de cada columna coinciden con las cantidades que hay en la tabla de los números pares, pero no a partir de $k(1)$, ya que en la primera tabla $(5n+1)/2$, su primer impar, el número 1, está en $k(22)$. En la segunda tabla $(7n+1)/2$, el número 1 está en $k(103)$ y en la tercera tabla $(9n+1)/2$, el número 1 está en $k(28)$.

IX. LA CONJETURA DE COLLATZ
Orden y armonía en los números de las secuencias

Miguel Cerdá Bennassar – Enero 2021

Las mitades de los números naturales:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
n/2	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	...

Las mitades de los números naturales organizadas en tres grupos A, B, C:

	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
A	2n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	...
B	2n-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	...
C	n-1/2	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5	...

ALGORITMO DOSENA 1:

Elegir un elemento de cualquier grupo y aplicarle una de estas operaciones:

Números del grupo A, multiplicar por 3 y sumar 1 al resultado. $3a+1$
 Números del grupo B, restar 1 y dividir entre 4 el resultado. $(b-1)/4$
 Números del grupo C, multiplicar por 6 y sumar 2 al resultado. $6c+2$

Seguir aplicando la operación correspondiente a cada resultado obtenido hasta llegar al número 0.

Ejemplo de una secuencia empezada con el número 81:

CALCULOS:

$(81 - 1) / 4 = 20$
 $(20 \times 3) + 1 = 61$
 $(61 - 1) / 4 = 15$
 $(15 - 1) / 4 = 3.5$
 $(3.5 \times 6) + 2 = 23$
 $(23 - 1) / 4 = 5.5$
 $(5.5 \times 6) + 2 = 35$
 $(35 - 1) / 4 = 8.5$
 $(8.5 \times 6) + 2 = 53$
 $(53 - 1) / 4 = 13$
 $(13 - 1) / 4 = 3$
 $(3 - 1) / 4 = 0.5$
 $(0.5 \times 6) + 2 = 5$
 $(5 - 1) / 4 = 1$
 $(1 - 1) / 4 = 0$

La secuencia formada: 81, 20, 61, 15, 3.5, 23, 5.5, 35, 8.5, 53, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0.

ALGORITMO DOSENA 2:

Elegir un elemento de cualquier grupo y aplicarle una de estas operaciones:

Números del grupo A, multiplicar por 3 y dividir entre 4 el resultado. $3a/4$

Números del grupo B, restar 1 y dividir entre 4 el resultado. $(b-1)/4$

Números del grupo C, multiplicar por 6, sumar 1 y dividir entre 4. $(6c+1)/4$

Seguir aplicando la operación correspondiente a cada resultado obtenido hasta llegar al número 0.

Ejemplo de una secuencia empezada con el número 81:

CALCULOS:

$$(81-1)/4=20$$

$$(3 \times 20)/4=15$$

$$(15-1)/4=3,5$$

$$(6 \times 3,5+1)/4=5,5$$

$$(6 \times 5,5+1)/4=8,5$$

$$(6 \times 8,5+1)/4=13$$

$$(13-1)/4=3$$

$$(3-1)/4=0,5$$

$$(6 \times 0,5+1)/4=1$$

$$(1-1)/4=0$$

La secuencia formada: 81, 20, 15, 3.5, 5.5, 8.5, 13, 3, 0.5, 1, 0.

ALGORITMO DOSENA 3:

Números del grupo A, multiplicar por 3 y dividir entre 4 el resultado. $3a/4$

Números del grupo B, restar 1 y dividir entre 4 el resultado. $(b-1)/4$

Números del grupo C, multiplicar por 2, restar 1 y dividir entre 4. $(2c-1)/4$

Seguir aplicando la operación correspondiente a cada resultado obtenido hasta llegar al número 0.

Ejemplo de una secuencia empezada con el número 81:

CALCULOS:

$$(81 - 1) / 4 = 20$$

$$(20 \times 3) / 4 = 15$$

$$(15 - 1) / 4 = 3.5$$

$$((3.5 \times 2) - 1) / 4 = 1.5$$

$$((1.5 \times 2) - 1) / 4 = 0.5$$

$$((0.5 \times 2) - 1) / 4 = 0$$

La secuencia formada: 81, 20, 15, 3.5, 1.5, 0.5, 0.

Sea cual sea el primer número elegido, todas las secuencias obtenidas con cada uno de estos tres algoritmos, terminarán en el número 0.

Relación de las tres secuencias del ejemplo, empezadas con el número 81 y formadas con los tres algoritmos Dosena y la secuencia formada con el algoritmo de Collatz:

Collatz		81	244	122	61	184	92	46	23	70	35	160	80	40	20	10	5	16	8	4	2	1	
Dosena 1		81	20	61	15	3.5	23	5.5	35	8.5	53	13	3	0.5	5							1	0
Dosena 2		81	20		15	3.5		5.5		8.5		13	3	0.5								1	0
Dosena 3		81	20		15	3.5		1.5						0.5									0

Coincidencia de los elementos de las secuencias empezadas con el número 273:

Collatz) 273 || 820 || 410 || 205 || 616 || 308 || 154 || 77 || 232 || 116 || 58 || 29 || 88 || 44 || 22 || 11 || 34 || 17 || 52 || 26 || 13 || 40 || 20 || 10 || 5 || 16 || 8 || 4 || 2 || 1 ||

Dosena 1 273 || 68 || 205 || 51 || 12.5 || 77 || 19 || 4.5 || 29 || 7 || 1.5 || 11 || 2.5 || 17 || 4 || 13 || 3 || 0.5 || 5 || 1 || 0 ||

Dosena 2 273 || 68 || 51 || 12.5 || 19 || 4.5 || 7 || 1.5 || 2.5 || 4 || 3 || 0.5 || 1 || 0 ||

Dosena 3 273 || 68 || 51 || 12.5 || 6 || 4.5 || 2 || 1.5 || 0.5 || 0 ||

La secuencia formada con el algoritmo Dosena 1 tiene todos los números impares de la secuencia formada con el algoritmo de Collatz.

La secuencia formada con el algoritmo Dosena 2 tiene los mismos elementos de la secuencia Dosena 1, pero ya no están los números impares de la secuencia de Collatz, a excepción del número 1.

La secuencia Dosena 3 tiene los mismos elementos de la secuencia Dosena 2, pero ya no están los números que alterarían su orden descendente.

Este orden y coincidencia de elementos, se cumple en todas las secuencias formadas con los cuatro algoritmos, empezadas con cualquier número natural.

Los tres algoritmos Dosena, provocan una criba de los elementos de cualquier secuencia de Collatz, descartando aquellos que perturban el orden descendente de la secuencia, hasta llegar a la perfección con el algoritmo Dosena 3, logrando poner orden y armonía en los números de las secuencias de Collatz.

Enlaces para el cálculo de las secuencias con los cuatro algoritmos:

Collatz <http://www.riodena.es/Collatz.html>

Dosena 1 http://www.riodena.es/index_1.html

Dosena 2 http://www.riodena.es/index_2.html

Dosena 3 http://www.riodena.es/index_3.html

Para realizar una comprobación con una secuencia de Collatz, ésta debe comenzar con el primer número impar de la secuencia Dosena 1 y el primer número impar de una secuencia de Collatz será el primer número de una secuencia Dosena 1.

ALGORITMO ALTERNATIVO DE LA CONJETURA DE COLLATZ

Se trata de un algoritmo que aplicado a la mitad de cualquier número natural ($n/2$) se forma una secuencia que acaba siempre en el cero, y si se sigue aplicando, la secuencia entra en un ciclo infinito con el cero y el uno.

Se aplica a la mitad de cualquier número natural ($n/2$), la operación correspondiente según estas tres reglas:

Si el número es par se multiplica por 3 y se suma 1 al resultado.

Si el número es impar se le resta 1 y el resultado se divide entre 4.

Si el número es $1/2$ de un impar se multiplica por 6 y se suma 2 al resultado.

Se repiten estas operaciones de forma iterada a cada resultado obtenido hasta llegar al cero.

A continuación un ejemplo empezando con el número 2647:

La secuencia obtenida:

2647 | 661.5 | 3971 | 992.5 | 5957 | 1489 | 372 | 1117 | 279 | 69.5 | 419 | 104.5 | 629 | 157 | 39 | 9.5 | 59 | 14.5 | 89 | 22 | 67 | 16.5 | 101 | 25 | 6 | 19 | 4.5 | 29 | 7 | 1.5 | 11 | 2.5 | 17 | 4 | 13 | 3 | 0.5 | 5 | 1 | 0 |

Los cálculos aplicados:

$(2647 - 1) / 4 = 661.5$
 $(661.5 \times 6) + 2 = 3971$
 $(3971 - 1) / 4 = 992.5$
 $(992.5 \times 6) + 2 = 5957$
 $(5957 - 1) / 4 = 1489$
 $(1489 - 1) / 4 = 372$
 $(372 \times 3) + 1 = 1117$
 $(1117 - 1) / 4 = 279$
 $(279 - 1) / 4 = 69.5$
 $(69.5 \times 6) + 2 = 419$
 $(419 - 1) / 4 = 104.5$
 $(104.5 \times 6) + 2 = 629$
 $(629 - 1) / 4 = 157$
 $(157 - 1) / 4 = 39$
 $(39 - 1) / 4 = 9.5$
 $(9.5 \times 6) + 2 = 59$
 $(59 - 1) / 4 = 14.5$
 $(14.5 \times 6) + 2 = 89$
 $(89 - 1) / 4 = 22$
 $(22 \times 3) + 1 = 67$
 $(67 - 1) / 4 = 16.5$
 $(16.5 \times 6) + 2 = 101$
 $(101 - 1) / 4 = 25$
 $(25 - 1) / 4 = 6$
 $(6 \times 3) + 1 = 19$
 $(19 - 1) / 4 = 4.5$
 $(4.5 \times 6) + 2 = 29$
 $(29 - 1) / 4 = 7$
 $(7 - 1) / 4 = 1.5$
 $(1.5 \times 6) + 2 = 11$
 $(11 - 1) / 4 = 2.5$
 $(2.5 \times 6) + 2 = 17$

$$\begin{aligned}
 (17 - 1) / 4 &= 4 \\
 (4 \times 3) + 1 &= 13 \\
 (13 - 1) / 4 &= 3 \\
 (3 - 1) / 4 &= 0.5 \\
 (0.5 \times 6) + 2 &= 5 \\
 (5 - 1) / 4 &= 1 \\
 (1 - 1) / 4 &= 0
 \end{aligned}$$

Podemos visualizar el recorrido del número inicial hasta alcanzar el cero en un diagrama.

Para realizarlo, en primer lugar debemos desarrollar las progresiones geométricas implicadas, partiendo de los resultados del algoritmo que son números pares o 1/2 de un impar como primer elemento cota inferior y con razón o factor $4n+1$, o sea $a(n) = 4 \cdot a(n-1) + 1$. Estas progresiones no tienen límite cota superior, pero bastará calcular los términos necesarios para ver todos los enlaces.

En este ejemplo vemos que en los cálculos aplicados hay tres iteraciones seguidas cuyo resultado son números impares, esto significa que el enlace en esta progresión se realiza en su tercer término, por lo que será suficiente calcular cuatro términos de cada progresión.

Progresiones implicadas en la ruta al cero del número 2647 del ejemplo:

661.5	2647	10589	42357	
992.5	3971	15885	63541	
372	1489	5957	23829	
69.5	279	1117	4469	
104.5	419	1677	6709	
9.5	39	157	629	
14.5	59	237	949	
22	89	357	1429	
16.5	67	269	1077	
6	25	101	405	
4.5	19	77	309	
1.5	7	29	117	
2.5	11	45	181	
4	17	69	277	
0.5	3	13	53	
0	1	5	21	

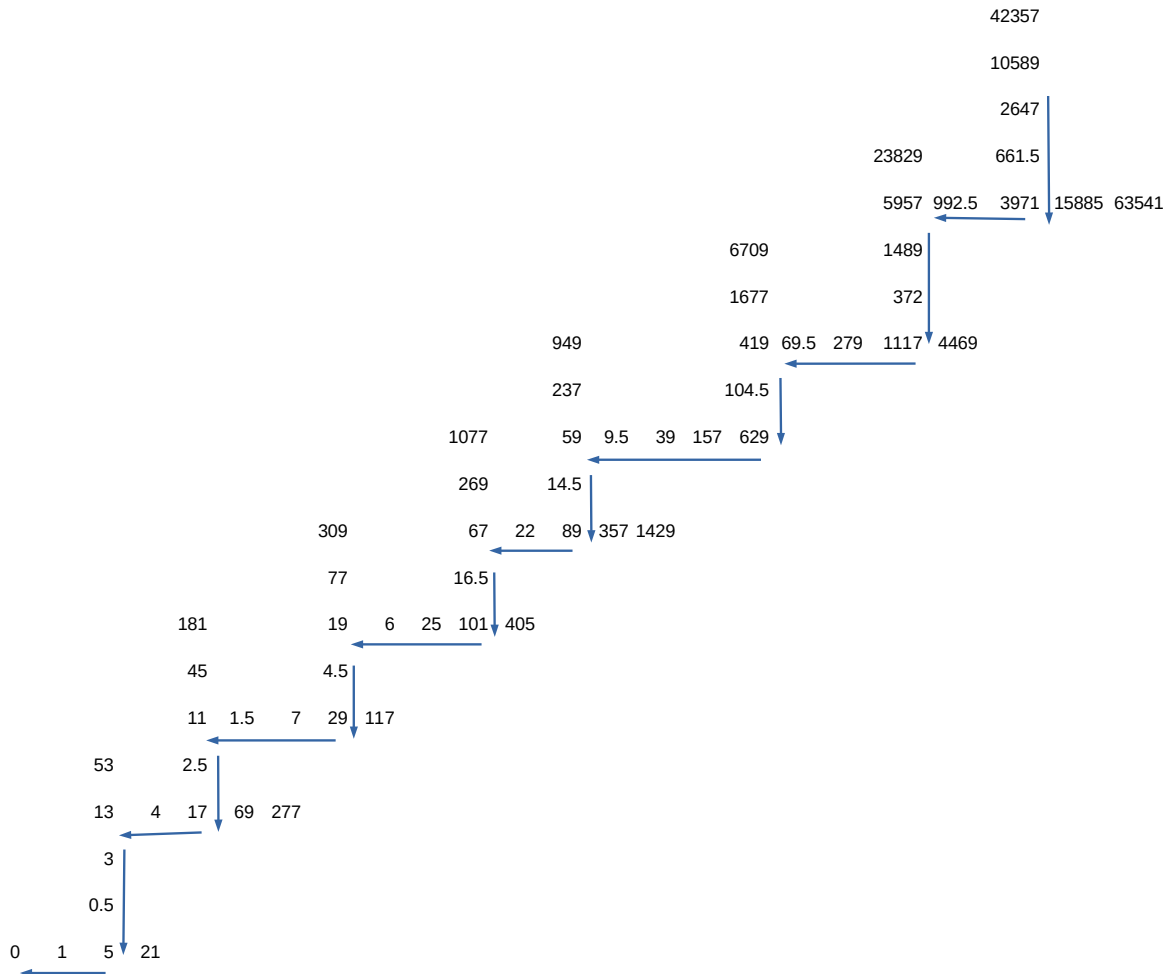
Para formar el diagrama se procede de la siguiente manera:

Se empieza escribiendo la primera progresión en la parte superior derecha, siguiendo estas pautas:

Si la cantidad de progresiones implicadas es un número par, la primera progresión se pone en sentido vertical y decreciente.

Si la cantidad de progresiones implicadas es un número impar, la primera progresión se pone en sentido horizontal y decreciente hacia la izquierda.

Las progresiones se unen mediante la cota inferior de la primera con el término número impar de la siguiente, siguiendo el mismo orden que los resultados obtenidos del cálculo con el algoritmo.



Este diagrama es una parte infinitamente pequeña de un inmenso fractal formado por un número infinito de progresiones infinitas unidas unas con otras, cuyo origen es la progresión primigenia que tiene cota inferior cero.

Cada una de las progresiones que forman el fractal está formada por infinitos términos que son números impares y un término cota inferior que es un número par o la mitad de un número impar.

En este fantástico fractal, que difícilmente logramos imaginar, están las mitades de todos los números naturales ($n/2$), o sea, los números pares, los números impares y los $1/2$ de los impares, porque son el resultado de aplicar la operación del algoritmo a los números impares:

$$1/4 ((2n+1)-1) = n/2.$$

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	...
0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	...

OTRAS CONSIDERACIONES:

Los primeros términos cota inferior de las progresiones son los números pares y los números que son $1/2$ de los números impares.

Los siguientes términos son impares de la forma $6n-1$, que la suma de sus dígitos es 2, 5, 8 y a ellos enlazan las progresiones cuya cota inferior es $1/2$ de un número impar. Otros elementos son impares de la forma $6n-5$, que sus dígitos suman 1, 4, 7 y a ellos enlazan las progresiones cuya cota inferior es un número par. Y los elementos que son impares de la forma $6n-3$, cuyos dígitos suman 3, 6, 9 que no tienen enlace con ninguna progresión.

Otras fórmulas para calcular los términos de las progresiones:

Sea (t) el término de la progresión (a) al que se une la cota inferior (c) de la progresión (b), entonces la fórmula de los términos de la progresión (b) es:

Si la cota inferior es un número par $\{(t \cdot 4^n) - 1\} / 3$.

Si la cota inferior es la mitad de un número impar $\{(t \cdot 4^n) - 2\} / 6$.

Si colocamos el diagrama de las progresiones en un conjunto de coordenadas cartesianas nos indicará los niveles en altitud y latitud de los términos.

Para la Conjetura de Collatz la explicación es la misma, porque también están todos los números naturales en las progresiones que forman el fractal.

Empezando con el número 643 se forma la sucesión: 643, 1930, 965, 2896, 1448, 724, 362, 181, 544, 272, 136, 68, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Y las secuencias implicadas:

... 1286, 643

... 1930, 965

... 2896, 1448, 724, 362, 181

... 544, 272, 136, 68, 34, 17

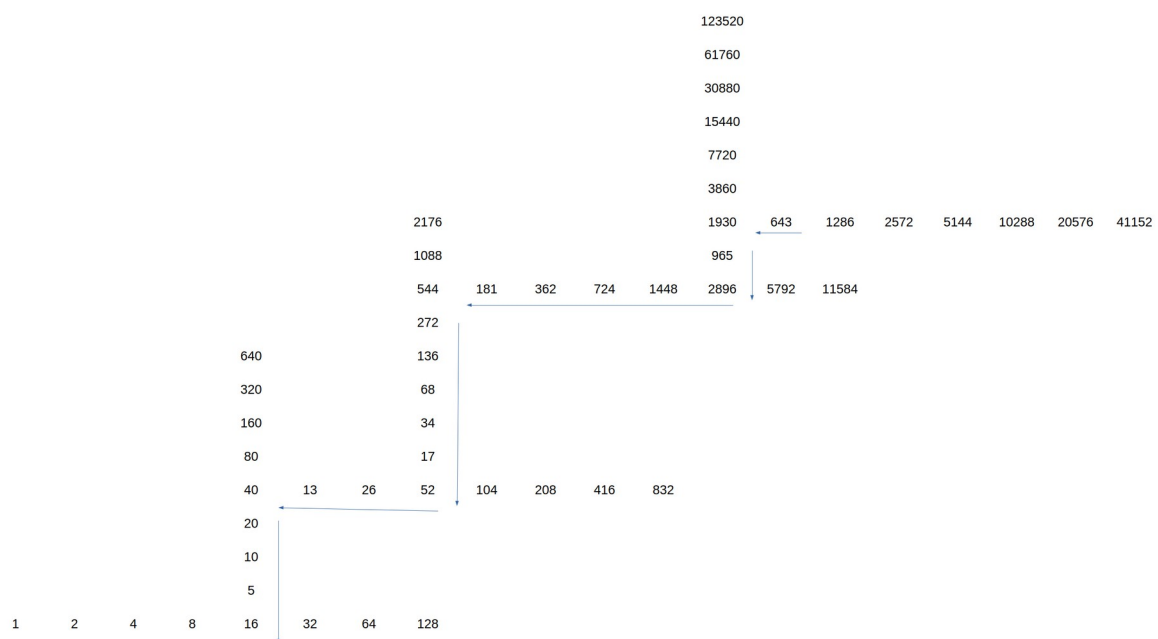
... 52, 26, 13

... 40, 20, 10,

... 16, 8, 4, 2, 1

En la sucesión de Collatz, la "unión" de las secuencias son los números impares, que también son la cota inferior de la secuencia.

El diagrama formado:



[illegible]

En las columnas de este triángulo están las columnas de los números pares de la tabla y en las filas de este triángulo, si le restamos 1 a sus números, están las columnas de los números impares de la tabla.

[illegible]

Sean A los números de las columnas k(impar) y B los números de las columnas k(par), entonces:

$$B \cdot 3^{n-1} = A \quad (A+1)/B = 3^n$$

$$B \cdot 3^{n-1} = A$$

$$(A+1)/B=3^n$$

Ejemplos:

En $k(3)-k(4)$	$(3+1)/1=4.$	$(5+1)/3=2.$	$(8+1)/9=1.$
En $k(11)-k(12)$	$(11+1)/1=12.$	$(17+1)/3=6.$	$(26+1)/9=3.$

$4/2 = (5+1)/3$	$12/2 = (17+1)/3$	$16/2 = (23+1)/3$	$24/2 = (35+1)/3$	...
$3*4 = 2*(5+1)$	$3*12 = 2*(17+1)$	$3*16 = 2*(23+1)$	$3*24 = 2*(35+1)$	...
$4 = 2/3*(5+1)$	$12 = 2/3*(17+1)$	$16 = 2/3*(23+1)$	$24 = 2/3*(35+1)$	...
$4/2 = 6/3$	$12/2 = 18/3$	$16/2 = 24/3$	$24/2 = 36/3$	...

$((72*3)/2)-1 = 107$	$((24*9)/2)-1 = 107$	$((8*27)/2)-1 = 107$

$(2*107+2)/3 = 72$	$(2*107+2)/9 = 24$	$(2*107+2)/27 = 8$

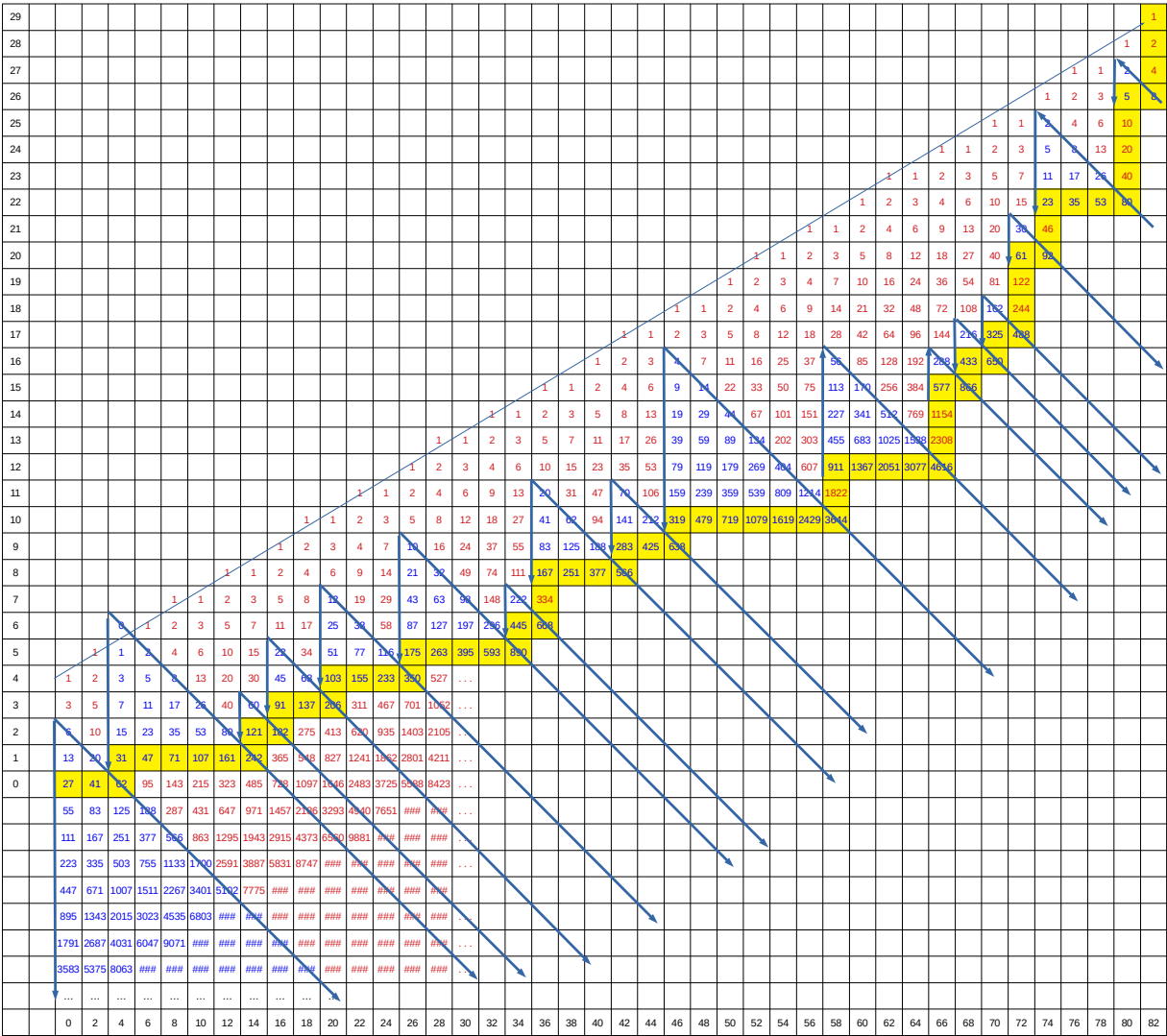
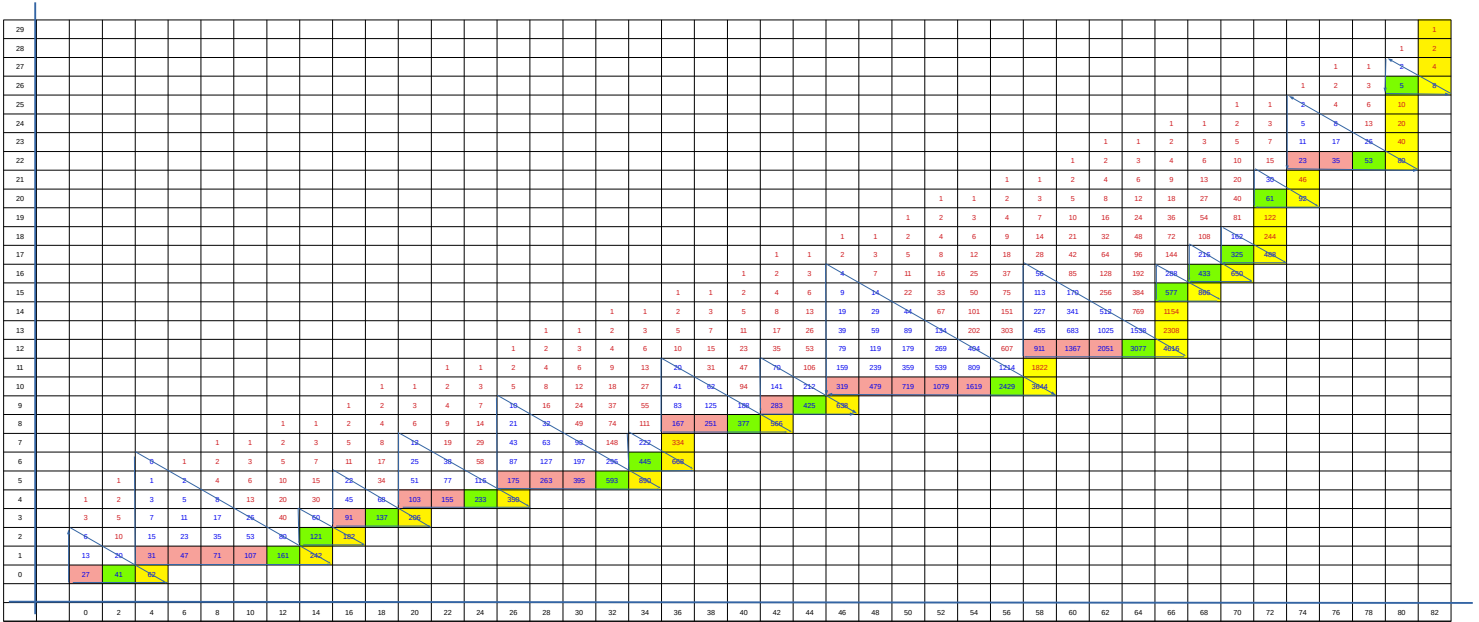
El 72 llega al 9	El 24 llega al 3	El 8 llega al 1

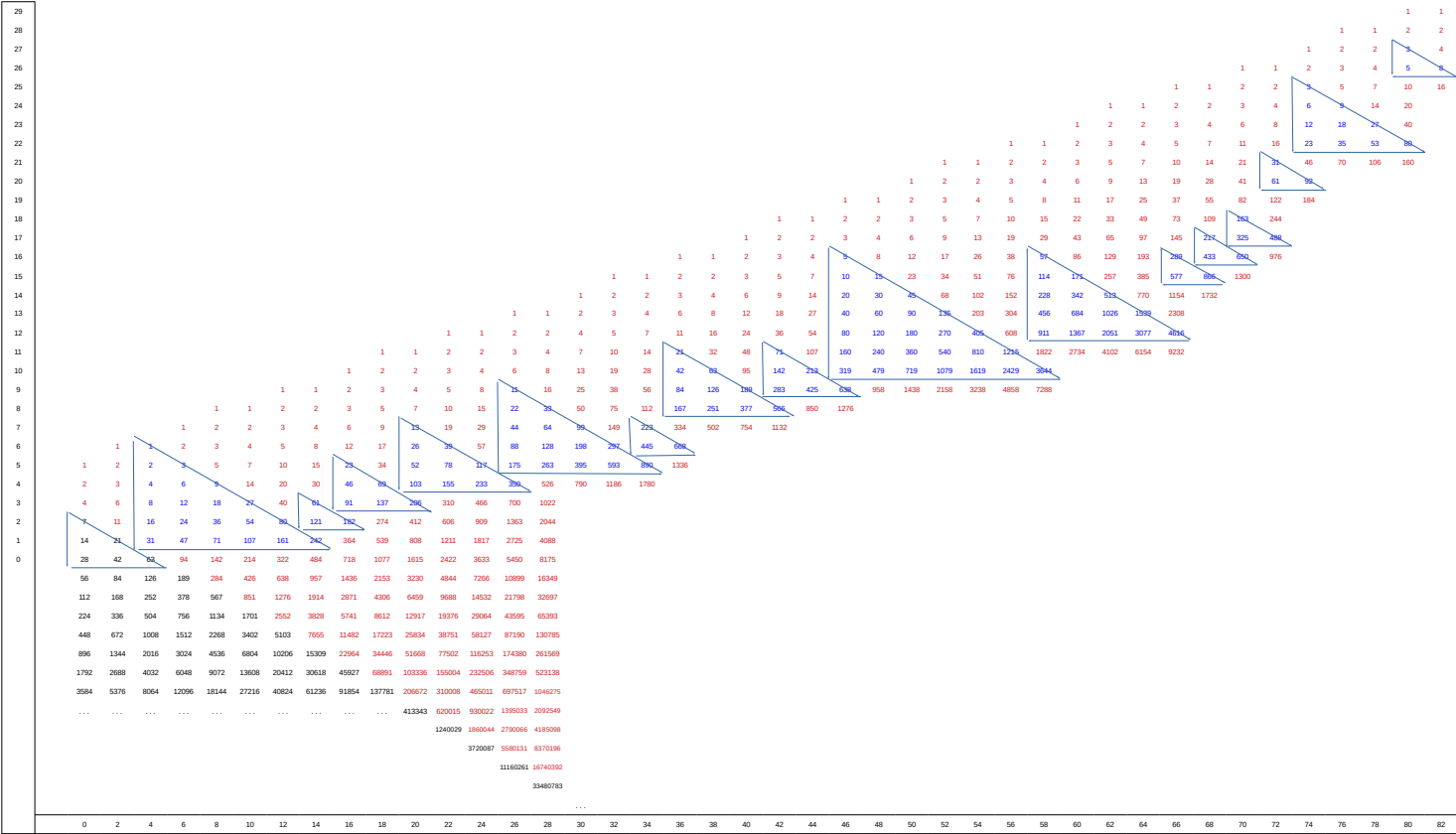
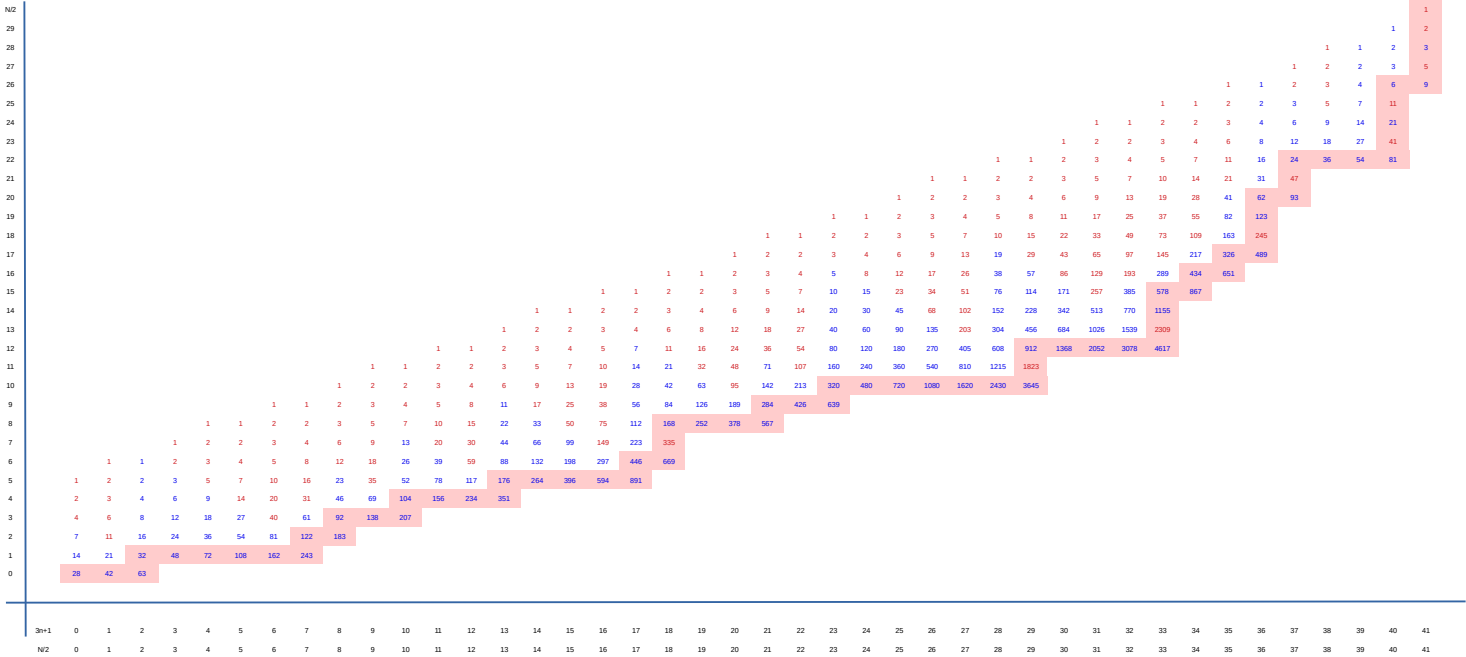
$$(3*71+1)/2 = ((72*3)/2)-1 = ((24*9)/2)-1 = ((8*27)/2)-1$$

n												
0		5										
1		10	15									
2		20	30	45								
3		40	60	90	135							
4		80	120	180	270	405						
5		160	240	360	540	810	1215					
6		320	480	720	1080	1620	2430	3645				
7		640	960	1440	2160	3240	4860	7290	10935			
8		1280	1920	2880	4320	6480	9720	14580	21870	32805		
9		2560	3840	5760	8640	12960	19440	29160	43740	65610	98415	
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

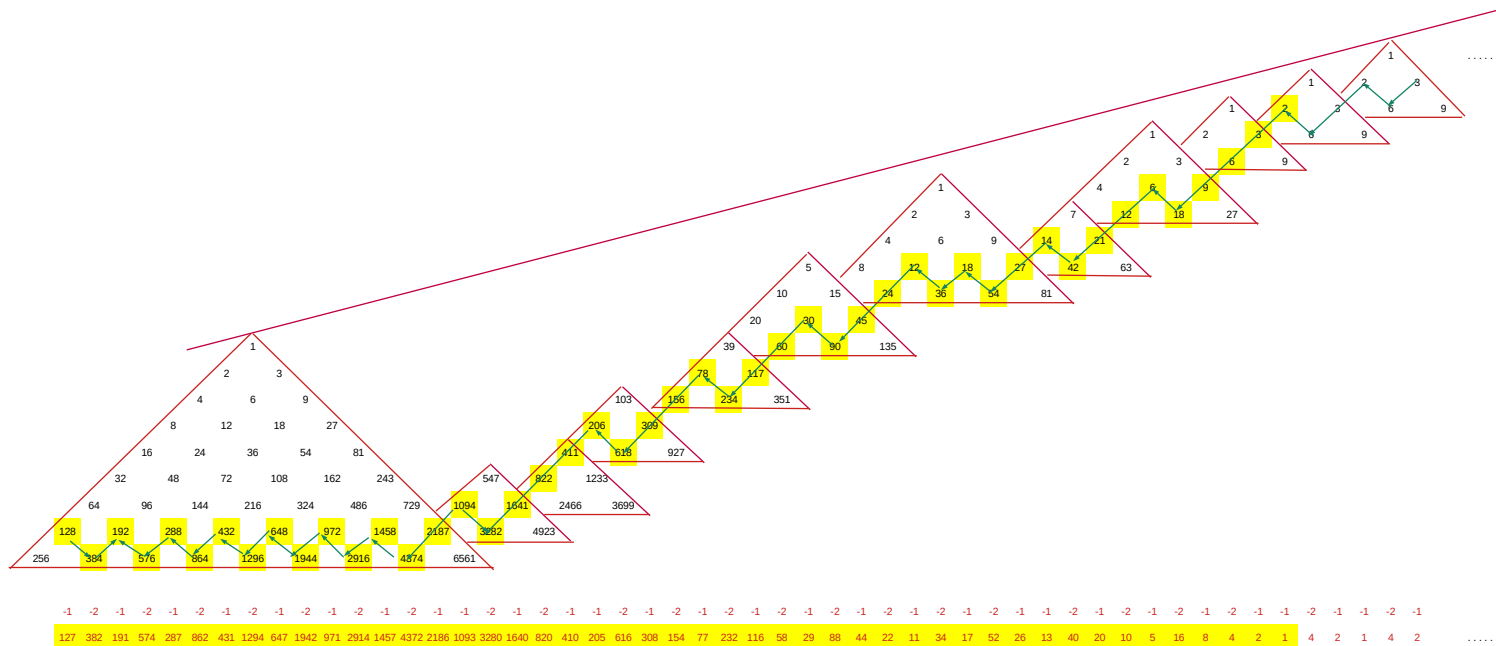
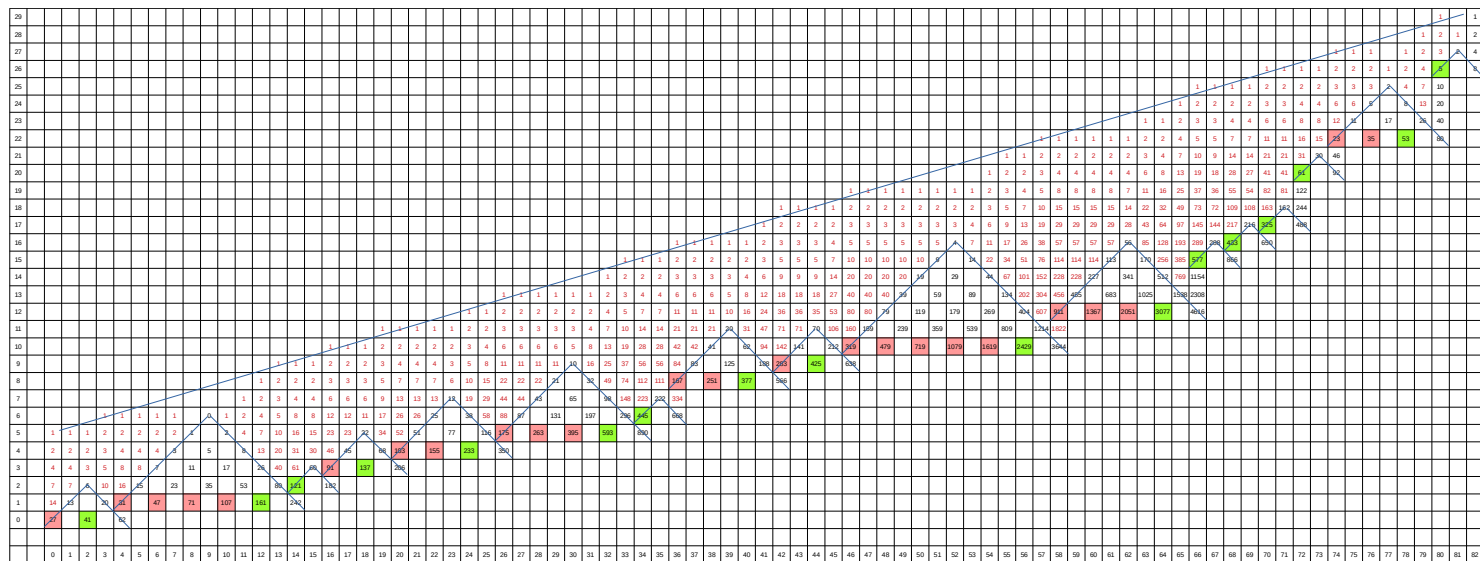
En la tabla siguiente comprobamos que en todos los ciclos de la secuencia los números impares de la forma $4n-1$ (color rojo) acaban en un último impar de la forma $4n-3$ (color verde), que al aplicarle la operación del algoritmo $3n+1$ produce un número par (color amarillo) que admite como mínimo dos divisiones entre 2, provocando que la secuencia sea descendente.

Esta tabla representa la secuencia iniciada con el número 27, que desde ese número sigue por las últimas filas de los triángulos o ciclos, hasta llegar al 1. Ha necesitado 82 pasos horizontales y 29 pasos verticales.





Si ponemos los triángulos equiláteros:



La secuencia que empieza con el número 127 representada en los triángulos o ciclos que la forman

Las secuencias de Collatz se pueden formar de otra manera, que explico a continuación.

Dividir entre 2 y multiplicar por 3. Este es el argumento de los ciclos que forman una secuencia formada con el algoritmo de L  thar Collatz de su conjetura.

PRIMER CICLO: Si el número que empieza la secuencia es un número par m , el primer número del ciclo A es $m-1$ y si es un número impar, A es ese número.

El segundo número es $A+1$. Los demás números del ciclo se obtienen de la siguiente forma: $A+1$ se divide entre 2 las veces que se pueda y después se multiplica por 3 las mismas veces.

$(A+1)/2^n * 3^n$. El último número del ciclo $B = (A+1)/2^n * 3^n - 1$.

SIGUIENTES CICLOS: El primer número es $B/2^n$. Los demás números se obtienen de la misma forma que los del primer ciclo.

Los ciclos se sucederán hasta que el último número de un ciclo sea $B = 2^n$. El ciclo más corto consta de 5 números: A , $A+1$, $(A+1)/2$, $(A+1)*3/2$ y $(A+1)*3/2-1$.

La longitud de los ciclos depende de 2^n que divide $A+1$, siendo el más corto cuando $n=1$.   Cual sería el más largo?   Puede existir 2^∞ ? No, no existe, porque siempre llegan a un número impar.

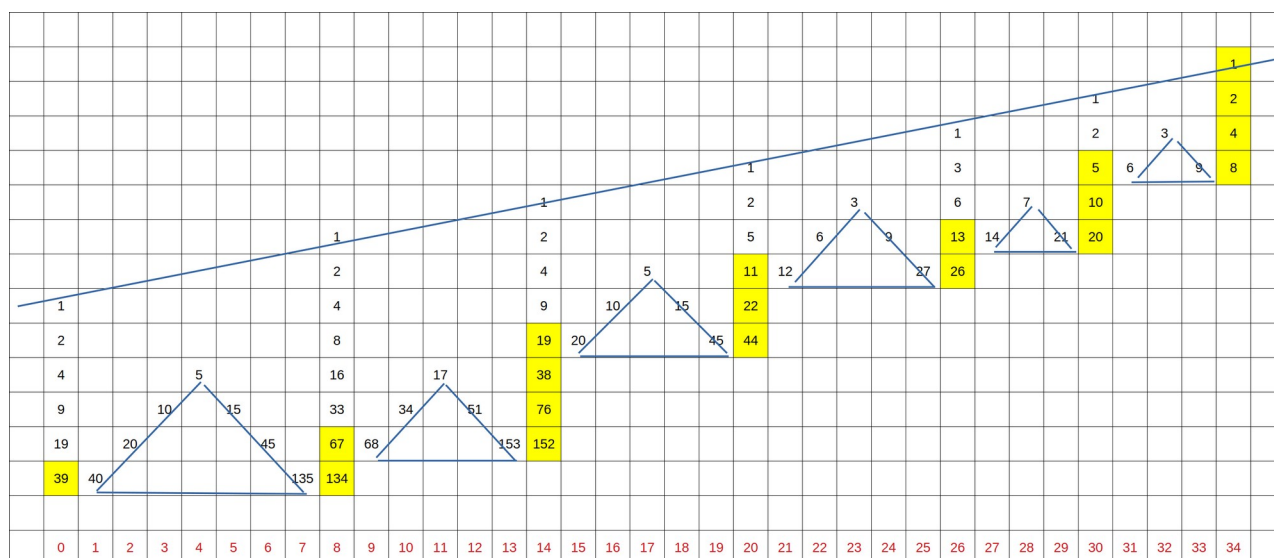


Tabla con la secuencia empezada con el número 39 y los 6 triángulos o ciclos que la componen. En cada ciclo, el primer impar es x y el último impar es y , entonces $(x+1)*(3/2)^n=y$.

Los números en amarillo son los números de la secuencia, que se lee empezando por las columnas de la izquierda y de abajo a arriba: 39, 134, 67, 152, 76, 38, 19, 44, 22, 11, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

El valor de n es el que le corresponde al número del vértice superior de cada triángulo o ciclo, que es el número de la fila que ocupa en el triángulo, empezando con la base que es la fila 0.

Ejemplos:

$(39+1)*(3/2)^3=135$	$(67+1)*(3/2)^2=153$	$(19+1)*(3/2)^2=45$
$(11+1)*(3/2)^2=27$	$(13+1)*(3/2)=21$	$(5+1)*(3/2)=9$

Los números 1 y 8	se convierten en el número	4 y éste en el 1.
Los números 3 y 20	"	" 10 y éste en el 5.
Los números 5 y 32	"	" 16 y éste en el 1.
Los números 7 y 44	"	" 22 y éste en el 11.
Los números 9 y 56	"	" 28 y éste en el 7.
Los números 11 y 68	"	" 34 y éste en el 17.
Los números 13 y 80	"	" 40 y éste en el 5.
Los números 15 y 92	"	" 46 y éste en el 23.
Los números 17 y 104	"	" 52 y éste en el 13.
Los números 19 y 116	"	" 58 y éste en el 29.
Los números 21 y 128	"	" 64 y éste en el 1.
Los números 23 y 140	"	" 70 y éste en el 35.
Los números 25 y 152	"	" 76 y éste en el 19.
Los números 27 y 164	"	" 82 y éste en el 41.
Los números 29 y 176	"	" 88 y éste en el 11.
Los números 31 y 188	"	" 94 y éste en el 47.

• • • • •

Los números $12n+10$ dan : 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, ... $(6n+5)$. Una sola división entre 2.

Los números $12n+4$ dan : 1, 1, 7, 5, 13, 1, 19, 11, ... después de n divisiones entre 2^n . (La parte impar de $3n+1$).

• • • • •

Diferències entre els impars i els pars : 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, ... $10n-3$

El 21 es $2n-1$, $n=11$. $10n-3=107$ $21+107=128$

A la conjetura de Collatz els números 21 i 128 iteran ambdós al número 64

El 29 es $2n-1$, $n=15$. $10n-3=147$ $29+147=176$

A la conjetura de Collatz els números 29 i 176 iteran ambdós al número 88

Es lo mateix que $(3 \cdot (2n-1) + 1) \cdot 2 \rightarrow 4(3n-1)$

$$(2n-1)+(10n-3)=12n-4$$

Exemple: L'impar 29 i el par 176 iteran al 88 i

Els números impars $2n-1$ son iguals als números pars $12n-4$

ciclos	1	2	3	4	5	6
A						
B						
B1						
B2						
B3						
B4						
B5						
A1						
A2						
A3						
A4						
A5						
A6						

Primer ciclo:	$(A+1)(3/2)^n-1=B$	$\rightarrow$	$(39+1)(3/2)^3-1=134$	$\rightarrow$	39 a 134
Segundo ciclo:	$(B/2^m+1)(3/2)^n-1=B1$	$\rightarrow$	$(67+1)(3/2)^2-1=152$	$\rightarrow$	67 a 152
Tercer ciclo:	$(B1/2^m+1)(3/2)^n-1=B2$	$\rightarrow$	$(19+1)(3/2)^2-1=44$	$\rightarrow$	19 a 44
Cuarto ciclo:	$(B2/2^m+1)(3/2)^n-1=B3$	$\rightarrow$	$(11+1)(3/2)^2-1=26$	$\rightarrow$	11 a 26
Quinto ciclo:	$(B3/2^m+1)(3/2)^n-1=B4$	$\rightarrow$	$(13+1)(3/2)-1=20$	$\rightarrow$	13 a 20
Sexto ciclo:	$(B4/2^m+1)(3/2)^n-1=B5$	$\rightarrow$	$(5+1)(3/2)-1=8$	$\rightarrow$	5 a 8

$$\frac{(A+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$$

Los ciclos se sucederán hasta que $(An+1)(3/2)^{n-1}=2^m$.

$$C1 = (A+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 = 134$$

$$C2 = \frac{(A+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 = 152$$

$$C3 = \frac{\frac{(A+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 = 44$$

$$C4 = \frac{\frac{\frac{(A+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 = 26$$

$$C5 = \frac{\frac{\frac{\frac{(A+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 = 20$$

$$C6 = \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{(X+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{2^m} \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 = 1$$

$$((39+1)(3/2)^{n-1})/2$$

n	1	2	3	4	5
$\frac{1}{2} (5 \times 2^{3-n} \times 3^n - 1)$	$\frac{59}{2}$	$\frac{89}{2}$	67	$\frac{403}{4}$	$\frac{1211}{8}$
approximation	29.5	44.5	67	100.75	151.375

Con el impar 39 y calculando los valores de n , obtenemos 67 con $n=3$ y el divisor 2.

$$((67+1)(3/2)^{n-1})/2$$

n	1	2	3	4	5
$\frac{1}{2} (17 \times 2^{2-n} \times 3^n - 1)$	$\frac{101}{2}$	76	$\frac{457}{4}$	$\frac{1373}{8}$	$\frac{4123}{16}$
approximation	50.5	76	114.25	171.625	257.688

Con el impar 67 y calculando los valores de n , obtenemos 76 con $n=2$ y el divisor 2.

$$((67+1)(3/2)^{n-1})/8$$

n	1	2	3	4	5
$\frac{1}{8} (17 \times 2^{2-n} \times 3^n - 1)$	$\frac{101}{8}$	19	$\frac{457}{16}$	$\frac{1373}{32}$	$\frac{4123}{64}$
approximation	12.625	19	28.5625	42.9063	64.4219

Y obtenemos 19 con $n=2$ y el divisor 8.

Un programa informático podría calcular todos los números A_n de una secuencia, obviando los números impares intermedios y todos los números pares, aplicando a los números impares A la operación $((A+1)(3/2)^{n-1})/2^m$. La secuencia empezada con el número 39 sería: 39, 67, 19, 11, 13, 5, 1.

Tabla de una secuencia empezada con el numero 54871 $\rightarrow ((54871+1)(3/2)^3-1)/2^3=23149$; $((23149+1)(3/2)-1)/2^2=8681$; $((8681+1)(3/2)-1)/2=6511$; ...

[illegible]

X. LA CONJETURA DE COLLATZ
Otros algoritmos para las secuencias.

Miguel Cerdá Bennassar – Diciembre 2020

ALGORITMO 1:

Podemos elegir cualquier elemento de a, b, c y aplicarle una de las siguientes operaciones:

Si es un número de a, multiplicar por 3 y sumar 1 al resultado. $3a+1$

Si es un número de b, restar 1 y dividir entre 4 el resultado. $(b-1)/4$

Si es un número de c, multiplicar por 6 y sumar 2 al resultado. $6c+2$

Repitiendo el mismo proceso con cada nuevo resultado, la secuencia acabará siempre en el cero.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
a) $2n$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	...
b) $2n-1$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	...
c) $n-1/2$	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5	12.5	...

Un ejemplo empezando con el número 51:

La secuencia obtenida: 51, 12.5, 77, 19, 4.5, 29, 7, 1.5, 11, 2.5, 17, 4, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0.

Cálculos realizados:

$(51 - 1) / 4 = 12.5$
 $(12.5 \times 6) + 2 = 77$
 $(77 - 1) / 4 = 19$
 $(19 - 1) / 4 = 4.5$
 $(4.5 \times 6) + 2 = 29$
 $(29 - 1) / 4 = 7$
 $(7 - 1) / 4 = 1.5$
 $(1.5 \times 6) + 2 = 11$
 $(11 - 1) / 4 = 2.5$
 $(2.5 \times 6) + 2 = 17$
 $(17 - 1) / 4 = 4$
 $(4 \times 3) + 1 = 13$
 $(13 - 1) / 4 = 3$
 $(3 - 1) / 4 = 0.5$
 $(0.5 \times 6) + 2 = 5$
 $(5 - 1) / 4 = 1$
 $(1 - 1) / 4 = 0$

ALGORITMO 2:

Si es un número de a , multiplicar por 3 y dividir entre 4 el resultado. $3a/4$
Si es un número de b , restar 1 y dividir entre 4 el resultado. $(b-1)/4$
Si es un número de c , multiplicar por 6, sumar 1 y dividir entre 4. $(6c+1)/4$

El anterior ejemplo de la secuencia empezada con el número 51:

La secuencia obtenida: 51, 12.5, 19, 4.5, 7, 1.5, 2.5, 4, 3, 0.5, 1, 0.

Cálculos realizados:

$(51 - 1) / 4 = 12.5$
 $(12.5 \times 6 + 1) / 4 = 19$
 $(19 - 1) / 4 = 4.5$
 $(4.5 \times 6 + 1) / 4 = 7$
 $(7 - 1) / 4 = 1.5$
 $(1.5 \times 6 + 1) / 4 = 2.5$
 $(2.5 \times 6 + 1) / 4 = 4$
 $(4 \times 3) / 4 = 3$
 $(3 - 1) / 4 = 0.5$
 $(0.5 \times 6 + 1) / 4 = 1$
 $(1 - 1) / 4 = 0$

Comparación de las secuencias:

Algoritmo de Collatz: 51, 154, 77, 232, 116, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 (25 elementos).

Primer algoritmo: 51, 12.5, 77, 19, 4.5, 29, 7, 1.5, 11, 2.5, 17, 4, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0.
(18 elementos).

Segundo algoritmo: 51, 12.5, 19, 4.5, 7, 1.5, 2.5, 4, 3, 0.5, 1, 0.
(12 elementos).

Una secuencia formada con el algoritmo de Collatz:

27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. (112 elementos).

Con el primer algoritmo:

27, 6.5, 41, 10, 31, 7.5, 47, 11.5, 71, 17.5, 107, 26.5, 161, 40, 121, 30, 91, 22.5, 137, 34, 103, 25.5, 155, 38.5, 233, 58, 175, 43.5, 263, 65.5, 395, 98.5, 593, 148, 445, 111, 27.5, 167, 41.5, 251, 62.5, 377, 94, 283, 70.5, 425, 106, 319, 79.5, 479, 119.5, 719, 179.5, 1079, 269.5, 1619, 404.5, 2429, 607, 151.5, 911, 227.5, 1367, 341.5, 2051, 512.5, 3077, 769, 192, 577, 144, 433, 108, 325, 81, 20, 61, 15, 3.5, 23, 5.5, 35, 8.5, 53, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0. (90 elementos).

27, 6.5, 10, 7.5, 11.5, 17.5, 26.5, 40, 30, 22.5, 34, 25.5, 38.5, 58, 43.5, 65.5, 98.5, 148, 111, 27.5, 41.5, 62.5, 94, 70.5, 106, 79.5, 119.5, 179.5, 269.5, 404.5, 607, 151.5, 227.5, 341.5, 512.5, 769, 192, 144, 108, 81, 20, 15, 3.5, 5.5, 8.5, 13, 3, 0.5, 1, 0. (50 elementos).

En el segundo algoritmo, las divisiones entre 4 que se aplican a los elementos, provocan reducir $\frac{1}{4}$ a los números que son pares, reducir $\frac{3}{4}$ a los números que son impares y aumentar $\frac{1}{2}$ a los números que son $n - \frac{1}{2}$.

$$(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}).$$

[illegible]

Los números que acaban directamente en el cero son los que $n = (2^{2n+1}+1)/3$ y son los que ocupan las columnas de los números $k(1)$ de la siguiente tabla OEIS [A238475](#) . Los números pares ocupan las columnas de los números $n(1)$

[illegible][illegible]

$$\begin{aligned}
 (77 - 1) / 4 &= 19 \\
 (19 - 1) / 4 &= 4.5 \\
 (4.5 \times 6) + 2 &= 29 \\
 (29 - 1) / 4 &= 7 \\
 (7 - 1) / 4 &= 1.5 \\
 (1.5 \times 6) + 2 &= 11 \\
 (11 - 1) / 4 &= 2.5 \\
 (2.5 \times 6) + 2 &= 17 \\
 (17 - 1) / 4 &= 4 \\
 (4 \times 3) + 1 &= 13 \\
 (13 - 1) / 4 &= 3 \\
 (3 - 1) / 4 &= 0.5 \\
 (0.5 \times 6) + 2 &= 5 \\
 (5 - 1) / 4 &= 1 \\
 (1 - 1) / 4 &= 0
 \end{aligned}$$

La representación de una secuencia formada con el segundo algoritmo:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	...
2n-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101	...
(n-1)/2	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	10.5	11	11.5	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15	15.5	16	16.5	17	17.5	18	18.5	19	19.5	20	20.5	21	21.5	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25	...
(n-3)/8			0			0.5				1				1.5			2				2.5			3			3.5			4			4.5			5			5.5			6	...									
(n-11)/32										0																0.5															1						...					
(n-43)/128																																													0				...			
...																																																	...			

$$\begin{aligned}
 (51 - 1) / 4 &= 12.5 \\
 (12.5 \times 6 + 1) / 4 &= 19 \\
 (19 - 1) / 4 &= 4.5 \\
 (4.5 \times 6 + 1) / 4 &= 7 \\
 (7 - 1) / 4 &= 1.5 \\
 (1.5 \times 6 + 1) / 4 &= 2.5 \\
 (2.5 \times 6 + 1) / 4 &= 4 \\
 (4 \times 3) / 4 &= 3 \\
 (3 - 1) / 4 &= 0.5 \\
 (0.5 \times 6 + 1) / 4 &= 1 \\
 (1 - 1) / 4 &= 0
 \end{aligned}$$

SOBRE LA CONJETURA DE COLLATZ Y UN ALGORITMO ALTERNATIVO.

RESUMEN

Formaremos una sucesión de números racionales que partiendo de un número cualquiera, sea par, impar o 1/2 impar, terminará siempre en 5, 1, 0.

INTRODUCCIÓN

La operación se aplica a ese número inicial según tres reglas:

Si el número es par se multiplica por 3 y se suma 1 al resultado.

Si el número es impar se resta 1 y se divide entre 4 el resultado.

Si el número es 1/2 de un impar se multiplica por 6 y se suma 2 al resultado.

Con los números obtenidos repetimos el proceso sucesivamente y la secuencia siempre acabará en 1, 0, considerando que el cero es un número par, volvemos al 1 y al 0 infinitamente.

CONCLUSIÓN Y DEMOSTRACIÓN

Una vez obtenida la sucesión procedemos a señalar y aislar a las diferentes secuencias implicadas.

Todos los números obtenidos que son números pares y 1/2 números impares son la "unión" de dos secuencias. La primera de estas dos secuencias es la que forman los elementos inmediatamente anteriores a esos números. La segunda secuencia es la formada por el elemento inmediato posterior a esos números y los elementos siguientes hasta llegar a otro número "unión".

Pongamos un ejemplo empezando con el número 643:

CALCULOS:

$$(643 - 1) / 4 = 160.5$$

$$(160.5 \times 6) + 2 = 965$$

$$(965 - 1) / 4 = 241$$

$$(241 - 1) / 4 = 60$$

$$(60 \times 3) + 1 = 181$$

$$(181 - 1) / 4 = 45$$

$$(45 - 1) / 4 = 11$$

$$(11 - 1) / 4 = 2.5$$

$$(2.5 \times 6) + 2 = 17$$

$$(17 - 1) / 4 = 4$$

$$(4 \times 3) + 1 = 13$$

$$(13 - 1) / 4 = 3$$

$$(3 - 1) / 4 = 0.5$$

$$(0.5 \times 6) + 2 = 5$$

$$(5 - 1) / 4 = 1$$

$$(1 - 1) / 4 = 0$$

La sucesión está formada por estos números: 643, 160.5, 965, 241, 60, 181, 45, 11, 2.5, 17, 4, 13, 3, 0.5, 5, 1, 0.

Las secuencias implicadas son:

643, 160.5

965, 241, 60

181, 45, 11, 2.5

17, 4

13, 3, 0.5

5, 1, 0

Por el mismo orden que los números resultantes obtenidos, sabemos el punto exacto donde se unen dos secuencias. El 160.5 se une al 965. El 60 se une al 181. El 2.5 se une al 17. El 4 se une al 13 y el 0.5 se une al 5.

Cada una de estas secuencias tiene cota inferior, su razón es $4m+1$ y no tienen cota superior.

La secuencia más larga obtenida la forman 4 elementos y es la que tiene cota inferior 2.5, pero vamos a desarrollarlas con 6 elementos en cada una:

160.5, 643, 2573, 10293, 41173, 164693, ...

60, 241, 965, 3861, 15445, 61781, ...

2.5, 11, 45, 181, 725, 2901, ...

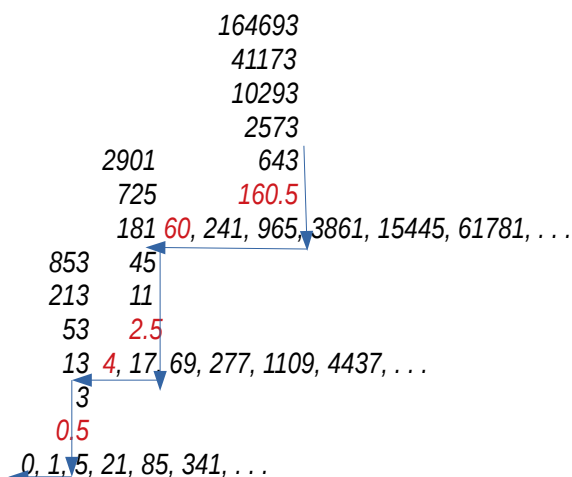
4, 17, 69, 277, 1109, 4437, ...

0.5, 3, 13, 53, 213, 853, ...

0, 1, 5, 21, 85, 341, ...

Como que conocemos los elementos que unen las secuencias, podemos unir las todas y vemos la ruta que ha seguido el número 643 hasta llegar al 1 y al 0.

Para formar el diagrama si la cantidad de secuencias implicadas es un número par, la primera secuencia se pone en vertical. Si la cantidad de secuencias implicadas es un número impar, la primera secuencia se pone en horizontal. Las siguientes secuencias se ponen de forma alternativa en vertical o en horizontal.



APLICANDO EL ALGORITMO DE COLLATZ

Empezando con el mismo número 643 la sucesión es: 643, 1930, 965, 2896, 1448, 724, 362, 181, 544, 272, 136, 68, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Y las secuencias implicadas:

... 1286, 643

... 1930, 965

... 2896, 1448, 724, 362, 181

... 544, 272, 136, 68, 34, 17

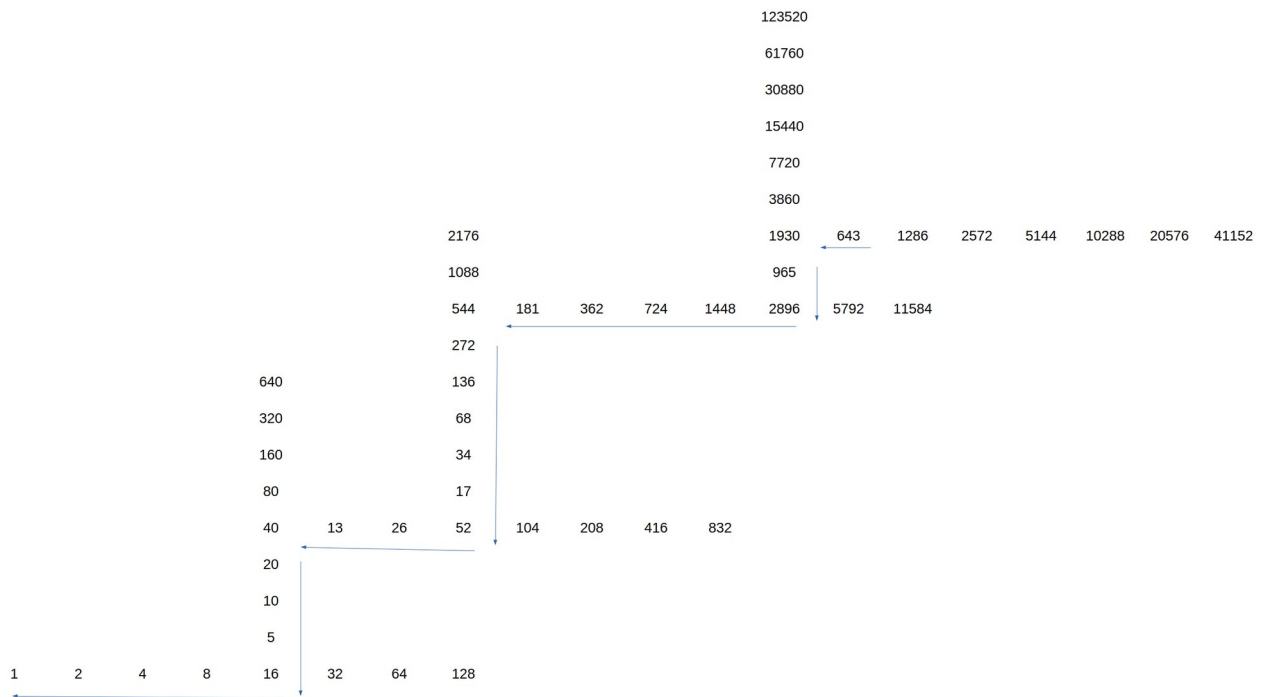
... 52, 26, 13

... 40, 20, 10, 5

... 16, 8, 4, 2, 1

En la sucesión de Collatz, la "unión" de las secuencias son los números impares, que también son la cota inferior de la secuencia.

El diagrama formado:



ORDEN EN LOS NÚMEROS DE LA SUCESIÓN DE COLLATZ

El objetivo de este artículo es explicar el orden dentro del caos aparente de los números granizo de Collatz. No me atrevo a decir que sea una demostración de la conjetura, pero sí que le da sentido a la pregunta de porqué se comportan así los números, pues no siguen ningún orden ni patrón lógicos.

LA CONJETURA DE COLLATZ

Propuesta en 1.937 por el matemático alemán Lothar Collatz, es conocida también como conjetura de Ulam, conjetura $3n+1$ o problema de Siracusa, entre otros nombres. A la fecha no hay ninguna explicación ni demostración y puede ser verdadera o falsa.

ENUNCIADO

Elegimos un número natural cualquiera (n) y realizamos los siguientes cálculos:

Si el número es par, se divide entre 2 y si el número es impar, se multiplica por 3 y se suma 1 al resultado.

Estas operaciones se repiten a cada resultado obtenido hasta que se llega al 1.

Si se continúa con

el 1 la secuencia entra en un ciclo infinito con el 4, 2, 1.

Un ejemplo empezando con el número 72:

$$72/2 = 36$$

$$36/2 = 18$$

$$18/2 = 9$$

$$3 \cdot 9 + 1 = 28$$

$$28/2 = 14$$

$$14/2 = 7$$

$$3 \cdot 7 + 1 = 22$$

$$22/2 = 11$$

$$3 \cdot 11 + 1 = 34$$

$$34/2 = 17$$

$$3 \cdot 17 + 1 = 52$$

$$52/2 = 26$$

$$26/2 = 13$$

$$3 \cdot 13 + 1 = 40$$

$$40/2 = 20$$

$$20/2 = 10$$

$$10/2 = 5$$

$$3 \cdot 5 + 1 = 16$$

$$16/2 = 8$$

$$8/2 = 4$$

$$4/2 = 2$$

$$2/2 = 1$$

El número 72 ha necesitado 22 iteraciones hasta llegar al 1 y la secuencia obtenida es:

72, 36, 18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2,

La pregunta principal, para la que aún no hay una respuesta, es si es cierta la conjetura para cualquier número inicial y, se elija cual se elija, siempre se acaba en el 1. Se ha comprobado con programas informáticos que para números hasta $87 \cdot 2^{60}$ la secuencia siempre acaba en 1, no obstante, como los números son infinitos, eso no es una prueba para todos los números naturales.

La segunda pregunta, también sin respuesta, es porqué se comportan así los números, pues no siguen ningún orden ni patrón lógicos.

LO QUE OCURRE

Si escribimos ordenadamente el conjunto de todos los números naturales colocándolos de forma que los impares queden en la primera fila y los demás números debajo del que es su mitad, formaremos una tabla en la que estarán todos los números naturales.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	...
2	6	10	14	18	22	...							
4	12	20	...										
8	24	...											
16	...												

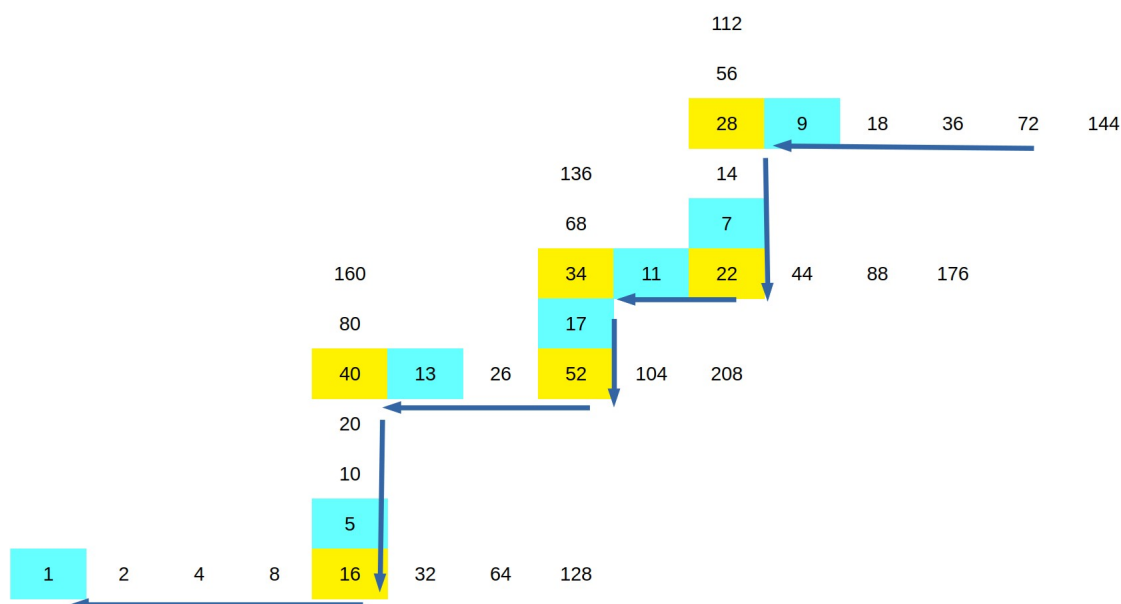
En el ejemplo que hemos puesto empezando con el número 72 los números de la secuencia obtenida forman grupos de uno o más números pares y un impar, que identificamos como elementos de las columnas de la tabla, que forman progresiones geométricas de razón igual a 2.

72, 36, 18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Gráficamente, construyendo un diagrama que muestra la ruta seguida por el número 72 hasta llegar al 1, el orden de los números de esta secuencia tendrá sentido.

Para ello escribimos el último grupo obtenido en la secuencia, empezando con el número 1, en horizontal y creciente de izquierda a derecha, dejando suficiente espacio en la parte superior para poder escribir las demás progresiones. Podemos completarlas con más elementos para mejor visualización del conjunto. Seguimos el mismo orden de la secuencia obtenida y disponemos las progresiones de manera que el impar del grupo se coloque junto al par del siguiente grupo, alternativamente en horizontal y vertical.

El diagrama lo forman las columnas de la tabla de los números naturales unidas con su cota inferior número impar y el elemento número par que resulta al aplicar la operación $3n+1$ del algoritmo. Todos los números de la forma $6n+4$ enlazan con el impar cota inferior de otras progresiones.



La respuesta a la primera pregunta ¿Es cierta la conjetura para cualquier número inicial y, se elija cual se elija, siempre se acaba en el 1?. La respuesta es afirmativa porque en la tabla que hemos escrito hay un número infinito de progresiones, cuyos elementos también infinitos son todos los números naturales y son las progresiones que usamos en el diagrama para cualquier número. Cualquier número par es divisible por 2^n , resultando un impar y cualquier número impar $2n+1$ tiene el número par $6n+4$ con el que se pueden unir las dos progresiones.

¿Porqué todos los números naturales llegarán al número uno?

Cuando se aplica la operación del algoritmo a los números impares, que son la cota inferior de las progresiones, éstas se unen a la siguiente progresión a través de los pares que tienen el mismo valor de (n) . Por ejemplo el 13 se une al 40 porque ambos tienen $n=6$, o sea $2n+1=13$ y $6n+4=40$. Así pues, todos los números de la secuencia van bajando hasta el número 1 irremediablemente, incluso aunque algunos tramos de la secuencia sean ascendentes, como es el caso de los impares 11, 17 y 13 del diagrama. Numéricamente son ascendentes, pero realmente el 17 está más cerca del 1 que el 7. Asignando al diagrama un eje (y) que marca la altitud y un eje (x) que marca la latitud, se puede conocer la posición de los números de cualquier secuencia. Incluso la suma de $y + x$ es igual al número de iteraciones que necesita el número inicial para llegar al 1.

Los protagonistas en estas secuencias de Collatz son los números impares ya que los números pares tienen únicamente el cometido de convertirse en un impar tras dividirse entre 2^n .

Todos los impares son de la forma $2n+1$ pero debemos diferenciarlos en otras tres.

En los primeros 100 números naturales hay 50 impares, de los cuales 25 son de la forma $4n+1$ y 25 de la forma $4n+3$ y de estos 50 números hay 17 que son números impares de la forma $6n+3$.

La importancia de estas tres formas de impares la definimos a continuación.

Cuando el impar es de la forma $4n+1$ el par al que se une siempre necesita al menos dos divisiones entre 2 para llegar al próximo impar.

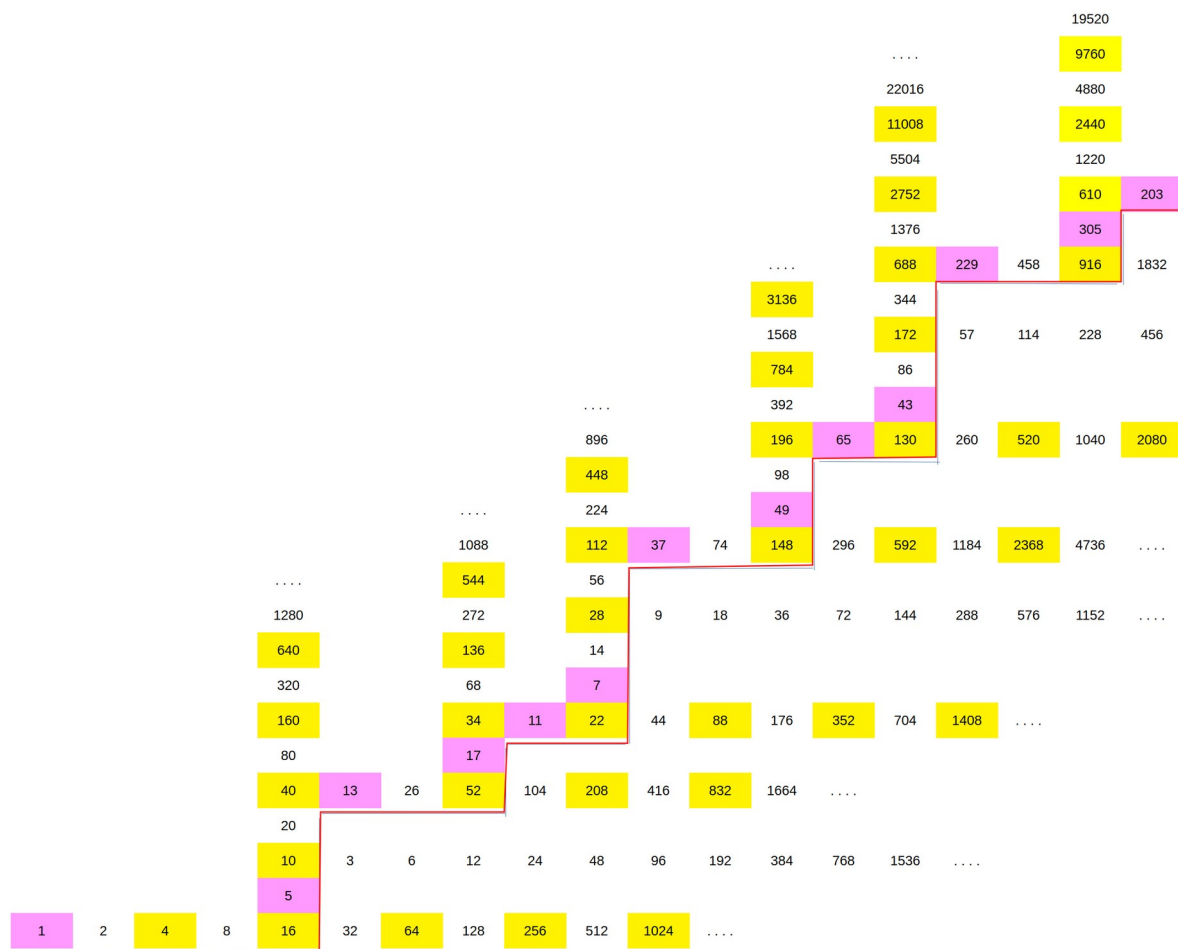
Si llega al impar con dos divisiones, éste es $n/2$ menor que el anterior.

Si el par necesita tres divisiones para llegar al impar, éste es $1/4(5n+2)$ menor que el anterior.

Si el par necesita cuatro divisiones entre 2 para llegar al impar, éste es $3/4(3n+1)$ menor que el anterior, . . .

La secuencia es descendente y acaba en el último impar 1.

Las variaciones ascendentes con los números impares que ocurren en las secuencias, son debidas a los impares de la forma $4n+3$, que enlazan siempre con el segundo elemento de la próxima progresión que solamente necesitan una división entre 2 para llegar al siguiente impar y éste es siempre $(n+1)$ mayor, por lo que la secuencia es ascendente y se aleja del 1.



Este es el diagrama formado con las progresiones que intervienen empezando con el número 203.

Los elementos marcados en amarillo son los pares $6n+4$ que reciben las otras progresiones a través de su impar cota inferior.

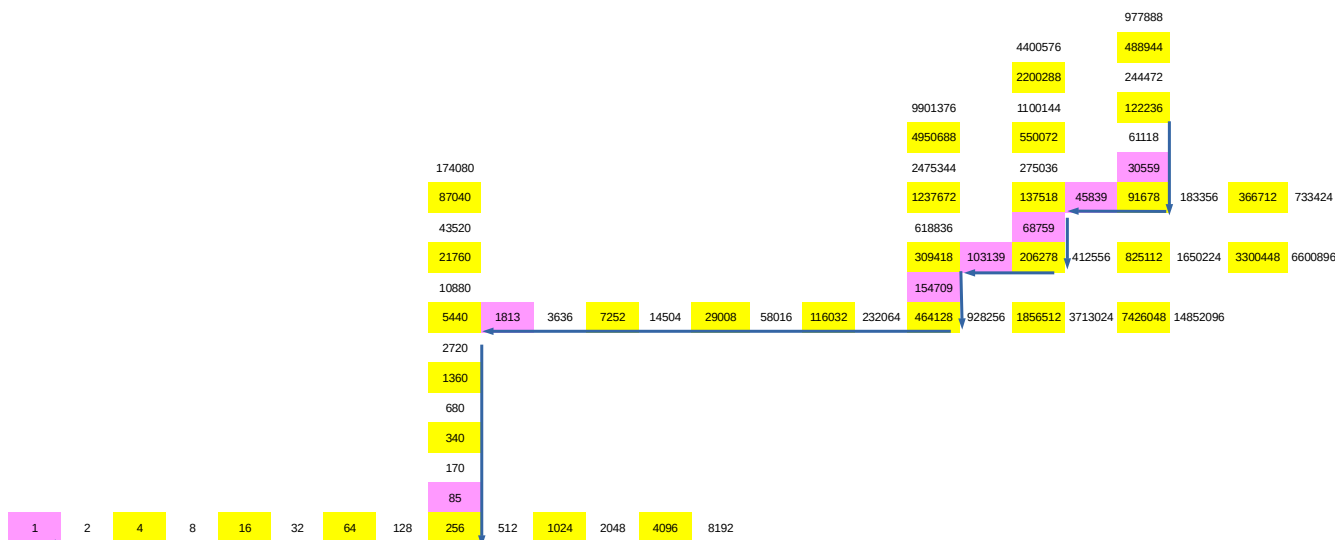
Los elementos sin marcar, de la forma $6n+2$, no reciben ninguna progresión que les una.

Las progresiones que sus elementos son múltiplos de 3 no se unen con ninguna otra.

El primer elemento, cota inferior de estas progresiones son los impares de la forma $6n+3$.

Los elementos marcados en magenta son los números impares cota inferior que enlazan la siguiente progresión por medio del elemento par que tiene su mismo valor de (n) .

En el diagrama del número 203 vemos que los elementos que forman las progresiones son un número impar cota inferior seguido de números pares que son alternativamente de la forma $6n+4$ y de la forma $6n+2$. Los primeros pueden recibir otras progresiones pero no los segundos, lo que facilita que la secuencia sea descendente al ser necesarias al menos dos divisiones entre 2 hasta llegar al siguiente impar. De manera decisiva son también protagonistas las progresiones que sus elementos son múltiplos de 3 con las que no enlazan otras, pero que en la progresión a la que enlazan siempre hay, como mínimo, tres elementos pares que provocan tres divisiones entre 2.

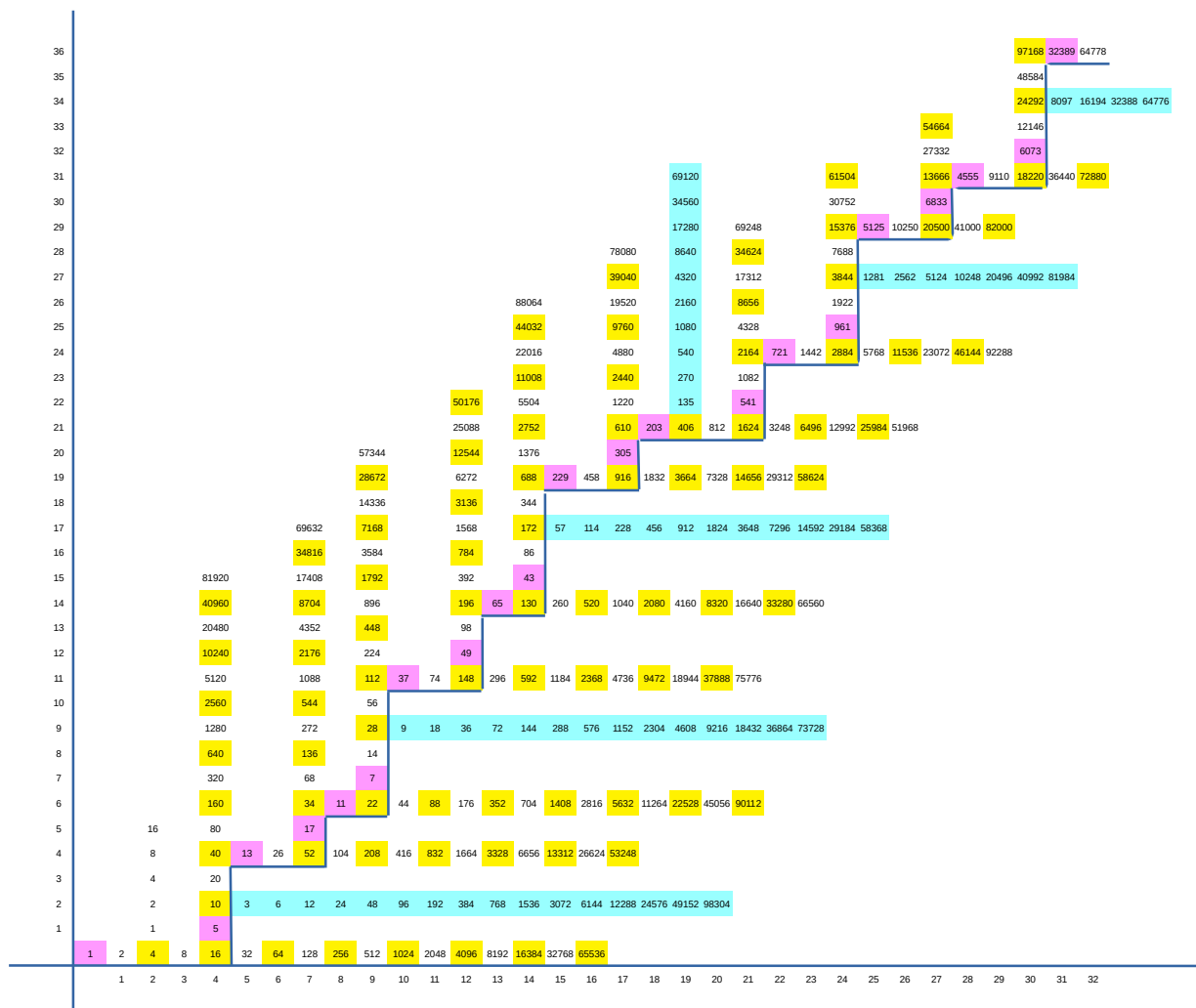


Este diagrama formado con las progresiones que intervienen en la secuencia de Collatz empezando con el número 122236, es un buen ejemplo de la importancia que tienen los impares de la forma $4n+1$, el 154709, 1813 y 85, que caen precipitadamente hasta el 1, porque se unen a la siguiente progresión con el elemento que ocupa, como mínimo, el tercer lugar. En cambio, los impares de la forma $4n+3$, el 30559, 45839, 68759 y 103139 son los responsables de que la secuencia sea ascendente en ese tramo, porque todos ellos se unen a la siguiente progresión con el segundo elemento, el cual solamente necesita una división entre 2 para llegar al siguiente impar, que resulta siempre $(n+1)$ mayor. Aunque los impares tengan orden ascendente, la secuencia sigue descendiendo y acercándose al 1 en cada operación sobre el impar.

A continuación un diagrama cartesiano de la secuencia empezando con el número 64778, que llega al 1 con 68 iteraciones (36 + 32).

La secuencia generada es: 64778, 32389, 97168, 48584, 24292, 12146, 6073, 18220, 9110, 4555, 13666, 6833, 20500, 10250, 5125, 15376, 7688, 3844, 1922, 961, 2884, 1442, 721, 2164, 1082, 541, 1624, 812, 406, 203, 610, 305, 916, 458, 229, 688, 344, 172, 86, 43, 130, 65, 196, 98, 49, 148, 74, 37, 112, 56, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Hay 26 pasos que son "estériles", es decir, son pares de la forma $6n+2$ que no unen progresiones y números de la forma $6n+4$ que reciben las progresiones con los elementos que son múltiplos de 3 a las que no les enlaza ninguna progresión. Estos números "estériles" son espacios entre dos impares y cada uno de ellos es una división entre 2 y la secuencia es descendente.



Los números magenta son los impares cota inferior de las progresiones que enlazan con los números marcados en amarillo de otras progresiones, que son números pares de la forma $6n+4$.

Las progresiones marcadas en azul son las que no enlazan con ellas otras progresiones. Sus elementos son múltiplos de 3 y los impares cota inferior son impares de la forma $6n+3$.

Los números sin color son los elementos de las progresiones, pares de la forma $6n+2$ que no enlazan con ninguna progresión.

Lo que provoca que cualquier secuencia de Collatz descienda hasta el 1 es la presencia de los números pares $6n+2$ y de los números pares a los que enlazarían las secuencias que sus elementos son múltiplos de 3. En el ejemplo esas progresiones no participan en la secuencia, pero las hemos incluido en el diagrama para apreciar el "salto" que provocan en la progresión, siendo necesarias tres divisiones entre 2 para que ésta alcance el impar. En el diagrama el número 37 enlaza con el 112 que tiene que dividirse por 2^4 para alcanzar el impar 7, debido a dos números $6n+2$ y el que enlazaría con la progresión cota inferior 9.

ORDEN EN LOS NÚMEROS DE LA SUCESIÓN DE COLLATZ

El objeto de este escrito es entender el orden en el caos aparente de los números granizo de la conjetura de Collatz. Seguramente no servirá como demostración, pero sí que le da sentido a la pregunta de porqué se comportan así los números.

LA CONJETURA DE COLLATZ

Propuesta en 1.937 por el matemático alemán Lothar Collatz, es conocida también como conjetura de Ulam, conjetura $3n+1$ o problema de Siracusa, entre otros nombres. A la fecha no hay ninguna explicación ni demostración y puede ser verdadera o falsa.

ENUNCIADO

Elegimos un número natural cualquiera (n) y realizamos los siguientes cálculos:

Si el número es par, se divide entre 2 y si el número es impar, se multiplica por 3 y se suma 1 al resultado. Estas operaciones se repiten a cada resultado obtenido hasta que se llega al 1. Si se continúa con el 1 la secuencia entra en un ciclo infinito con el 4, 2, 1. La Conjetura afirma que, comenzando desde cualquier entero positivo n, la iteración repetida de esta función produce finalmente el valor 1.

Un ejemplo empezando con el número 72:

$72/2 = 36$
 $36/2 = 18$
 $18/2 = 9$
 $3 \cdot 9 + 1 = 28$
 $28/2 = 14$
 $14/2 = 7$
 $3 \cdot 7 + 1 = 22$
 $22/2 = 11$
 $3 \cdot 11 + 1 = 34$
 $34/2 = 17$
 $3 \cdot 17 + 1 = 52$
 $52/2 = 26$
 $26/2 = 13$
 $3 \cdot 13 + 1 = 40$
 $40/2 = 20$
 $20/2 = 10$
 $10/2 = 5$
 $3 \cdot 5 + 1 = 16$
 $16/2 = 8$
 $8/2 = 4$
 $4/2 = 2$
 $2/2 = 1$

El número 72 ha necesitado 22 iteraciones hasta llegar al 1 y la secuencia obtenida es:

72, 36, 18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

La pregunta principal, para la que aún no hay una respuesta, es si es cierta la conjetura para cualquier número inicial y, se elija cual se elija, siempre se acaba en el 1.

Se ha comprobado con programas informáticos que para números hasta $87 \cdot 2^{60}$ la secuencia siempre acaba en 1, no obstante, como los números son infinitos, eso no es una prueba para todos los números naturales.

La segunda pregunta, también sin respuesta, es porqué se comportan así los números, pues no siguen ningún orden ni patrón lógicos.

MI VISIÓN DEL PROBLEMA

Si escribimos ordenadamente el conjunto de todos los números naturales colocándolos de forma que los impares queden en la primera fila y los demás números debajo del que es su mitad, formaremos una tabla en la que estarán todos los números naturales.

Insistimos en que tenemos que escribir los números ordenadamente: 1, 2, 3, 4, . . . no por filas ni columnas. La primera fila de la tabla tendrá n números impares, la segunda fila tendrá $n/2$ números pares, la tercera fila tendrá $n/4$ números pares, etc.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	...
2	6	10	14	18	22	...							
4	12	20	...										
8	24	...											
16	...												

En esta tabla podemos escribir infinitos números y la sección de la misma se vería así:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100
8	24	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200
16	48	80	112	144	176	208	240	272	304	336	368	400
32	96	160	224	288	352	416	480	544	608	672	736	800
64	192	320	448	576	704	832	960	1088	1216	1344	1472	1600
128	384	640	896	1152	1408	1664	1920	2176	2432	2688	2944	3200

En el ejemplo que hemos puesto empezando la secuencia con el número 72, los números obtenidos forman grupos de uno o más números pares y un impar, que identificamos como elementos de las columnas de la tabla, que forman progresiones geométricas de razón igual a 2, cota inferior un número impar y sin cota superior.

72, 36, 18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

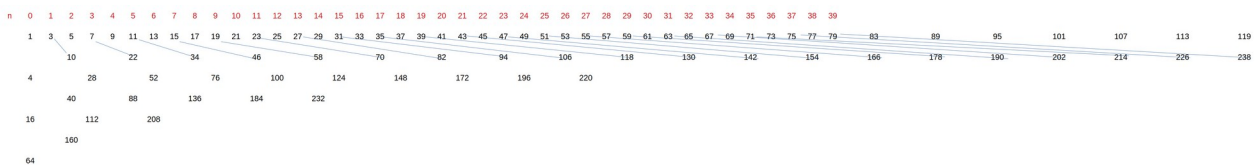


El diagrama lo forman las columnas de la tabla de los números naturales unidas con su cota inferior número impar y el elemento número par que resulta al aplicar la operación $3n+1$ del algoritmo. Cualquier sucesión obtenida de cualquier número natural puede representarse mediante un diagrama similar, porque en la tabla están todos los números naturales.

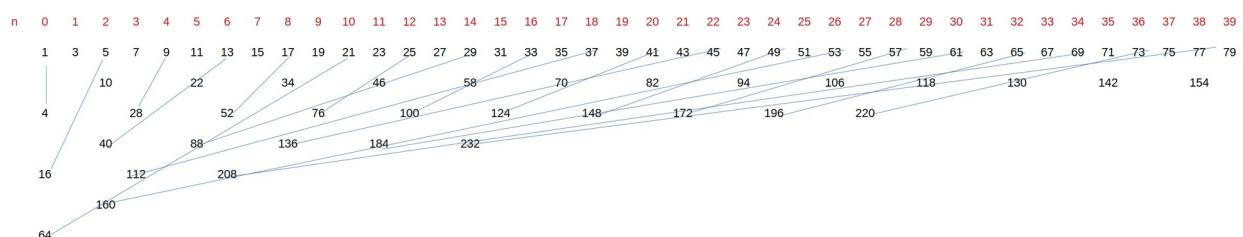
[illegible]

En las dos tablas siguientes hemos sustituido los números pares por los números obtenidos después de aplicar la operación del algoritmo de Collatz a los 40 números impares.

Cuando el número impar $(2n+1)$ tiene n impar, o sea todos los números de la forma $(4n+3)$, el número resultante siempre llega al siguiente impar con solo una división entre 2, por lo que el impar siempre es $(n+1)$ mayor que el anterior y la secuencia es ascendente.



Los números de la forma $(8n+5)$ producen números pares que necesitan más de dos divisiones para llegar al próximo impar. Si el par necesita tres divisiones para llegar al impar, éste es $1/4(5n+2)$ menor que el anterior. Si el número par necesita cuatro divisiones entre 2 para llegar al siguiente impar, éste es menor que el anterior, . . . incluso algunos impares producen números pares que con n divisiones entre 2 llegan directamente al 1. Estos impares son de la forma $1/3(4^n-1)$.



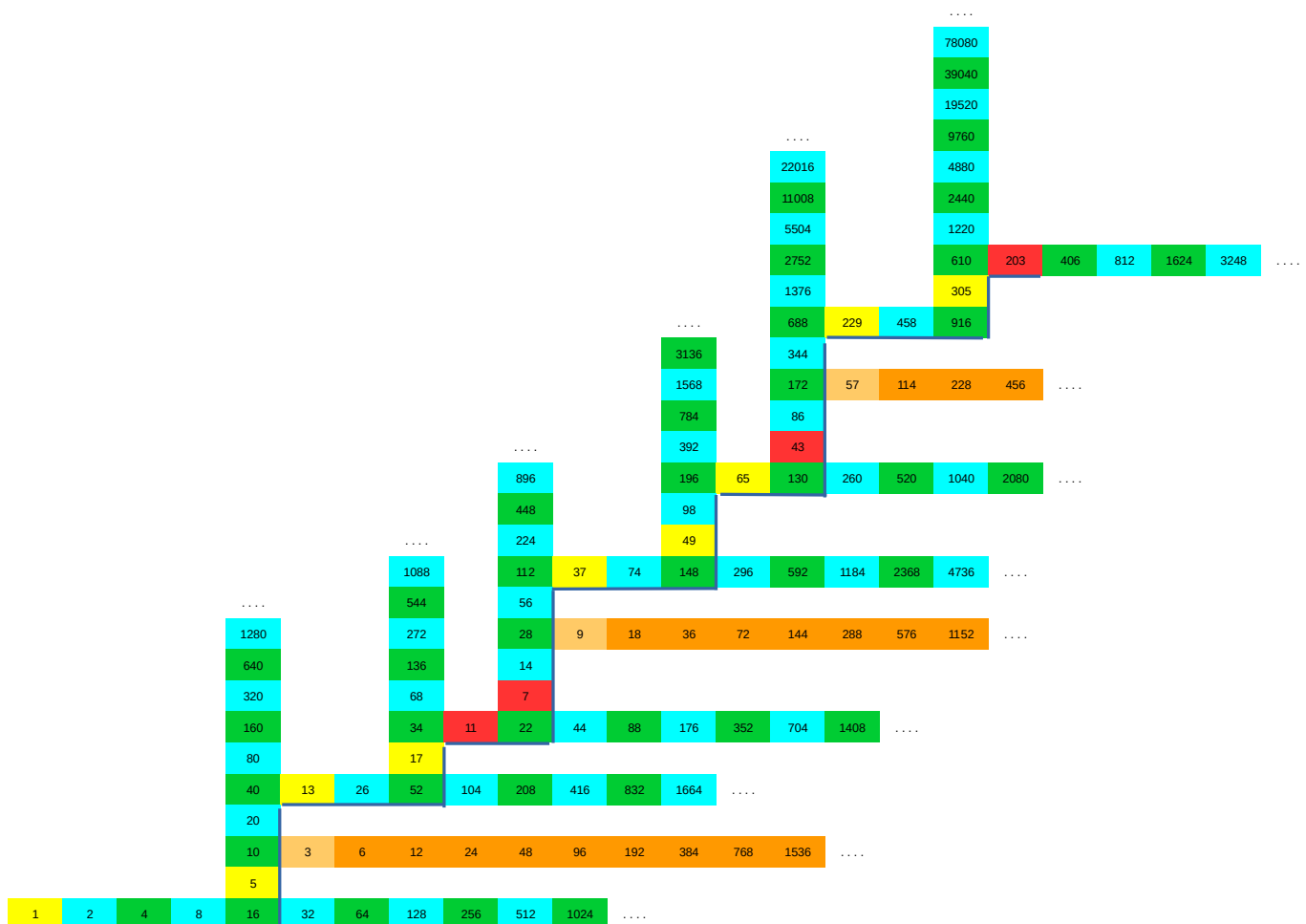
Aquí vemos los números pares que han resultado de aplicar el algoritmo a esos 20 impares que tienen el valor de n par. Diez de ellos necesitan dos divisiones. Cinco de ellos necesitan tres divisiones. Tres de ellos necesitan cuatro divisiones. Uno de ellos necesita 5 divisiones y otro que necesita 6 divisiones. Cuantas más divisiones sean necesarias, más rápidamente la secuencia descenderá hasta alcanzar el 1.

Aunque existe la misma cantidad de números impares con el valor de n impar que con el valor de n par y la probabilidad de salir unos u otros es la misma, la secuencia siempre descenderá, porque si unos facilitan solo una división entre 2 del número par resultante y la secuencia asciende, los otros facilitan siempre más de una y la secuencia desciende a mayor velocidad.

No existe el supuesto caos que se atribuye a los números "granizo" de la secuencia, ya que siguen el mismo orden de los números naturales cuando los hemos escrito en la tabla ordenadamente.

La confusión se produce porque en la secuencia hay impares con valor de n impar y también impares con valor de n par, por lo que los números van arriba y abajo sin ton ni son y no guardan ningún patrón ni orden aparente.

Diagrama de un ejemplo empezando la secuencia con el número 203

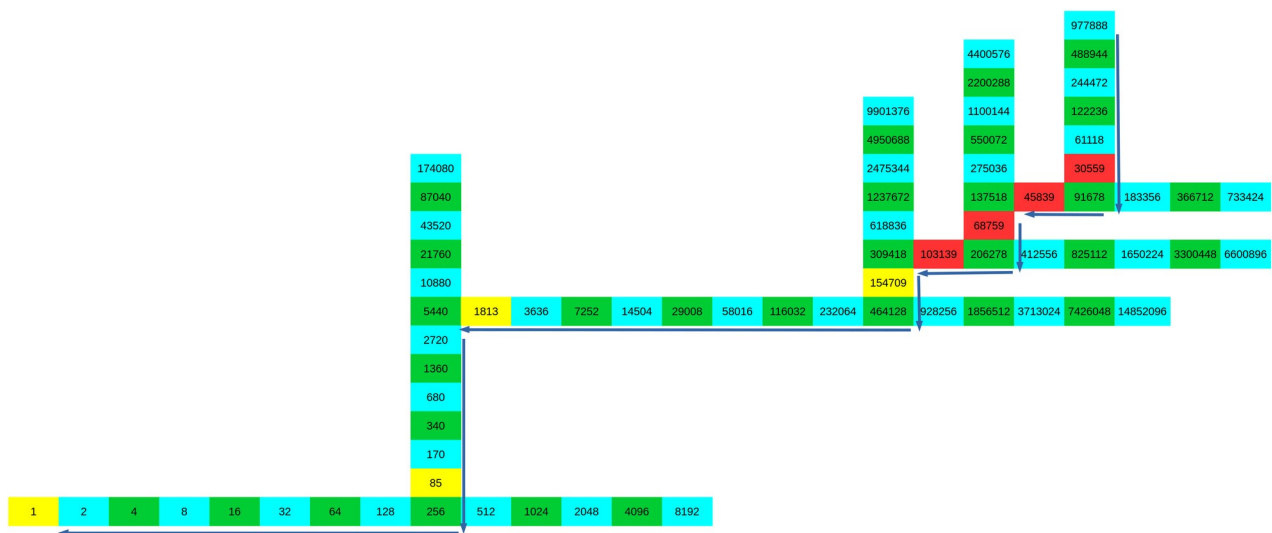


Los elementos marcados en verde son los pares $6n+4$ que reciben las otras progresiones a través de su impar cota inferior.

Los elementos en azul, al no poder recibir nunca ninguna progresión que les una, provocan como mínimo dos divisiones entre 2.

En color naranja las progresiones que sus elementos son múltiplos de 3, a las que no se une ninguna progresión. Los números pares a los que se unen estas progresiones provocan también una división entre 2. Estas tres progresiones que hemos puesto en el diagrama no participan en la secuencia, pero las hemos puesto para comprobar que su presencia provoca una división más entre 2 en los pares que enlazan.

En el diagrama distinguimos en rojo los impares 203, 43, 7 y 11 (todos valor de n impar) que han provocado que la secuencia sea ascendente en estos puntos. En color amarillo los impares con valor de n par, que son los responsables de que la secuencia sea descendente y finalice en el 1.



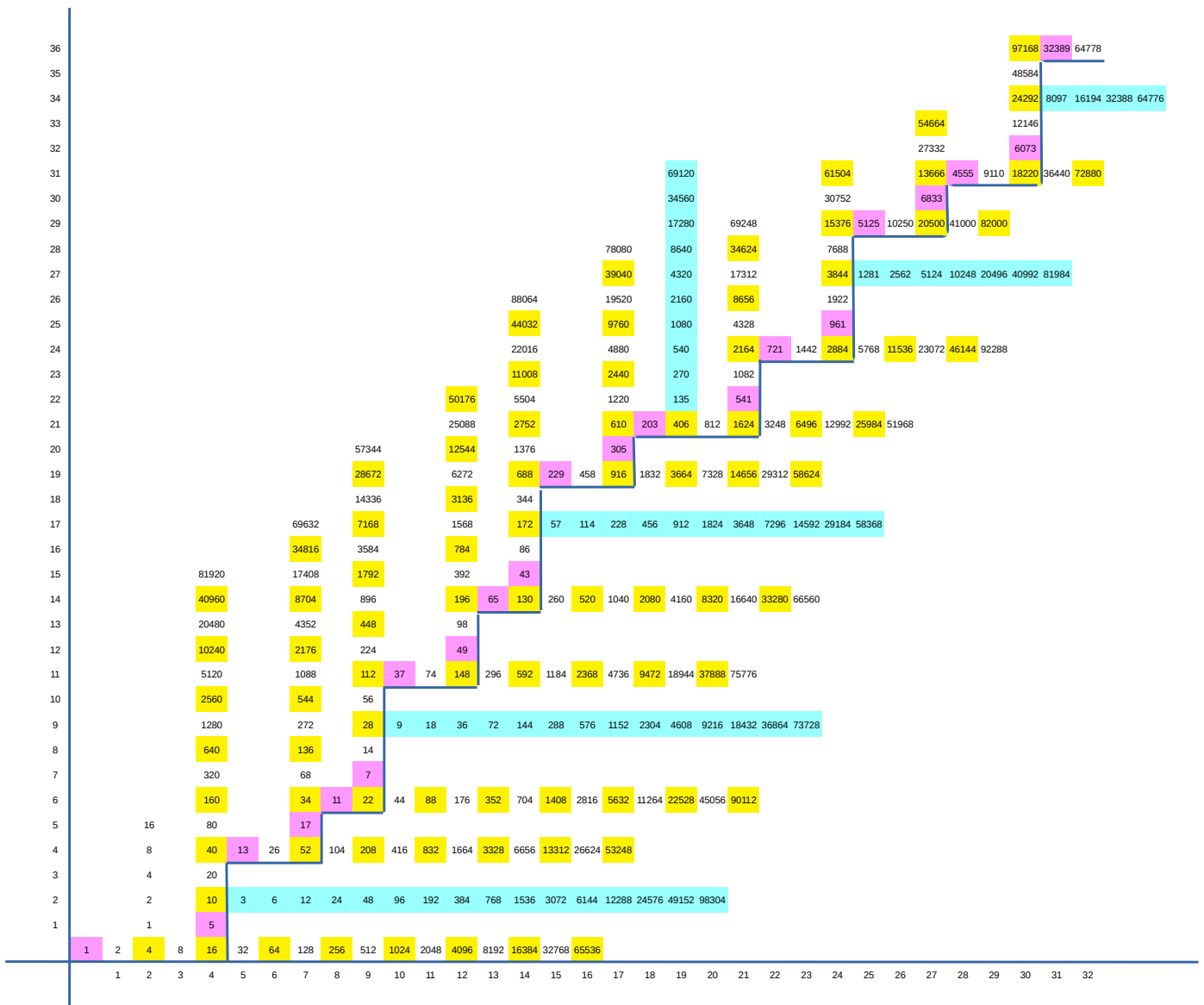
Este diagrama formado con las progresiones que intervienen en la secuencia empezando con el número 977888, es un buen ejemplo de la importancia que tienen los impares que tienen valor de n par, el 154709, 1813 y 85, que caen precipitadamente hasta el 1, porque se unen a la siguiente progresión con el elemento que ocupa, como mínimo, el tercer lugar de su progresión.

En cambio, los impares con valor de n impar, el 30559, 45839, 68759 y 103139 son los responsables de que la secuencia sea ascendente en ese tramo, porque todos ellos se unen a la siguiente progresión con el segundo elemento de la misma, el cual necesita solo una división entre 2 para llegar al siguiente impar, que resulta siempre $(n+1)$ mayor.

A continuación un diagrama al que hemos añadido las coordenadas cartesianas, de la secuencia empezando con el número 64778, que necesita 68 iteraciones (36 + 32) para llegar al 1.

La secuencia generada es: 64778, 32389, 97168, 48584, 24292, 12146, 6073, 18220, 9110, 4555, 13666, 6833, 20500, 10250, 5125, 15376, 7688, 3844, 1922, 961, 2884, 1442, 721, 2164, 1082, 541, 1624, 812, 406, 203, 610, 305, 916, 458, 229, 688, 344, 172, 86, 43, 130, 65, 196, 98, 49, 148, 74, 37, 112, 56, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Hay 26 pasos "estériles", que son los números pares que no unen progresiones (sin color) y los números pares que reciben las progresiones que tienen los elementos múltiplos de 3, que no les enlaza ninguna progresión. Estos números "estériles" son espacios entre dos impares y cada uno de ellos es una división entre 2, por lo que la secuencia es descendente.



Las progresiones marcadas en azul son las que no enlazan con ellas otras progresiones, porque sus elementos son múltiplos de 3.

Los números sin color son los elementos de las progresiones que no enlazan ninguna progresión.

La presencia de esos pasos "estériles" es lo que provoca que cualquier secuencia descienda hasta terminar en el 1.

Cualquier número de $X+Y$ (pasos) es posible para cualquier número de cualquier secuencia.

Observando el diagrama de una secuencia podemos entender sin palabras la demostración del problema.

EL PURGATORIO

Se cree que todo aquel que entra en el Purgatorio terminará entrando al Cielo tarde o temprano, pero antes tendrá que librarse de todos los pecados que cometió en vida.

Encontrará ángeles malos y ángeles buenos, el mismo número de malos que de buenos y su número es infinito, pero no los conocerá porque todos tienen el mismo semblante.

El que entra en el purgatorio es un $(2n+1)$ y (n) es el número de pecados que cometió. Su nombre es el número.

Cada vez que se encuentra con un ángel malo sus pecados se incrementan en $1/2(n+1)$.

Los encuentros con los ángeles buenos siempre disminuyen sus pecados en más o menos cantidad, dependiendo del tipo de ángel, pues los hay de muchos tipos diferentes. Los que menos le quitan son los que se llaman $(8n+1)$, que le limpian de una cuarta parte de todos sus pecados $1/4(n)$ pero también están los $(8n+5)$ que le quitan muchos más y los que, si tiene la suerte de encontrarlos, le quitarán la totalidad de los pecados. Estos son los ángeles buenos llamados $1/3(4^n-1)$.

No saldrá del purgatorio hasta que se haya purificado despojándole de todos los pecados y su (n) sea cero y entonces su nombre será Uno.

La probabilidad de encontrarse con un ángel malo o con un ángel bueno es la misma, el 50 por ciento, pero mientras que todos los ángeles malos que encuentra le aumentan sus pecados en $1/2(n+1)$, cada ángel bueno le puede quitar desde una cuarta parte hasta todos los pecados y el que entra en el purgatorio siempre sale porque allí el tiempo no cuenta.

Dos ejemplos:

Una persona cuyo nombre es Diecisiete y tiene 8 pecados cuando entra en el valle.

El primer encuentro es con un ángel bueno, que le quita $1/4$ de sus pecados, $1/4(n)$. Sigue con 6 pecados y su nombre es ahora 13.

El próximo encuentro es con otro ángel bueno que le quita 4 pecados, $1/8(5n+2)$. Sigue con 2 pecados y su nombre es ahora 5.

El próximo encuentro es también con otro ángel bueno que le quita los 2 pecados que le quedan.

Ya puede entrar al cielo, porque ya no tiene pecados y ahora su nombre es Uno.

Otro ejemplo de una persona llamada Nueve, con 4 pecados.

El primer encuentro es con un ángel bueno, que le quita $1/4$ de sus pecados. Ahora tiene 3 pecados y su nombre es Siete.

El siguiente encuentro es con un ángel malo, que le da 2 pecados, $1/2(n+1)$, y su nombre es ahora Once.

El siguiente encuentro es también con un ángel malo, quien le da 3 pecados, $1/2(n+1)$, y su nombre ahora es Diecisiete.

El siguiente encuentro es con un ángel bueno, que le quita 2 pecados, $1/4(n)$, quedándole 6 pecados y su nombre ahora es Trece.

Vuelve a encontrarse otro ángel bueno, que le quita 4 pecados, $1/8(5n+2)$. Ahora le quedan 2 pecados y su nombre es Cinco.

El siguiente encuentro es también con un ángel bueno, que le quita los dos pecados que le quedan.

Ahora su nombre es Uno y se irá al cielo, pues ya no le queda ningún pecado que purgar.

Los actores de esta historia:

Las almas son $(2n+1)$ y sus nombres son los de los números según los pecados cometidos (n).

Los ángeles del mal son $(2n+1)$ con n impar.

Los ángeles del bien son $(2n+1)$ con n par.

El alma que entra en el purgatorio es el número con el que se empieza la secuencia de la conjetura de Collatz.

VISIÓN "B" DEL PROBLEMA

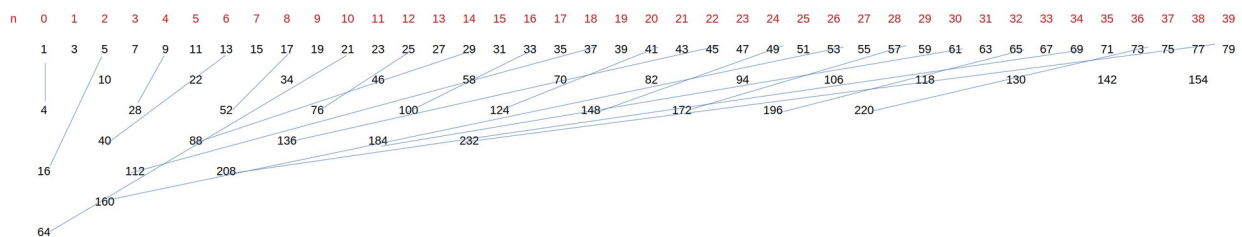
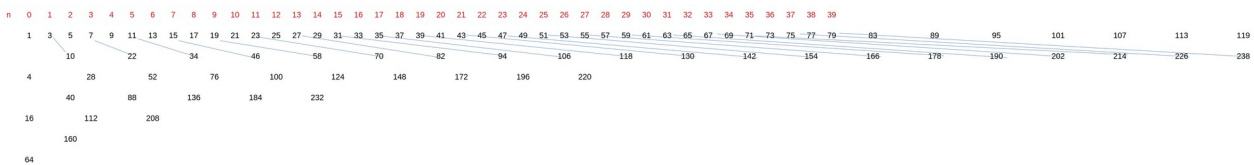
Si escribimos los números hasta el 80, la tabla obtenida sería esta:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79		
2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78																						
4	12	20	28	36	44	52	60	68	76																																
8	24	40	56	72																																					
16	48	80																																							
32																																									
64																																									

Los números quedan situados de la siguiente forma: 40 impares en la primera fila. 20 pares en la segunda fila, 10 pares en la tercera fila. 5 pares en la cuarta fila. 3 pares en la quinta fila y un número par en la sexta y séptima fila.

Elegimos un número cualquiera de esta tabla, por ejemplo el 54. Es par y lo dividimos entre 2 las veces necesarias hasta llegar a un impar. Es suficiente una división y obtenemos el 27. Ahora buscamos en la tabla el siguiente número, el 28. Es par y lo dividimos entre 2 las veces necesarias hasta llegar a un impar. Con dos divisiones obtenemos el 7. Ahora vamos al número que le sigue, o sea el 8. Es par y lo dividimos entre 2 las veces necesarias hasta llegar a un impar. Con 3 divisiones llegamos al 1. Sucederá lo mismo con cualquier número que elijamos, acabando siempre con el 4, 2, 1.

En las dos tablas siguientes hemos sustituido los números pares por los números obtenidos después de aplicar la operación del algoritmo de Collatz a los 40 números impares.



Repetiendo el proceso de la primera tabla, también llegaremos siempre al 4, 2, 1. La diferencia está en que en la primera seguimos con el siguiente número del impar y en éstas seguimos con el número que ha resultado de aplicar $3n+1$ al impar.

XV. LA CONJETURA DE COLLATZ

Orden y armonía en los números de las secuencias.

Miguel Cerdá Bennassar – Febrero 2021

Sobre las probabilidades que tienen los números impares de estar en los puntos ascendentes o en los puntos descendentes de las secuencias.

Fragmento de una tabla que puede ser infinita en filas y columnas y tener infinitos números:

	B/C	B1	B5	B7	C11	B13	C17	B19	B23	B25	C29	B31	C35	B37	B41	B43	C47	B49	C53	B55	B59	...
n																						
1		1	13	37	7	17	11	25	61	133	19	41	23	49	109	229	31	65	35	73	157	...
2		5	53	149	29	277	181	101	245	533	77	664	373	197	437	917	125	1045	565	293	629	...
3		85	853	2389	469	1109	725	1621	3925	8533	1237	2645	1493	3157	6997	14677	2005	4181	2261	4693	10069	...
4	A	341	3413	9557	1877	17749	11605	6485	15701	34133	4949	42325	23893	12629	27989	58709	8021	66901	36181	18773	40277	...
5		5461	54613	152917	30037	40664	46421	103765	251221	546133	79189	169301	95573	202069	447829	939349	128341	267605	144725	300373	644437	...
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Los elementos B/C de la primera fila son todos los números impares que pueden formar parte de cualquier secuencia obtenida con el algoritmo de Collatz y los elementos A de las restantes filas son los números impares que iteran al número impar B/C de su columna. No están los números impares de la forma $6n-3$ porque solo pueden estar en las secuencias si son su primer número impar.

Los números impares A en color rojo llegan a impares C mayores y la secuencia es ascendente en ese punto.
Los números impares A en color amarillo llegan a impares B/C menores y la secuencia es descendente en ese punto.

Los impares B en color verde son elementos de las secuencias que siempre se encontrarán en puntos descendentes.
Los impares C en color azul son elementos de las secuencias que pueden estar en puntos descendentes y también en puntos ascendentes, en un porcentaje del $(100-100/n)\%$ descendentes y el $(100/n)\%$ ascendentes. El valor de n es el mayor valor de n de la tabla.

En esta tabla, que el mayor valor de n es 5, las probabilidades de los 6 impares C de estar alguno de ellos en los puntos descendentes son del 80%, $(100-100/5)$ y las probabilidades de estar en los puntos ascendentes son de un 20%, $(100/5)$.

En la tabla hay representadas 20 columnas y 20 impares B/C, de los cuales solamente 6 de ellos pueden estar en puntos ascendentes de las secuencias.
En una tabla con 50 columnas y 50 impares B/C, 16 de ellos (32%) pueden estar en puntos ascendentes y este 32% tienen el 20% de probabilidades de estar en puntos ascendentes, mientras que 34 impares (68%) tienen el 80% de probabilidades de estar en puntos descendentes.

En una tabla con el mayor valor de $n=10$, las probabilidades de los impares C de estar en los puntos descendentes de las secuencias son del 90% y del 10% las probabilidades de estar en los puntos ascendentes.
Cuanto mayores son las oscilaciones ascendentes de las secuencias, alcanzando números mayores, más probabilidades hay de que los impares C estén en puntos descendentes.

Estos porcentajes varían según el valor de n, siendo $\approx 100\%$ en puntos descendentes y $\approx 0\%$ en puntos ascendentes, convirtiendo la probabilidad en certeza.

Dos secuencias como ejemplo:

Secuencia empezada con el número 2713:

2713 || 4070 || 2035 || 3053 || 4580 || 2290 || 1145 || 1718 || 859 || 1289 || 1934 || 967 || 1451 || 2177 || 3266 || 1633 ||
2450 || 1225 || 1838 || 919 || 1379 || 2069 || 3104 || 1552 || 776 || 388 || 194 || 97 || 146 || 73 || 110 || 55 || 83 || 125 || 188 ||
94 || 47 || 71 || 107 || 161 || 242 || 121 || 182 || 91 || 137 || 206 || 103 || 155 || 233 || 350 || 175 || 263 || 395 || 593 || 890 ||
445 || 668 || 334 || 167 || 251 || 377 || 566 || 283 || 425 || 638 || 319 || 479 || 719 || 1079 || 1619 || 2429 || 3644 || 1822 ||
911 || 1367 || 2051 || 3077 || 4616 || 2308 || 1154 || 577 || 866 || 433 || 650 || 325 || 488 || 244 || 122 || 61 || 92 || 46 || 23 ||
35 || 53 || 80 || 40 || 20 || 10 || 5 || 8 || 4 || 2 || 1 ||

Los números en color verde son los impares B, siempre en puntos descendentes. Los números en color rojo son los impares C que están en puntos ascendentes y los números en color azul son impares C que están en puntos descendentes.

Secuencia empezada con el número 87499873:

87499873, 262499620, 131249810, 65624905, 196874716, 98437358, 49218679, 147656038, 73828019, 221484058,
110742029, 332226088, 166113044, 83056522, 41528261, 124584784, 62292392, 31146196, 15573098, 7786549,
23359648, 11679824, 5839912, 2919956, 1459978, 729989, 2189968, 1094984, 547492, 273746, 136873, 410620,
205310, 102655, 307966, 153983, 461950, 230975, 692926, 346463, 1039390, 519695, 1559086, 779543, 2338630,
1169315, 3507946, 1753973, 5261920, 2630960, 1315480, 657740, 328870, 164435, 493306, 246653, 739960,
369980, 184990, 92495, 277486, 138743, 416230, 208115, 624346, 312173, 936520, 468260, 234130, 117065,
351196, 175598, 87799, 263398, 131699, 395098, 197549, 592648, 296324, 148162, 74081, 222244, 111122, 55561,
166684, 83342, 41671, 125014, 62507, 187522, 93761, 281284, 140642, 70321, 210964, 105482, 52741, 158224,
79112, 39556, 19778, 9889, 29668, 14834, 7417, 22252, 11126, 5563, 16690, 8345, 25036, 12518, 6259, 18778, 9389,
28168, 14084, 7042, 3521, 10564, 5282, 2641, 7924, 3962, 1981, 5944, 2972, 1486, 743, 2230, 1115, 3346, 1673,
5020, 2510, 1255, 3766, 1883, 5650, 2825, 8476, 4238, 2119, 6358, 3179, 9538, 4769, 14308, 7154, 3577, 10732,
5366, 2683, 8050, 4025, 12076, 6038, 3019, 9058, 4529, 13588, 6794, 3397, 10192, 5096, 2548, 1274, 637, 1912, 956,
478, 239, 718, 359, 1078, 539, 1618, 809, 2428, 1214, 607, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232,
4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160,
80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Triángulos formados con las columnas de la tabla anterior:

[illegible][illegible][illegible][illegible]

[illegible]

$$a(n+2) = (5(1+n)(1+2n))/n - ((1+n)^2 a(n))/n^2 + ((-1-n-n^2) a(1+n))/n^2$$

Los números impares de las secuencias de la conjetura de Collatz.

Hay tres tipos de impares según la suma de sus dígitos:

Los de la forma $6n+5$ que sus dígitos suman 5, 2, 8.

Los de la forma $6n+1$ que sus dígitos suman 1, 7, 4.

Los de la forma $6n+3$ que sus dígitos suman 3, 9, 6.

Podemos aplicar dos fórmulas distintas para conocer todos los impares que llegarán a otro impar determinado. Siendo M el impar y es de la forma $6n+1$ la fórmula es $(M \cdot 4^n - 1)/3$ y si es de la forma $6n+5$, la fórmula es $(M \cdot 4^n - 2)/6$. Ningún impar llegará a otro impar de la forma $6n+3$.

Ejemplo: Si queremos saber todos los impares que llegarán a 2017 aplicaremos la fórmula de los impares cuyos dígitos suman 1, porque $2+0+1+7=10$ y $1+0=1$, o sea, $6n+1$, de esta forma: $(2017 \cdot 4^n - 1)/3$, obteniendo $a(1)=2689$, $a(2)=10757, \dots$

Ejemplo: Si queremos saber todos los impares que llegarán a 869 aplicaremos la fórmula de los impares cuyos dígitos suman 5, porque $8+6+9=23$ y $2+3=5$, o sea, $6n+5$, de esta forma: $(869 \cdot 4^n - 2)/6$, obteniendo $a(1)=579$, $a(2)=2317, \dots$

En cada fila: $a(n+1)=a(n) \cdot 4 + 1$.

M	Fórmula	n	1	2	3	4	5	
1	$(1 \cdot 4^n - 1)/3$	1	1	5	21	85	341	
5	$(5 \cdot 4^n - 2)/6$	3	3	13	53	213	853	
7	$(7 \cdot 4^n - 1)/3$	9	9	37	149	597	2389	
11	$(11 \cdot 4^n - 2)/6$	7	7	29	117	469	1877	
13	$(13 \cdot 4^n - 1)/3$	17	17	69	277	1109	4437	
17	$(17 \cdot 4^n - 2)/6$	11	11	45	181	725	2901	
19	$(19 \cdot 4^n - 1)/3$	25	25	101	405	1621	6485	
23	$(23 \cdot 4^n - 2)/6$	15	15	61	245	981	3925	
25	$(25 \cdot 4^n - 1)/3$	33	33	133	533	2133	8533	
29	$(29 \cdot 4^n - 2)/6$	19	19	77	309	1237	4949	

[illegible]

En cada columna, los números impares $a(n)$ que en las secuencias de Collatz llegan al impar m .

En las secuencias de Collatz aplicándoles $(3 \cdot a(1) + 1) / 2^n$.

En todas las columnas: $a(n+1)=a(n)*4+1$.

Diagrama con el desarrollo de una secuencia de Collatz empezada con el número 81.

[illegible]

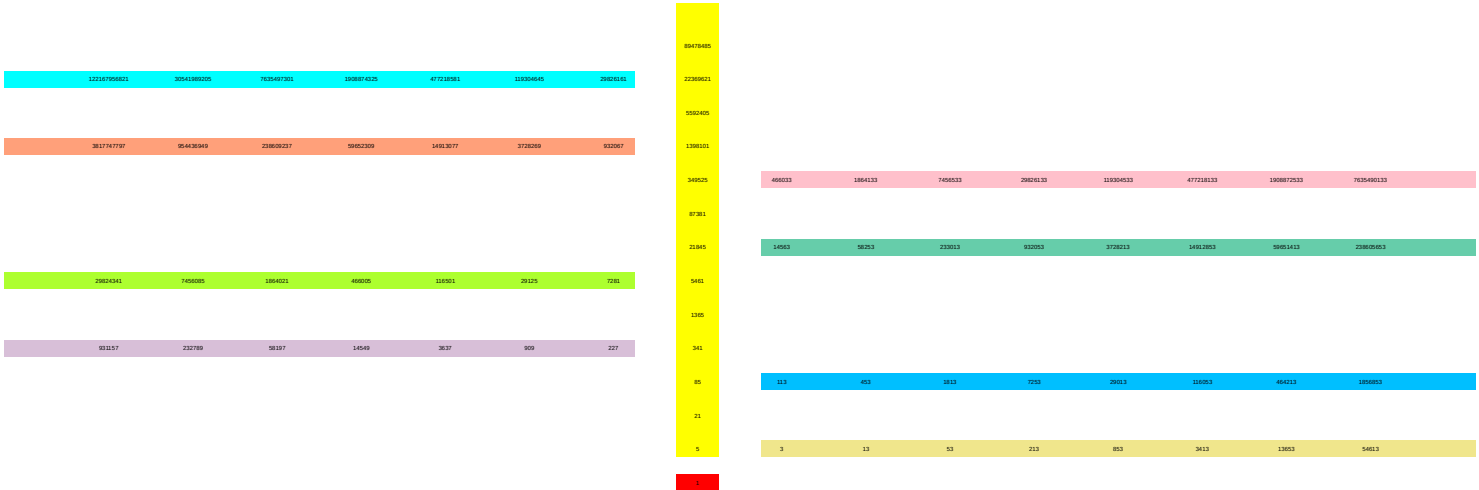
$$a(n) = (4^n - 1)/3 \implies 1, 5, 21, 85, 341, \dots$$

$$a(n) = 4^n \Rightarrow 4, 16, 64, 256, 1024, \dots$$

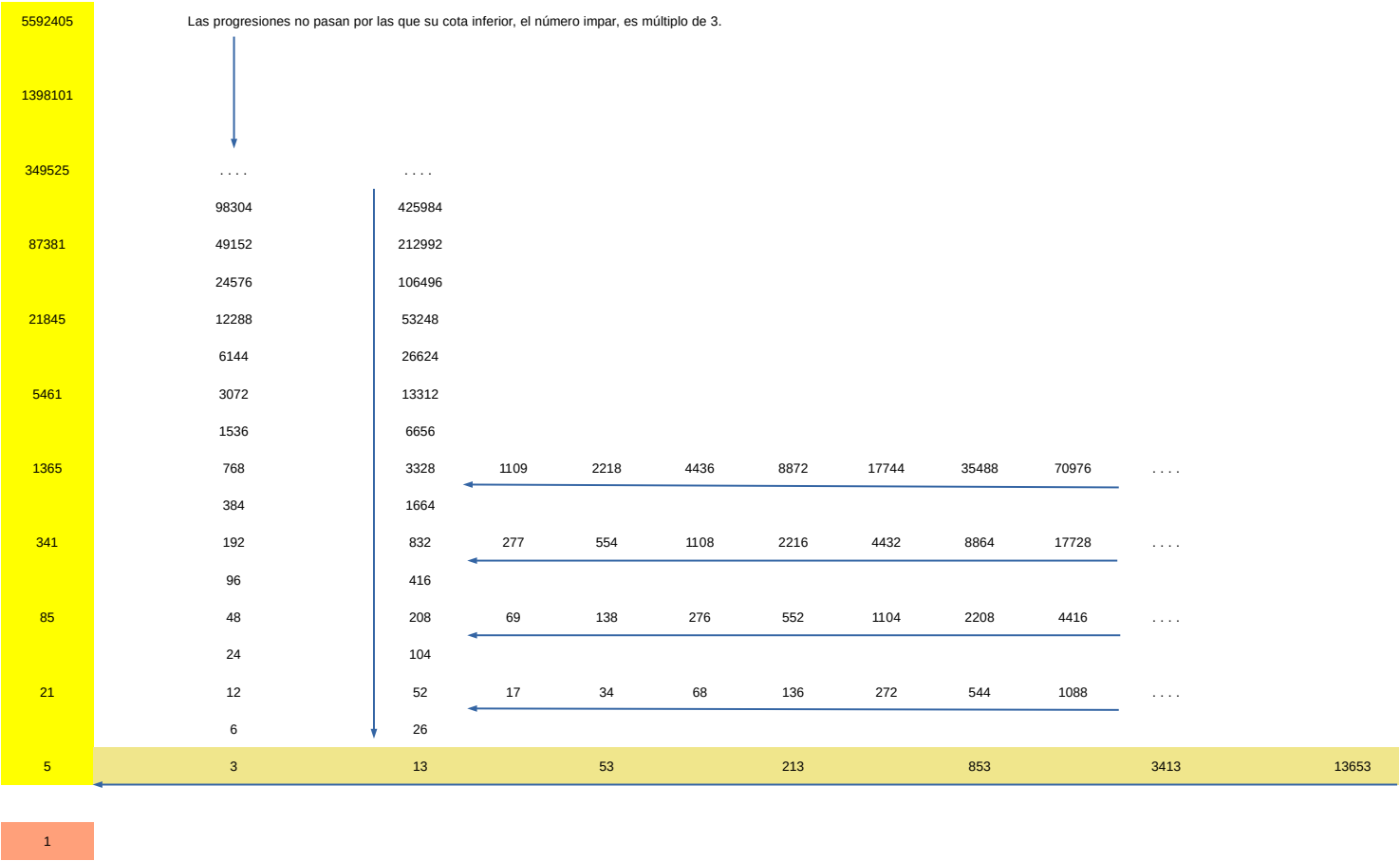
Ejemplo con $m=21$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} (-1 + 4^{-n} (1 + 3 m)) = -\frac{1}{3} \approx -0.333333$$

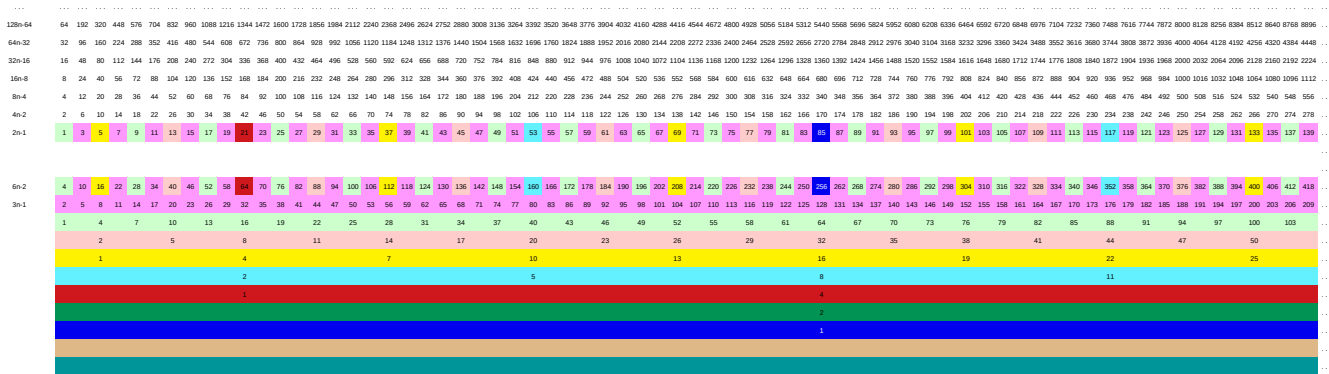
n	$\frac{1}{3} (4^{3-n} - 1)$	approximation
1	5	5
2	1	1
3	0	0
4	$-\frac{1}{4}$	-0.25
5	$-\frac{5}{16}$	-0.3125
6	$-\frac{21}{64}$	-0.328125
7	$-\frac{85}{256}$	-0.332031
8	$-\frac{341}{1024}$	-0.333008
9	$-\frac{1365}{4096}$	-0.333252
10	$-\frac{5461}{16384}$	-0.333313
11	$-\frac{21845}{65536}$	-0.333328
12	$-\frac{87381}{262144}$	-0.333332
13	$-\frac{349525}{1048576}$	-0.333333
14	$-\frac{1398101}{4194304}$	-0.333333
15	$-\frac{5592405}{16777216}$	-0.333333



A cada término de la sucesión central, los cuales llegan todos al 1, le llega también a cada uno de ellos otros términos de otras sucesiones. A cada término de estas también les llega otras sucesiones, etc, etc, formando un fractal difícil de imaginar y mucho menos hacerlo gráficamente aquí. Les llegan sucesiones a todos los términos que son de la forma $6n-5$ y $6n-1$, pero no les llega ninguna sucesión a ninguno de los términos de la forma $6n-3$. Al aplicar el algoritmo de Collatz a cualquier número impar, las sucesiones son decrecientes, o sea, de mayor a menor. En el gráfico vemos que la sucesión central que acaba en 5 todos sus términos acaban en 1. La sucesión que acaba en 3 todos sus términos acaban en 5. La sucesión que acaba en 113 todos sus términos acaban en 85, etc.



1398101								
349525								
	98304	425984	1736704	6979584	27951104			
87381	49152	212992	868352	3489792	13975552			
	24576	106496	434176	1744896	6987776			
21845	12288	53248	217088	872448	3493888			
	6144	26624	108544	436224	1746944			
5461	3072	13312	54272	218112	873472			
	1536	6656	27136	109056	436736			
1365	768	3328	13568	54528	218368			
	384	1664	6784	27264	109184			
341	192	832	3392	13632	54592			
	96	416	1696	6816	27296			
85	48	208	848	3408	13648			
	24	104	424	1704	6824			
21	12	52	212	852	3412			
	6	26	106	426	1706			
5	3	13	53	213	853	3413	13653	54613
	10	40	160	640	2560			
1	5	20	80	320	1280			
		10	40	160	640			
		5	20	80	320			
			10	40	160			
			5	20	80			
				10	40			
				5	20			
					10			
					5			



	Impares	4n-1	8n-7	16n-3	32n-27	64n-11	128n-107	256n-43	512n-427	1024n-171	2048n-1707
	Pares	12n-2	24n-20	48n-8	96n-80	192n-32	384n-320	768n-128	1536n-1280	3072n-512	6144n-5120
Número de divisiones necesarias para llegar al impar		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
										n(1) Será el 853	

Cuantas más sean las divisiones necesarias para llegar al impar, antes llega la sucesión al 1.

Los impares de la forma $4^n - (2^{(2n)+2})/6$, o sea todos los impares de la forma $(5 \cdot 4^n - 2)/6$ llegan a los impares de la forma $6n-1$ después de aplicarles $3n+1$ y las

divisiones sucesivas entre dos.

Hay tres tipos de impares según la suma de sus dígitos: Los de la forma $6n-1$ que sus dígitos suman 5, 2, 8. Los de la forma $6n-5$ que sus dígitos suman 1, 7, 4 y los

de la forma $6n-3$ que sus dígitos suman 3, 9, 6.

En el problema de Collatz, si aplicamos a cualquier impar $3n+1$ y las divisiones sucesivas entre dos llegará a otro impar pero de la misma forma que el primero, es

decir, $6n-1$ ó $6n-5$. Ningún impar llegará a otro impar de la forma $6n-3$.

Podemos aplicar dos fórmulas distintas para conocer todos los impares que llegarán a otro impar. Siendo M el impar y es de la forma $6n-5$ la fórmula es $(M \cdot 4^n - 1)/3$ y

si es de la forma $6n-1$, la fórmula es $(M \cdot 4^n - 2)/6$.

Ejemplo: Si queremos saber todos los impares que llegarán a 2017 aplicaremos la fórmula de los impares cuyos dígitos suman 1, porque $2+0+1+7=10$ y $1+0=1$, o sea,

$6n-5$, de esta forma: $(2017 \cdot 4^n - 1)/3$, obteniendo $a(1)=2689$, $a(2)=10757$, . . . infinito.

Ejemplo: Si queremos saber todos los impares que llegarán a 869 aplicaremos la fórmula de los impares cuyos dígitos suman 5, porque $8+6+9=23$ y $2+3=5$, o sea,

$6n-1$, de esta forma: $(869 \cdot 4^n - 2)/6$, obteniendo $a(1)=579$, $a(2)=2317$, . . . infinito.

	8-7=1	32-27=5	128-107=21	512-427=85	2048-1707=341
	8n-7	32n-27	128n-107	512n-427	2048n-1707
Diferencia en cada columna $2^n(2n+1)$	8	32	128	512	2048

M	Fórmula	n	1	2	3	4	5		Cálculo de los impares que llegan a los impares de la forma $6n-5$ (sus dígitos suman 1, 7, 4)
1	$(1^4n-1)/3$	1		5	21	85	341		Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 1 después de aplicarles el problema de Collatz
7	$(7^4n-1)/3$	9		37	149	597	2389		Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 7 después de aplicarles el problema de Collatz
13	$(13^4n-1)/3$	17		69	277	1109	4437		Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 13 después de aplicarles el problema de Collatz
19	$(19^4n-1)/3$	25		101	405	1621	6485		Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 19 después de aplicarles el problema de Collatz
25	$(25^4n-1)/3$	33		133	533	2133	8533		Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 25 después de aplicarles el problema de Collatz
.....									

$$(3^{\text{Impar}+1})/2^{2n}=M$$

Podemos seguir con los impares "M" de la forma $6n-5$ y calcular los impares que llegan a ellos.

M	Fórmula	n	1	2	3	4	5		Cálculo de los impares que llegan a los impares de la forma $6n-1$ (sus dígitos suman 5, 2, 8)
5	$(5^4n-2)/6$	3		13	53	213	853		Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 5 después de aplicarles el problema de Collatz
11	$(11^4n-2)/6$	7		29	117	469	1877		Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 11 después de aplicarles el problema de Collatz
17	$(17^4n-2)/6$	11		45	181	725	2901		Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 17 después de aplicarles el problema de Collatz
23	$(23^4n-2)/6$	15		61	245	981	3925		Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 23 después de aplicarles el problema de Collatz
29	$(29^4n-2)/6$	19		77	309	1237	4949		Hasta n infinito estos son los impares que llegan al 29 después de aplicarles el problema de Collatz
.....									

Podemos seguir con los impares "M" de la forma $6n-1$ y calcular los impares que llegan a ellos.

1, 5, 21, 85, 341, ..., $(4^n-1)/3$ son los impares que siempre acaban en 4, 2, 1 porque generan el 4, 16, 64, 256, 1024, ..., (4^n)

3, 13, 53, 213, 853, ..., $(5^4n-2)/6$ son los impares que llegan a 5 porque generan el 10, 40, 160, 640, ..., $5^2n(2n-1)$

$5^2n(2n-1)$ 10, 40, 160, 640, ...

$11^2n(2n-1)$ 22, 88, 352, 704, ...

$17^2n(2n-1)$ 34, 136, 272, 544, ...

8-7=1	32-27=5	128-107=21	512-427=85	2048-1707=341
8n-7	32n-27	128n-107	512n-427	2048n-1707
8	32	128	512	2048

M	Fórmula	n	1	2	3	4	5	
1	$(1^4n-1)/3$	1	1	5	21	85	341	
5	$(5^4n-2)/6$	3		13	53	213	853	
7	$(7^4n-1)/3$	9		37	149	597	2389	
11	$(11^4n-2)/6$	7		29	117	469	1877	
13	$(13^4n-1)/3$	17		69	277	1109	4437	
17	$(17^4n-2)/6$	11		45	181	725	2901	
19	$(19^4n-1)/3$	25		101	405	1621	6485	
23	$(23^4n-2)/6$	15		61	245	981	3925	
25	$(25^4n-1)/3$	33		133	533	2133	8533	
29	$(29^4n-2)/6$	19		77	309	1237	4949	
.....								

M	Fórmula	n	1	2	3	4	5	
1	$(1^4 \cdot n - 1)/3$	1	1	5	21	85	341	
5	$(5^4 \cdot n - 2)/6$	3	3	13	53	213	853	
7	$(7^4 \cdot n - 1)/3$	9	9	37	149	597	2389	
11	$(11^4 \cdot n - 2)/6$	7	7	29	117	469	1877	
13	$(13^4 \cdot n - 1)/3$	13	13	69	277	1109	4437	
17	$(17^4 \cdot n - 2)/6$	11	11	45	181	725	2901	
19	$(19^4 \cdot n - 1)/3$	25	25	101	405	1621	6485	
23	$(23^4 \cdot n - 2)/6$	15	15	61	245	981	3925	
25	$(25^4 \cdot n - 1)/3$	33	33	133	533	2133	8533	
29	$(29^4 \cdot n - 2)/6$	19	19	77	309	1237	4949	

En las secuencias obtenidas con el algoritmo de la conjetura de Collatz, hay términos que son números pares y números impares. Los números pares resultan de aplicar a un número impar $2n+1$ la operación del algoritmo $3 \cdot (2n+1) + 1$ y los números impares $2n+1$ resultan de aplicar la operación del algoritmo $2n/2^n$ a un número par $2n$.

n			k	1	2	3	4	5	6	7	8	...			k	1	2	3	4	5	6	...			k	1	2	3	4	5	6	...	
0	Los impares		2n-2	0	2	4	6	8	10	12	14	...	llegan a éstos en n divisiones entre 2		6n-5	1	7	13	19	25	31	...	segunda iteración				1	11	5	29	19	47	...
1			4n-1	3	7	11	15	19	23	27	31	...			6n-1	5	11	17	23	29	35	...					1	17	13	35	11	53	...
2			8n-7	1	9	17	25	33	41	49	57	...			6n-5	1	7	13	19	25	31	...					1	11	5	29	19	47	...
3			16n-3	13	29	45	61	77	93	109	125	...			6n-1	5	11	17	23	29	35	...					1	17	13	35	11	53	...
4			32n-27	5	37	69	101	133	165	197	229	...			6n-5	1	7	13	19	25	31	...					1	11	5	29	19	47	...
5			64n-11	53	117	181	245	309	373	437	501	...			6n-1	5	11	17	23	29	35	...					1	17	13	35	11	53	...
6			128n-107	21	149	277	405	533	661	789	917	...			6n-5	1	7	13	19	25	31	...					1	11	5	29	19	47	...
7			256n-43	213	469	725	981	1237	1493	1749	2005	...			6n-1	5	11	17	23	29	35	...					1	17	13	35	11	53	...
8			512n-427	85	597	1109	1621	2133	2645	3157	3669	...			6n-5	1	7	13	19	25	31	...					1	11	5	29	19	47	...
9			1024n-171	853	1877	2901	3925	4949	5973	6997	8021	...			6n-1	5	11	17	23	29	35	...					1	17	13	35	11	53	...
...			...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		...	...	...	...	...	...	...	...	...				1	11	5	29	19	47	...	

	k	1	2	3	4	5	6	...			k	1	2	3	4	5	6	...			k	1	2	3	4	5	6	...
		1	11	5	29	19	47	...	tercera iteración			1	13	5	53	17	5	...	cuarta iteración			1	5	1	5	13	1	...
		1	17	13	35	11	53	...				1	17	1	11	29	71	...				1	13	1	17	11	107	...
		1	11	5	29	19	47	...				1	13	5	53	17	5	...				1	5	1	5	13	1	...
		1	17	13	35	11	53	...				1	17	1	11	29	71	...				1	13	1	17	11	107	...
		1	11	5	29	19	47	...				1	13	5	53	17	5	...				1	5	1	5	13	1	...
		1	17	13	35	11	53	...				1	17	1	11	29	71	...				1	13	1	17	11	107	...
		1	11	5	29	19	47	...				1	13	5	53	17	5	...				1	5	1	5	13	1	...
		1	17	13	35	11	53	...				1	17	1	11	29	71	...				1	13	1	17	11	107	...
		1	11	5	29	19	47	...				1	13	5	53	17	5	...				1	5	1	5	13	1	...
		1	17	13	35	11	53	...				1	17	1	11	29	71	...				1	13	1	17	11	107	...
		1	11	5	29	19	47	...			1	13	5	53	17	5	...			1	5	1	5	13	1	...		
		1	17	13	35	11	53	...			1	17	1	11	29	71	...			1	13	1	17	11	107	...		

	k	1	2	3	4	5	6	...		k	1	2	3	4	5	6	...		k	1	2	3	4	5	6	...
	1	5	1	5	13	1	...			1	1	1	1	5	1	...			1	1	1	1	1	1	1	...
	1	13	1	17	11	107	...			1	5	1	13	17	161	...			1	1	1	5	13	121	...	
	1	5	1	5	13	1	...			1	1	1	1	5	1	...			1	1	1	1	1	1	1	...
	1	13	1	17	11	107	...			1	5	1	13	17	161	...			1	1	1	5	13	121	...	
	1	5	1	5	13	1	...			1	1	1	1	5	1	...			1	1	1	1	1	1	1	...
	1	13	1	17	11	107	...			1	5	1	13	17	161	...			1	1	1	5	13	121	...	
	1	5	1	5	13	1	...			1	1	1	1	5	1	...			1	1	1	1	1	1	1	...
	1	13	1	17	11	107	...			1	5	1	13	17	161	...			1	1	1	5	13	121	...	
	1	5	1	5	13	1	...			1	1	1	1	5	1	...			1	1	1	1	1	1	1	...
	1	13	1	17	11	107	...			1	5	1	13	17	161	...			1	1	1	5	13	121	...	
	1	5	1	5	13	1	...			1	1	1	1	5	1	...			1	1	1	1	1	1	1	...
	1	13	1	17	11	107	...			1	5	1	13	17	161	...			1	1	1	5	13	121	...	
	1	5	1	5	13	1	...			1	1	1	1	5	1	...			1	1	1	1	1	1	1	...
	1	13	1	17	11	107	...			1	5	1	13	17	161	...			1	1	1	5	13	121	...	
	1	5	1	5	13	1	...			1	1	1	1	5	1	...			1	1	1	1	1	1	1	...
	1	13	1	17	11	107	...			1	5	1	13	17	161	...			1	1	1	5	13	121	...	
	1	5	1	5	13	1	...			1	1	1	1	5	1	...			1	1	1	1	1	1	1	...
	1	13	1	17	11	107	...			1	5	1	13	17	161	...			1	1	1	5	13	121	...	

quinta iteración

sexta iteración

	k	1	2	3	4	5	6	...		k	1	2	3	4	5	6	...		k	1	2	3	4	5	6	...
	1	1	1	1	1	1	1	...			1	1	1	1	1	1	...			1	1	1	1	1	1	...
	1	1	1	5	13	121	...			1	1	1	1	5	91	...			1	1	1	1	1	137	...	
	1	1	1	1	1	1	...			1	1	1	1	1	1	...			1	1	1	1	1	1	...	
	1	1	1	5	13	121	...			1	1	1	1	5	91	...			1	1	1	1	1	137	...	
	1	1	1	1	1	1	...			1	1	1	1	1	1	...			1	1	1	1	1	1	...	
	1	1	1	5	13	121	...			1	1	1	1	5	91	...			1	1	1	1	1	137	...	
	1	1	1	1	1	1	...			1	1	1	1	1	1	...			1	1	1	1	1	1	...	
	1	1	1	5	13	121	...			1	1	1	1	5	91	...			1	1	1	1	1	137	...	
	1	1	1	1	1	1	...			1	1	1	1	1	1	...			1	1	1	1	1	1	...	
	1	1	1	5	13	121	...			1	1	1	1	5	91	...			1	1	1	1	1	137	...	
	1	1	1	1	1	1	...			1	1	1	1	1	1	...			1	1	1	1	1	1	...	
	1	1	1	5	13	121	...			1	1	1	1	5	91	...			1	1	1	1	1	137	...	

séptima iteración

Impares después del 137 hasta llegar al 1:

137	103	155	233	175	263	395	593	445
167	251	377	283	425	319	479	719	1079
1619	2429	911	1367	2051	3077	577	433	325
61	23	35	53	5	1			

A continuación, las diferencias entre los impares de la primera cuadrícula y los impares resultantes en la primera iteración:

$(4^n)n-R$		Diferencia							$2^{2n-1}n-R$		Diferencia						
$4n-1$		$+2n$	2	4	6	8	10	...	$8n-7$		$-(2n-2)$	0	2	4	6	8	...
$16n-3$		$-(10n-2)$	8	18	28	38	48	...	$32n-27$		$-(26n-22)$	4	30	56	82	108	...
$64n-11$	$\rightarrow 6n-1$	$-(58n-10)$	48	106	164	222	280	...	$128n-107$	$\rightarrow 6n-5$	$-(122n-102)$	20	142	264	386	508	...
$256n-43$		$-(250n-42)$	208	458	708	958	1208	...	$512n-427$		$-(506n-422)$	84	590	1096	1602	2108	...
$1024n-171$		$-(1018n-170)$	848	1866	2884	3902	4920	...	$2048n-1707$		$-(2042n-1706)$	336	2378	4420	6462	8504	...
...		...	...	...	...	...	...	...	...		...	...	...	...	...	...	...

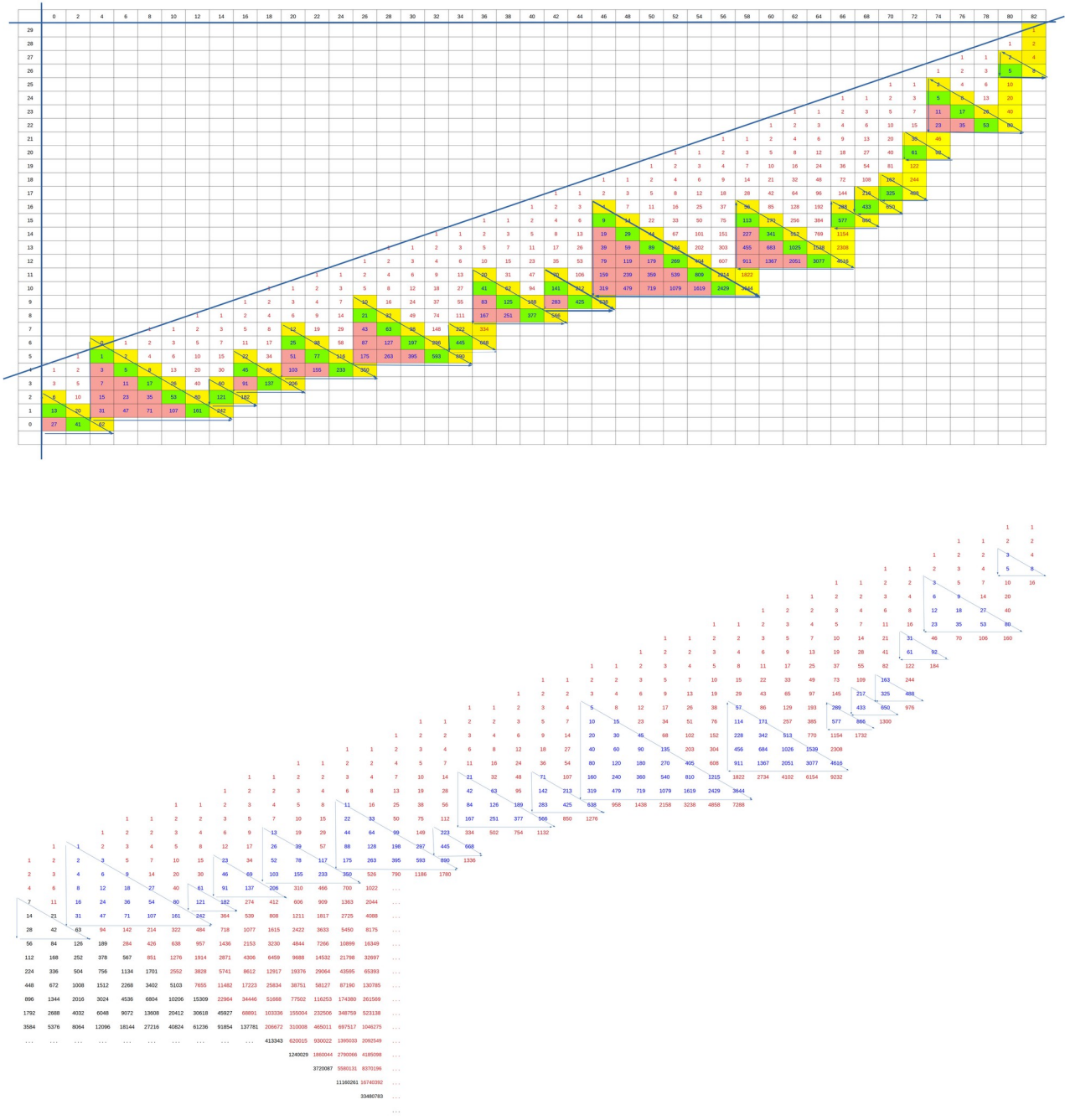
Los impares de la forma $4n-1$ son ascendentes, porque producen números pares que solamente se pueden dividir entre 2 una vez, resultando un número impar que es $2n$ mayor que el anterior.

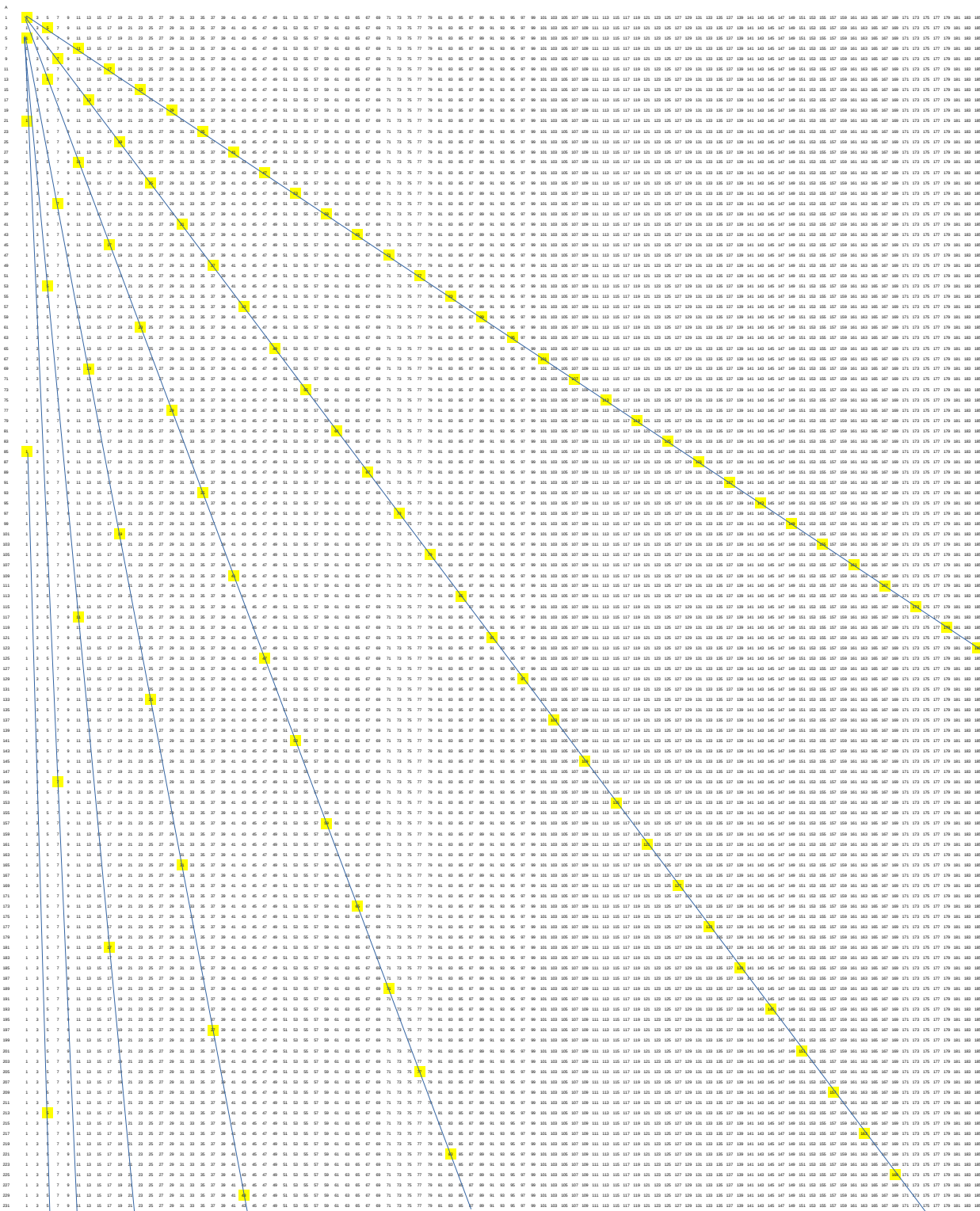
Los impares de la forma $4n-3$ son descendentes, porque producen números pares que admiten más divisiones entre 2 y los siguientes impares son menores.

A pesar de que existe la misma cantidad de números impares de la forma $4n-1$ y de la forma $4n-3$, los primeros producen pares que son siempre $2n$ mayores, mientras que los impares que resultan de los segundos son menores y lo son en las proporciones indicadas en el anagrama anterior, que van desde $2n-2$ a ∞ .

En la tabla siguiente comprobamos que en todos los ciclos de la secuencia los números impares de la forma $4n-1$ (color rojo) acaban en un último impar de la forma $4n-3$ (color verde), que al aplicarle la operación del algoritmo $3n+1$ produce un número par (color amarillo) que admite como mínimo dos divisiones entre 2, provocando que la secuencia sea descendente.

Esta tabla representa la secuencia iniciada con el número 27, que desde ese número sigue por las últimas filas de los triángulos o ciclos, hasta llegar al 1. Ha necesitado 82 pasos horizontales y 29 pasos verticales.







Los números impares $k(0)$ iteran a los números pares $k(1,2\dots)$ y a los números impares $k(0)$ en k divisiones entre 2.

De los 62 números impares,

31	iteran a otro impar mayor en una sola división entre 2.
16	iteran a otro impar menor en dos divisiones entre 2.
7	iteran a otro impar menor en tres divisiones entre 2.
4	“ “ “ “ cuatro “
2	“ “ “ cinco “
1	“ “ seis “
1	“ “ siete “

Los 31 impares que son $4m-1$ iteran a impares que son $6m-1$, aumentando en $2m$.
 Los 16 impares que son $8m-7$ iteran a impares que son $6m-5$, disminuyendo en $2m-2$.
 Los 7 impares que son $16n-3$ iteran a impares que son $6m-1$, disminuyendo en $10m-2$.
 Los 4 impares que son $32m-27$ iteran a impares que son $6m-5$, disminuyendo en $26m-22$.
 Los 2 impares que son $64m-11$ iteran a impares que son $6m-1$, disminuyendo en $58m-10$.
 El impar que es $128m-21$ itera a un impar que es $6m-5$, disminuyendo en $122n-16$.
 El impar que es $256m-43$ itera a un impar que es $6m-1$, disminuyendo en $250m-42$.

31	
$\sum_{n=1} 2n = 992$	31 números impares aumentan +992

16	
$\sum_{n=1} 2(n-1) = 240$	16 “ “ disminuyen -240

7	
$\sum_{n=1} 2(5n-1) = 266$	7 “ “ disminuyen -266

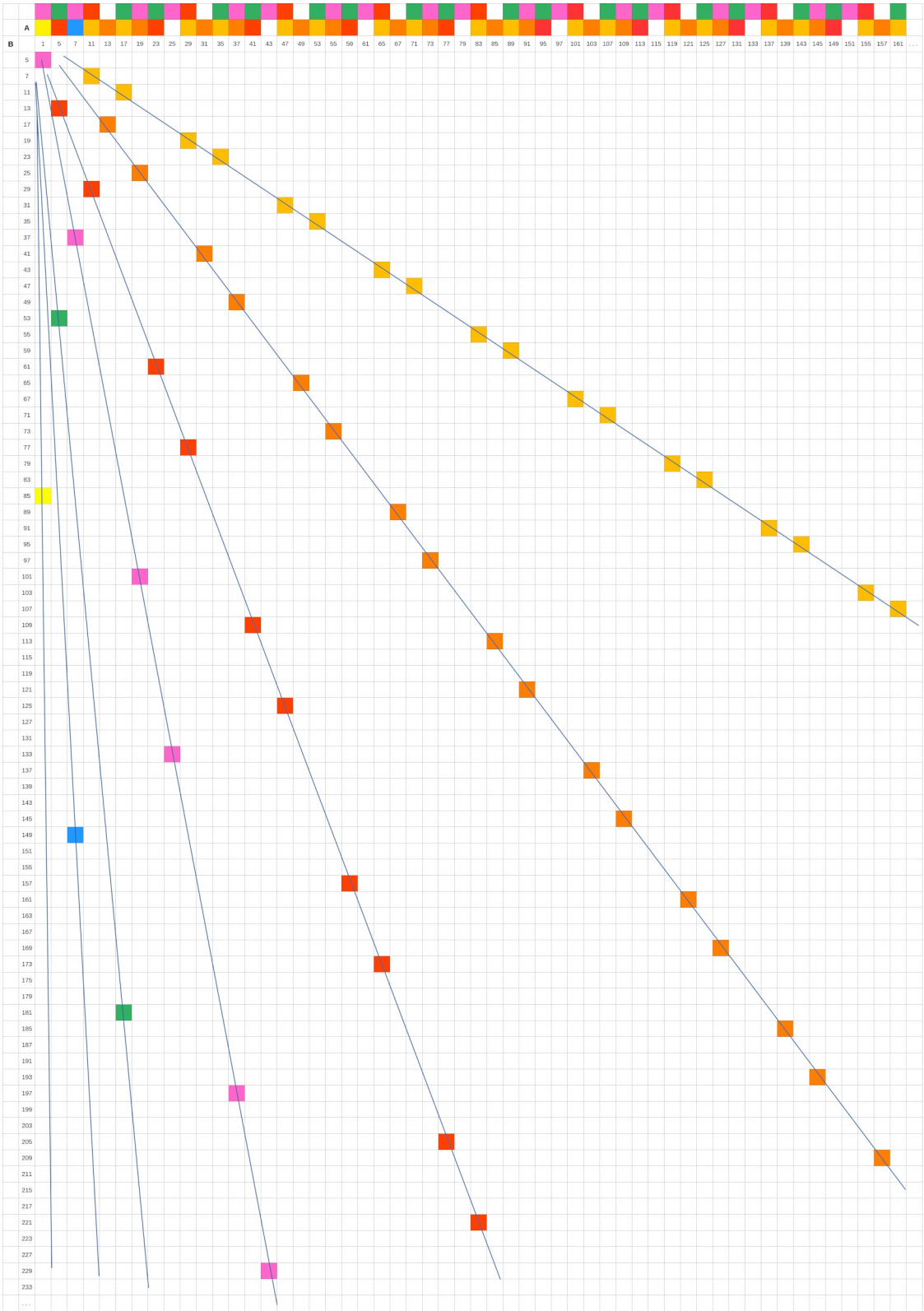
4	
$\sum_{n=1} 2(13n-11) = 172$	4 “ “ disminuyen -172

2	
$\sum_{n=1} 2(29n-5) = 154$	2 “ “ disminuyen -154

20	
	1 “ “ disminuye -20

84	
	1 “ “ disminuye -84

Los impares A que iteran a los impares B.



	A											
n												
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
4	341	853	2389	1877	4437	2901	6485	3925	8533	4949	10581	...
3	85	213	597	469	1109	725	1621	981	2133	1237	2645	...
2	21	53	149	117	277	181	405	245	533	309	661	...
1	5	13	37	29	69	45	101	61	133	77	165	...
0	1	3	9	7	17	11	25	15	33	19	41	...
B	1	5	7	11	13	17	19	23	25	29	31	...
	A(n)=1/6(B*4^n-2)			A(n)=1/3(B*4^n-1)								

I. Sucesiones eventualmente periódicas.

Miguel Cerdá Bennassar

Agosto de 2021

Resumen

Un algoritmo que define una función generadora de secuencias eventualmente periódicas, con los valores del ciclo elegibles y empezadas con cualquier número entero.

Palabras clave: Secuencias eventualmente periódicas, conjetura de Collatz.

Descripción

Todas las secuencias generadas con esta función serán eventualmente periódicas, cuyo ciclo podremos elegir asignando un valor a m .

Sean $k, m \in \mathbb{Z}$, se define este algoritmo como la función $f(k, m)$, tal que:

$$f(k, m) = \begin{cases} (k-m)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad,} \\ (3k+1+m)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases}$$

$\text{Dom } f(k, m) = (k + m) \geq 1$.

Para $\forall k, m \in \mathbb{Z}$, en un número finito de iteraciones, $k(n)=1-m$.

Propiedades

1 – Todas las sucesiones generadas serán eventualmente periódicas, $p_1=2-m$, $p_2=1-m$.

2 - Las secuencias con el mismo valor de $k+m$, tendrán igual número de elementos y la misma distancia entre ellos, que será igual a la distancia entre los valores de m .

$$k(n)-k_1(n)=m-m_1 \iff k+m=k_1+m_1$$

Ejemplos:	$k(37)+m(28) = 65$	37, 70, 21, 46, 9, 28, 0, -14, -21, -17, -11, -2, -15, -8, -18, -23, -20, -24, -26, -27.
	$k(243)+m(-178) = 65$	243, 276, 227, 252, 215, 234, 206, 192, 185, 189, 195, 204, 191, 198, 188, 183, 186, 182, 180, 179.
	$k(65)+m(0) = 65$	65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14, 7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

Las tres secuencias tienen 20 elementos.

3 – En todas las secuencias, la diferencia entre el primer elemento k y el último $k(n)$, es igual a $k+m-1$.

$$k - k(n) = k + m - 1$$

Matrices $M(n)$

Con los valores de k y de m , formamos una matriz con dos filas e infinitas columnas.

En la primera fila, los números enteros escritos ordenadamente, con los números positivos a la derecha del cero, que representan los posibles valores de k .

En la segunda fila, los números enteros escritos ordenadamente, con los números positivos a la izquierda del cero, que representan los valores de m .

Una parte de la matriz con los valores desde -5 hasta 7 para k y desde 6 hasta -6 para m :

k	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
m	...	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	...

Matriz $M(1)$, en la que $k+m=1$ en cada columna.

Una parte de la matriz con los valores desde 10 hasta 22 para k y desde 6 hasta -6 para m :

k	...	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	...
m	...	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	...

Matriz $M(16)$, porque en cada columna $k+m=16$.

Los elementos de las dos matrices son los mismos, pero en la matriz $M(16)$ se ha desplazado la primera fila hasta coincidir $k(16)$ con $m(0)$, para visualizar que en todas las columnas $k+m=16$.

Conjuntos $C(n)$

Todas las secuencias generadas con los valores de k y de m de cada columna de la matriz $M(n)$ tienen el mismo número de elementos y hay la misma distancia entre ellos.

Al conjunto de estas secuencias lo llamamos $C(n)$, donde $n=k+m$.

Ejemplo:

Con los valores de las columnas de la matriz $M(16)$, la función generará infinitas secuencias que formarán el conjunto $C(16)$.

$$C(16) \left\{ \begin{array}{l} (10, 2, -2, -4, -5); \\ (11, 3, -1, -3, -4); \\ (12, 4, 0, -2, -3); \\ (13, 5, 1, -1, -2); \\ (14, 6, 2, 0, -1); \\ (15, 7, 3, 1, 0); \\ (16, 8, 4, 2, 1); \\ (17, 9, 5, 3, 2); \\ (18, 10, 6, 4, 3); \\ (19, 11, 7, 5, 4); \\ (20, 12, 8, 6, 5); \\ (21, 13, 9, 7, 6); \\ (22, 14, 10, 8, 7); \end{array} \right\}$$

Existen infinitos resultados para $k+m$, que formarán infinitos conjuntos $C(n)$, con las mismas propiedades.

La conjetura de Collatz se cumplirá para todo valor de k , porque en todos los conjuntos $C(n)$ existe una secuencia generada con el valor de $m=0$ que acabará en $k(n)=1-m$, o sea 1. ■

Generador de sucesiones online: www.riodena.es

Miguel Cerdá Bennassar.

24 de Agosto de 2021

II. Sucesiones eventualmente periódicas.

Miguel Cerdá Bennassar

Agosto de 2021

Resumen

Un algoritmo que define una función generadora de secuencias eventualmente periódicas, con los valores del ciclo elegibles y empezadas con cualquier número entero.

Palabras clave

Secuencias eventualmente periódicas, conjetura de Collatz.

Descripción

Todas las secuencias generadas con esta función serán eventualmente periódicas, cuyo ciclo podremos elegir asignando un valor a m .

Sean $(k, m) \in \mathbb{Z}$, se define este algoritmo como la función $f(k, m)$, tal que:

$$f(k, m) = \begin{cases} (k-m)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad.} \\ (3k+1+m)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases}$$

Dominio $f(k, m) = (k + m) \geq 1$

Para $\forall (k, m) \in \mathbb{Z}$, en un número finito de iteraciones, la secuencia terminará en el número entero $k(n)$ que queramos, porque $k(n)=1-m$.

Ejemplos

Si queremos formar una secuencia que termine en 45, asignaremos a m el valor de -44 y aplicaremos la siguiente función, de forma iterada, hasta llegar a $k(n)=1-m$:

$$f(k, m) = \begin{cases} (k+44)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad.} \\ (3k-43)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases}$$

Porque el dominio de esta función es $(k+m) \geq 1 \rightarrow k \geq 45$.

Secuencia empezada con $k=74$, $m=-44$:

74, 59, 67, 79, 97, 124, 84, 64, 54, 49, 52, 48, 46, 45, 46, 45, . . .

Secuencia empezada con $k=12795$, $m=-44$:

12795, 19171, 28735, 43081, 64600, 32322, 16183, 24253, 36358, 18201, 27280, 13662, 6853, 10258, 5151, 7705, 11536, 5790, 2917, 4354, 2199, 3277, 4894, 2469, 3682, 1863, 2773, 4138, 2091, 3115, 4651, 6955, 10411, 15595, 23371, 35035, 52531, 78775, 118141, 177190, 88617, 132904, 66474, 33259, 49867, 74779, 112147, 168199, 252277, 378394, 189219, 283807, 425689, 638512, 319278, 159661, 239470, 119757, 179614, 89829, 134722, 67383, 101053, 151558, 75801, 113680, 56862, 28453, 42658, 21351, 32005, 47986, 24015, 36001, 53980, 27012, 13528, 6786, 3415, 5101, 7630, 3837, 5734, 2889, 4312, 2178, 1111, 1645, 2446, 1245, 1846, 945, 1396, 720, 382, 213, 298, 171, 235, 331, 475, 691, 1015, 1501, 2230, 1137, 1684, 864, 454, 249, 352, 198, 121, 160, 102, 73, 88, 66, 55, 61, 70, 57, 64, 54, 49, 52, 48, 46, 45, 46, 45, . . .

Para todo entero $k \geq 45$, la iteración bajo esta transformación, terminará en 46, 45.

Si queremos que la secuencia acabe en el número $k(n)=-100$, asignaremos a m el valor de 101 y la iteración bajo esta transformación, para todo número entero $k \geq -100$, terminará en -99, -100.

$$f(k,m) = \begin{cases} (k-101)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad.} \\ (3k+102)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases}$$

Porque el dominio de esta función es $(k+m) \geq 1 \rightarrow k \geq -100$.

Secuencia empezada con $k=21$, $m=101$:

21, -40, -9, -55, -78, -66, -48, -21, -61, -81, -91, -96, -93, -97, -99, -100, -99, -100, . . .

Secuencia empezada con $k=0$, $m=101$:

0, 51, -25, -63, -82, -72, -57, -79, -90, -84, -75, -88, -81, -91, -96, -93, -97, -99, -100, -99, -100, . . .

Conclusión

Cualquier número entero $k \in \mathbb{Z}$ del dominio, sometido a la transformación de la función de manera iterada, acabará siempre en $k(n) = 1-m$.

Con esta función podemos determinar el número entero al que llegará cada secuencia, después de un número finito de iteraciones, en función del valor que asignemos a $m \in \mathbb{Z}$, del dominio.

La conjetura de Collatz se cumplirá para todo valor de $k \geq 1$, porque todas las secuencias generadas con el valor de $m=0$, acabarán en $k(n)=1-m$, o sea, 1.

Generador de sucesiones online: www.riodena.es

Función de dos variables y sucesiones numéricas eventualmente periódicas.

Miguel Cerdá Bennassar

Septiembre de 2021

Resumen

Presento un algoritmo que define una función generadora de secuencias eventualmente periódicas, con los valores del ciclo elegibles y empezadas con cualquier número entero.

Palabras clave: Secuencias eventualmente periódicas, conjetura de Collatz.

Descripción

Todas las secuencias generadas con esta función serán eventualmente periódicas, cuyo ciclo podremos elegir asignando un valor a m .

Sean $(k, m) \in \mathbb{Z}$, se define este algoritmo como la función $f(k, m)$, tal que:

$$f(k, m) = \begin{cases} (k-m)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad.} \\ (3k+1+m)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases}$$

$\text{Dom } f(k, m) = (k+m) > 0$.

Para $\forall (k, m) \in \mathbb{Z}$, en un número finito de iteraciones, $k(n)=1-m$.

Propiedades

1 – Todas las sucesiones generadas serán eventualmente periódicas, de período 2, $p_1=2-m$, $p_2=1-m$.

2 - Las secuencias con el mismo valor de $k+m$, tendrán igual número de elementos y la misma distancia entre ellos, que será igual a la distancia entre los valores de m .

$$k(n)-k_1(n)=m-m_1 \iff k+m=k_1+m_1$$

Ejemplos:	$k(37)+m(28) = 65$	37, 70, 21, 46, 9, 28, 0, -14, -21, -17, -11, -2, -15, -8, -18, -23, -20, -24, -26, -27.
	$k(243)+m(-178) = 65$	243, 276, 227, 252, 215, 234, 206, 192, 185, 189, 195, 204, 191, 198, 188, 183, 186, 182, 180, 179.
	$k(65)+m(0) = 65$	65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14, 7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

Las tres secuencias tienen 20 elementos.

3 – En todas las secuencias, la diferencia entre el primer elemento k y el último $k(n)$, es igual a $k+m-1$.
 $k-k(n)=k+m-1$

Matrices $M(n)$

Con los valores de k y de m , formamos una matriz con dos filas e infinitas columnas.

En la primera fila, los números enteros escritos ordenadamente, con los números positivos a la derecha del cero, que representan los posibles valores de k .

En la segunda fila, los números enteros escritos ordenadamente, con los números positivos a la izquierda del cero, que representan los valores de m .

Una parte de la matriz con los valores desde -5 hasta 7 para k y desde 6 hasta -6 para m :

$$\begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \begin{pmatrix} \dots & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \dots & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \dots \end{pmatrix}$$

Matriz $M(1)$, en la que $k+m=1$ en cada columna.

Una parte de la matriz con los valores desde 10 hasta 22 para k y desde 6 hasta -6 para m :

$$\begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \begin{pmatrix} \dots & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & \dots \\ \dots & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \dots \end{pmatrix}$$

Matriz $M(16)$, porque en cada columna $k+m=16$.

Los elementos de las dos matrices son los mismos, pero en la matriz $M(16)$ se ha desplazado la primera fila hasta coincidir $k(16)$ con $m(0)$, para visualizar que en todas las columnas $k+m=16$.

Conjuntos $C(n)$

Todas las secuencias generadas con los valores de k y de m de cada columna de la matriz $M(n)$ tienen el mismo número de elementos y hay la misma distancia entre ellos.

Al conjunto de estas secuencias lo llamamos $C(n)$, donde $n=k+m$.

Ejemplo:

Con los valores de las columnas de la matriz $M(16)$, la función generará infinitas secuencias que formarán el conjunto $C(16)$.

$$C(16) \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ (10, 2, -2, -4, -5); \\ (11, 3, -1, -3, -4); \\ (12, 4, 0, -2, -3); \\ (13, 5, 1, -1, -2); \\ (14, 6, 2, 0, -1); \\ (15, 7, 3, 1, 0); \\ (16, 8, 4, 2, 1); \\ (17, 9, 5, 3, 2); \\ (18, 10, 6, 4, 3); \\ (19, 11, 7, 5, 4); \\ (20, 12, 8, 6, 5); \\ (21, 13, 9, 7, 6); \\ (22, 14, 10, 8, 7); \\ \dots \end{array} \right\}$$

Existen infinitos resultados para $k+m$, que formarán infinitos conjuntos $C(n)$, con las mismas propiedades.

Ejemplos

Si queremos formar una secuencia que termine en 45, asignaremos a m el valor de -44 y aplicaremos la siguiente función, de forma iterada, hasta llegar a $k(n)=1-m$:

$$f(k,m) = \begin{cases} (k+44)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad.} \\ (3k-43)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases}$$

Porque el dominio de esta función es $(k+m) > 0 \rightarrow k \geq 45$.

Secuencia empezada con $k=74, m=-44$:

74, 59, 67, 79, 97, 124, 84, 64, 54, 49, 52, 48, 46, 45, 46, 45, ...

Secuencia empezada con $k=12795, m=-44$:

12795, 19171, 28735, 43081, 64600, 32322, 16183, 24253, 36358, 18201, 27280, 13662, 6853, 10258, 5151, 7705, 11536, 5790, 2917, 4354, 2199, 3277, 4894, 2469, 3682, 1863, 2773, 4138, 2091, 3115, 4651, 6955, 10411, 15595, 23371, 35035, 52531, 78775, 118141, 177190, 88617, 132904, 66474, 33259, 49867, 74779, 112147, 168199, 252277, 378394, 189219, 283807, 425689, 638512, 319278, 159661, 239470, 119757, 179614, 89829, 134722, 67383, 101053, 151558, 75801, 113680, 56862, 28453, 42658, 21351, 32005, 47986, 24015, 36001, 53980, 27012, 13528, 6786, 3415, 5101, 7630, 3837, 5734, 2889, 4312, 2178, 1111, 1645, 2446, 1245, 1846, 945, 1396, 720, 382, 213, 298, 171, 235, 331, 475, 691, 1015, 1501, 2230, 1137, 1684, 864, 454, 249, 352, 198, 121, 160, 102, 73, 88, 66, 55, 61, 70, 57, 64, 54, 49, 52, 48, 46, 45, 46, 45, ...

Para todo entero $k \geq 45$, la iteración bajo esta transformación, terminará en 46, 45.

Si queremos que la secuencia acabe en el número $k(n)=-100$, asignaremos a m el valor de 101 y la iteración bajo esta transformación, para todo número entero $k \geq -100$, terminará en -99, -100.

$$f(k,m) = \begin{cases} (k-101)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad.} \\ (3k+102)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases}$$

Porque el dominio de esta función es $(k+m) > 0 \rightarrow k \geq -100$.

Secuencia empezada con $k=21, m=101$:

21, -40, -9, -55, -78, -66, -48, -21, -61, -81, -91, -96, -93, -97, -99, -100, -99, -100, ...

Secuencia empezada con $k=0, m=101$:

0, 51, -25, -63, -82, -72, -57, -79, -90, -84, -75, -88, -81, -91, -96, -93, -97, -99, -100, -99, -100, ...

Conclusión

Cualquier número entero $k \in \mathbb{Z}$ del dominio, sometido a la transformación de la función de manera iterada, acabará siempre en $k(n) = 1-m$.

Con esta función podemos determinar el número entero al que llegará cada secuencia, después de un número finito de iteraciones, en función del valor que asignemos a $m \in \mathbb{Z}$, del dominio.

La conjetura de Collatz se cumplirá para todo valor de k , porque en todos los conjuntos $C(n)$ existe una secuencia generada con el valor de $m=0$ que acabará en $k(n)=1-m$, o sea 1.

Calculador online de la función, generador de sucesiones: www.riodena.es

Definiciones

$k \in \mathbb{Z}$ es el primer elemento que empieza la secuencia.

$k(n) \in \mathbb{Z}$ es el último elemento al que converge la secuencia.

$m \in \mathbb{Z}$ es la variable que nos permite elegir el valor de $k(n)$.

$$k(n) = 1-m$$

$$k-k(n) = k+m-1$$

$$\text{Dominio} = (k+m) \geq 1$$

$$\text{Para } k < 0, m \geq |k|+1$$

$$\text{Para } m < 0, k \geq |m|+1$$

Ejemplo:

si $m=-33, k(n)=34 \rightarrow 75, 54, 65, 49, 41, 37, 35, 34, 35, 34, \dots$

$$k-k(n) = k+m-1 = 75+(-33)-1=41$$

En la siguiente matriz, los valores de k son los mínimos que pueden ser para formar una secuencia con el valor de m de su columna. También son los valores de $k(n)$, el último elemento al que convergen las secuencias generadas con el valor de m de su columna.

$k, k(n)$	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...	
m	...	...	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	...

Si queremos generar sucesiones que terminen en $k(n)=2$, tenemos que decir que $m=-1$, porque $k(n)=1-m$ y hacer los cálculos de la función:

$$f(k,m) = \begin{cases} (k+1)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad.} \\ (3k)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases}$$

$$\text{Dominio } f(k,m)=(k+m)>0$$

Todas las secuencias generadas con esta función, empezadas con $k \geq 2$, acabarán en 2. El período sera $p=2$, $p_1=3$, $p_2=2$.

Ejemplo $k(93)$, $m(-1)$:

93, 47, 24, 36, 54, 81, 41, 21, 11, 6, 9, 5, 3, 2, 3, 2, ...

Todas estas sucesiones tienen 10 elementos y la diferencia entre ellos es la misma:

$k(53), m(0)$ 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

$k(33), m(20)$ 33, 60, 20, 0, -10, -15, -12, -16, -18, -19.

$k(0), m(53)$ 0, 27, -13, -33, -43, -48, -45, -49, -51, -52.

$k(79), m(-26)$ 79, 106, 66, 46, 36, 31, 34, 30, 28, 27.

$k(-247), m(300)$ -247, -220, -260, -280, -290, -295, -292, -296, -298, -299.

$k(-1982), m(2035)$ -1982, -1955, -1995, -2015, -2025, -2030, -2027, -2031, -2033, -2034.

La función generará infinitas sucesiones con estas características, si en todas, $(k+m) \in \mathbb{Z}$, es igual.

$k(53), m(0)$ 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

$k(0), m(53)$ 0, 27, -13, -33, -43, -48, -45, -49, -51, -52.

La diferencia de m de las dos secuencias es la misma que de los elementos de las secuencias, que ocupan el mismo lugar.

$k(0), m(53)$, Cálculos:

$$(0 * 3 + 54) / 2 = 27$$

$$(27 - 53) / 2 = -13$$

$$(-13 - 53) / 2 = -33$$

$$(-33 - 53) / 2 = -43$$

$$(-43 - 53) / 2 = -48$$

$$(-48 * 3 + 54) / 2 = -45$$

$$(-45 - 53) / 2 = -49$$

$$(-49 - 53) / 2 = -51$$

$$(-51 - 53) / 2 = -52$$

Otros ejemplos:

Si $k=641$ y $m=9$:

641, 316, 479, 235, 113, 52, 83, 37, 14, 26, 44, 71, 31, 11, 1, -4, -1, -5, -7, -8.

Sumando m a cada elemento, resultan los elementos de la secuencia de Collatz, empezada con el número 650:

650, 325, 488, 244, 122, 61, 92, 46, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

Si $k=330$ y $m=-5$:

330, 493, 249, 127, 66, 97, 51, 28, 40, 58, 85, 45, 25, 15, 10, 13, 9, 7, 6.

Sumando m a cada elemento, resultan los elementos de la secuencia de Collatz, empezada con el número 325:

325, 488, 244, 122, 61, 92, 46, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

Diferencia entre las fórmulas del algoritmo de la conjetura de Collatz y las del algoritmo de Dosena:

Dosena

Collatz

Si es par: $(3n+m+1)/2$

Si es par: $n/2$

Si es impar: $(n-m)/2$

Si es impar: $(3n+1)/2$

Dosena - Collatz, números pares:

$$(3n+m+1)/2 - n/2 = n+1 \implies (3n+m+1)/2 - n/2 - n - 1 = 0 \implies m/2 - 1/2 = 0 \implies m=1$$

$$(3n+m+1)/2 - n/2 = n+2 \implies (3n+m+1)/2 - n/2 - n - 2 = 0 \implies m/2 - 3/2 = 0 \implies m=3$$

$$(3n+m+1)/2 - n/2 = n+3 \implies (3n+m+1)/2 - n/2 - n - 3 = 0 \implies m/2 - 5/2 = 0 \implies m=5$$

$$(3n+m+1)/2 - n/2 = n+4 \implies (3n+m+1)/2 - n/2 - n - 4 = 0 \implies m/2 - 7/2 = 0 \implies m=7$$

$$(3n+m+1)/2 - n/2 = n+5 \implies (3n+m+1)/2 - n/2 - n - 5 = 0 \implies m/2 - 9/2 = 0 \implies m=9$$

....

Collatz - Dosena, números impares:

$$(3n+1)/2 - (n-m)/2 = n+1 \implies (3n+1)/2 - (n-m)/2 - n - 1 = 0 \implies m/2 - 1/2 = 0 \implies m=1$$

$$(3n+1)/2 - (n-m)/2 = n+2 \implies (3n+1)/2 - (n-m)/2 - n - 2 = 0 \implies m/2 - 3/2 = 0 \implies m=3$$

$$(3n+1)/2 - (n-m)/2 = n+3 \implies (3n+1)/2 - (n-m)/2 - n - 3 = 0 \implies m/2 - 5/2 = 0 \implies m=5$$

$$(3n+1)/2 - (n-m)/2 = n+4 \implies (3n+1)/2 - (n-m)/2 - n - 4 = 0 \implies m/2 - 7/2 = 0 \implies m=7$$

$$(3n+1)/2 - (n-m)/2 = n+5 \implies (3n+1)/2 - (n-m)/2 - n - 5 = 0 \implies m/2 - 9/2 = 0 \implies m=9$$

....

Las diferencias de los números pares y las de los números impares, son equivalentes.

$$(3n+m+1)/2 - n/2 = (3n+1)/2 - (n-m)/2 = n+1$$

....

Cualquier secuencia de Collatz $\{C_n\}$ empezada con K_n , llegará al número 1, porque cualquier secuencia $\{S_n\}$ empezada con $K_n - m$, llegará al número $1 - m$. El valor de m es cualquier número impar, positivo o negativo.

m	pares	impares
-5	$(3k-4)/2$	$(k+5)/2$
-4	$(3k-3)/2$	$(k+4)/2$
-3	$(3k-2)/2$	$(k+3)/2$
-2	$(3k-1)/2$	$(k+2)/2$
-1	$3k/2$	$(k+1)/2$
0	$(3k+1)/2$	$(k-0)/2$
1	$(3k+2)/2$	$(k-1)/2$
2	$(3k+3)/2$	$(k-2)/2$
3	$(3k+4)/2$	$(k-3)/2$
4	$(3k+5)/2$	$(k-4)/2$
5	$(3k+6)/2$	$(k-5)/2$

Si m es par, la función de los números pares se aplica a los números impares y la función de los números impares se aplica a los números pares:

Ejemplo $m=4$:
 Si k es par: $(k-4)/2$
 Si k es impar: $(3k+5)/2$

Función general:

Escoger los valores de k y de m y aplicar la operación que corresponda.

$m \in \mathbb{Z}$
 $k \in \mathbb{N}$.

$$f(k) = \begin{cases} m \text{ par} & \begin{cases} k \text{ par} & (k-m)/2 \\ k \text{ impar} & (3k+1+m)/2 \end{cases} \\ m \text{ impar} & \begin{cases} k \text{ par} & (3k+1+m)/2 \\ k \text{ impar} & (k-m)/2 \end{cases} \end{cases}$$

Cada resultado obtenido es el valor de k para la siguiente iteración.

Para todo k se genera una sucesión que llega a $k_n = 1-m$ y acaba en un ciclo con $k(n-1) = 2-m$.

Las secuencias generadas por la conjetura de Collatz son solamente una de las infinitas opciones de la función general cuando $m=0$ y hay infinitas opciones, porque $m \in \mathbb{Z}$.

Otras sucesiones con el mismo número de elementos y con la diferencia de m en su valor:

$m=0$, 866, 433, 650, 325, 488, 244, 122, 61, 92, 46, 23, 35, 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

$m=1$, 865, 432, 649, 324, 487, 243, 121, 60, 91, 45, 22, 34, 52, 79, 39, 19, 9, 4, 7, 3, 1, 0.

$m=2$, 864, 431, 648, 323, 486, 242, 120, 59, 90, 44, 21, 33, 51, 78, 38, 18, 8, 3, 6, 2, 0, -1.

$m=3$, 863, 430, 647, 322, 485, 241, 119, 58, 89, 43, 20, 32, 50, 77, 37, 17, 7, 2, 5, 1, -1, -2.

$m=4$, 862, 429, 646, 321, 484, 240, 118, 57, 88, 42, 19, 31, 49, 76, 36, 16, 6, 1, 4, 0, -2, -3.

$m=5$, 861, 428, 645, 320, 483, 239, 117, 56, 87, 41, 18, 30, 48, 75, 35, 15, 5, 0, 3, -1, -3, -4.

$m=6$, 860, 427, 644, 319, 482, 238, 116, 55, 86, 40, 17, 29, 47, 74, 34, 14, 4, -1, 2, -2, -4, -5.

...

**Algoritmo generador de secuencias eventualmente periódicas,
con el ciclo elegible.**

Miquel Cerdà Bennassar
Octubre de 2021

Resumen

Se presenta un algoritmo generador de secuencias eventualmente periódicas, de período $p=2$, cuyos valores $p(1)$ y $p(2)$ pueden ser elegidos.

Palabras clave

Generador de secuencias, sucesiones numéricas,
ciclos elegibles, secuencias eventualmente periódicas.

Definición

Sea $k \in \mathbb{Z}$ el primer elemento de cada secuencia, sobre el que se itera la función.

Sea $m \in \mathbb{Z}$ la variable que nos permite elegir el ciclo de cada secuencia.

Se define el algoritmo como la función $f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$:

$$f(k,m) = \begin{cases} (k-m)/2, & \text{si } (k,m) \text{ son de la misma paridad.} \\ (3k+m+1)/2, & \text{si } (k,m) \text{ son de distinta paridad.} \end{cases}$$

Dom $f(k,m) = (k+m) > 0$

$k < 0, m > |k|$

$m < 0, k > |m|$

Para $\forall (k,m) \in \mathbb{Z}$, en un número finito de iteraciones, las secuencias serán periódicas y alcanzarán el ciclo $(2-m, 1-m)$.

Para evitar el ciclo, se dice que todas las secuencias acabarán en $k(n)=1-m$.

Para cada valor de k se generan infinitas secuencias con cada valor de m y para cada valor de m se generan infinitas secuencias con cada valor de k .

Ejemplos:

Se han seleccionado ejemplos de secuencias formadas con pocos elementos.

Para generar una secuencia que acabe en 20, calcular $1-m=20$, $m=-19$.

Porque $k > |-19|$, para este ejemplo, la secuencia empezará por $k=471$.

Secuencia generada con $k=471$, $m=-19$:

471, 245, 132, 189, 104, 147, 83, 51, 35, 27, 23, 21, 20, ...

Cálculos:

$$\begin{aligned}(471 - -19) / 2 &= 245 \\(245 - -19) / 2 &= 132 \\(132 * 3 + 1 + -19) / 2 &= 189 \\(189 - -19) / 2 &= 104 \\(104 * 3 + 1 + -19) / 2 &= 147 \\(147 - -19) / 2 &= 83 \\(83 - -19) / 2 &= 51 \\(51 - -19) / 2 &= 35 \\(35 - -19) / 2 &= 27 \\(27 - -19) / 2 &= 23 \\(23 - -19) / 2 &= 21 \\(21 - -19) / 2 &= 20\end{aligned}$$

Secuencia generada con $k=-7$, $m=21$:

-7, -14, -10, -4, 5, -8, -1, -11, -16, -13, -17, -19, -20, ...

Cálculos:

$$\begin{aligned}(-7 - 21) / 2 &= -14 \\(-14 * 3 + 1 + 21) / 2 &= -10 \\(-10 * 3 + 1 + 21) / 2 &= -4 \\(-4 * 3 + 1 + 21) / 2 &= 5 \\(5 - 21) / 2 &= -8 \\(-8 * 3 + 1 + 21) / 2 &= -1 \\(-1 - 21) / 2 &= -11 \\(-11 - 21) / 2 &= -16 \\(-16 * 3 + 1 + 21) / 2 &= -13 \\(-13 - 21) / 2 &= -17 \\(-17 - 21) / 2 &= -19 \\(-19 - 21) / 2 &= -20\end{aligned}$$

Cuando el resultado de la suma de las variables (k, m) es el mismo, las secuencias generadas con esos valores tendrán las siguientes propiedades:

1 – Todas tendrán el mismo número de elementos.

2 - La diferencia entre cada elemento será la misma en todas las secuencias.

3 - La diferencia entre los elementos de dos secuencias será igual que la diferencia entre los valores de la variable m que han generado las mismas secuencias.

$$k(n) - k_1(n) = m - m_1 \iff k + m = k_1 + m_1$$

Ejemplos:

$$k(37) + m(28) = 65 \quad 37, 70, 21, 46, 9, 28, 0, -14, -21, -17, -11, -2, -15, -8, -18, -23, -20, -24, -26, -27.$$

$$k(243) + m(-178) = 65 \quad 243, 276, 227, 252, 215, 234, 206, 192, 185, 189, 195, 204, 191, 198, 188, 183, 186, 182, 180, 179.$$

$$k(65) + m(0) = 65 \quad 65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14, 7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.$$

Las tres secuencias tienen 20 elementos.

La diferencia entre dos elementos consecutivos es la misma en las tres secuencias.

La diferencia entre un elemento de una secuencia y el mismo elemento de otra secuencia es la misma que la diferencia de las variables (m) de esas secuencias.

Todas las secuencias con igual valor de $k+m$, en el mismo número de iteraciones acabarán en $k(n)=1-m$.

Mayor facilidad de cálculo de las secuencias de la Conjetura de Collatz con números muy grandes. Porque esas secuencias se generan con $m=0$, no es necesario comprobar si la secuencia empezada con $k=G$ (número muy grande), acabará en 1, ya que si la secuencia con $k=G/a$ y $m=G/b$ llega hasta $k(n)=1-G/a$, la secuencia de Collatz empezada con $k=G$, acabará en $1-m=1$.

1871, 933, 464, 699, 347, 171, 83, 39, 17, 6, 12, 21, 8, 15, 5, 0, 3, -1, -3, -4

1872, 934, 465, 700, 348, 172, 84, 40, 18, 7, 13, 22, 9, 16, 6, 1, 4, 0, -2, -3

1873, 935, 466, 701, 349, 173, 85, 41, 19, 8, 14, 23, 10, 17, 7, 2, 5, 1, -1, -2

1874, 936, 467, 702, 350, 174, 86, 42, 20, 9, 15, 24, 11, 18, 8, 3, 6, 2, 0, -1

1875, 937, 468, 703, 351, 175, 87, 43, 21, 10, 16, 25, 12, 19, 9, 4, 7, 3, 1, 0

1876, 938, 469, 704, 352, 176, 88, 44, 22, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1

1877, 939, 470, 705, 353, 177, 89, 45, 23, 12, 18, 27, 14, 21, 11, 6, 9, 5, 3, 2

1878, 940, 471, 706, 354, 178, 90, 46, 24, 13, 19, 28, 15, 22, 12, 7, 10, 6, 4, 3

1879, 941, 472, 707, 355, 179, 91, 47, 25, 14, 20, 29, 16, 23, 13, 8, 11, 7, 5, 4

$$(938-2)/3=312$$

$$(704-2)/3=234$$

$$(176-2)/3=58$$

$$(44-2)/3=14$$

$$(11-2)/3=3$$

$$(17-2)/3=5$$

$$(26-2)/3=8$$

$$(20-2)/3=6$$

$$(5-2)/3=1$$

$$(8-2)/3=2$$

$$(2-2)/3=0$$

En la secuencia que acaba en 1, los números 938, 704, 176, 44, 11, 17, 26, 20, 5, 8, 2, son de la forma $3n+2$, cuando los valores de n son 312, 234, 58, 14, 3, 5, 8, 6, 1, 2, 0.

A los números que son $3n+2$ convergen todos los números de los triángulos $T(n)$.

**Algoritmo generador de secuencias de números enteros,
eventualmente periódicas, con el ciclo elegible.**

Miguel Cerdá Bennassar - Octubre de 2021

Resumen

Presento un algoritmo que define una función generadora de secuencias eventualmente periódicas, con los valores del ciclo elegibles y empezadas con cualquier número entero.

Palabras clave

Secuencias eventualmente periódicas, generador de secuencias, sucesiones numéricas, ciclos de las secuencias.

Descripción

Todas las secuencias generadas con esta función serán eventualmente periódicas, cuyo ciclo podremos elegir asignando un valor a m .

Sean $(k, m) \in \mathbb{Z}$, se define este algoritmo como la función $f(k)$, tal que:

$$f(k) = \begin{cases} (k-m)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad.} \\ (3k+1+m)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases}$$

$\text{Dom } f(k) = (k+m) > 0$.

Para $\forall (k, m) \in \mathbb{Z}$, en un número finito de iteraciones, $k(n)=1-m$.

Propiedades

1 – Todas las sucesiones generadas serán eventualmente periódicas, de período 2, $p_1=2-m$, $p_2=1-m$.

2 - Las secuencias con el mismo valor de $k+m$, tendrán igual número de elementos y la misma distancia entre ellos, que será igual a la distancia entre los valores de m .

$$k(n)-k_1(n)=m-m_1 \iff k+m=k_1+m_1$$

Ejemplos:	$k(37)+m(28) = 65$	37, 70, 21, 46, 9, 28, 0, -14, -21, -17, -11, -2, -15, -8, -18, -23, -20, -24, -26, -27.
	$k(243)+m(-178) = 65$	243, 276, 227, 252, 215, 234, 206, 192, 185, 189, 195, 204, 191, 198, 188, 183, 186, 182, 180, 179.
	$k(65)+m(0) = 65$	65, 98, 49, 74, 37, 56, 28, 14, 7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1.

Las tres secuencias tienen 20 elementos.

3 – En todas las secuencias, la diferencia entre el primer elemento k y el último $k(n)$, es igual a $k+m-1$.

$$k - k(n) = k + m - 1$$

Matrices $M(n)$

En la primera fila, los números enteros escritos ordenadamente, con los números positivos a la derecha del cero, que representan los posibles valores de k .

En la segunda fila, los números enteros escritos ordenadamente, con los números positivos a la izquierda del cero, que representan los valores de m .

Una parte de la matriz con los valores desde -5 hasta 7 para k y desde 6 hasta -6 para m :

$$\begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \begin{pmatrix} \dots & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \dots & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \dots \end{pmatrix}$$

Matriz $M(1)$, en la que $k+m=1$ en cada columna.

Una parte de la matriz con los valores desde 10 hasta 22 para k y desde 6 hasta -6 para m :

$$\begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \begin{pmatrix} \dots & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & \dots \\ \dots & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \dots \end{pmatrix}$$

Matriz $M(16)$, porque en cada columna $k+m=16$.

Los elementos de las dos matrices son los mismos, pero en la matriz $M(16)$ se ha desplazado la primera fila hasta coincidir $k(16)$ con $m(0)$, para visualizar que en todas las columnas $k+m=16$.

Conjuntos $C(n)$

Todas las secuencias generadas con los valores de k y de m de cada columna de la matriz $M(n)$ tienen el mismo número de elementos y hay la misma distancia entre ellos.

Al conjunto de estas secuencias lo llamamos $C(n)$, donde $n=k+m$.

Ejemplo:

Con los valores de las columnas de la matriz $M(16)$, la función generará infinitas secuencias que formarán el conjunto $C(16)$.

$$C(16) \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ (10, 2, -2, -4, -5); \\ (11, 3, -1, -3, -4); \\ (12, 4, 0, -2, -3); \\ (13, 5, 1, -1, -2); \\ (14, 6, 2, 0, -1); \\ (15, 7, 3, 1, 0); \\ (16, 8, 4, 2, 1); \\ (17, 9, 5, 3, 2); \\ (18, 10, 6, 4, 3); \\ (19, 11, 7, 5, 4); \\ (20, 12, 8, 6, 5); \\ (21, 13, 9, 7, 6); \\ (22, 14, 10, 8, 7); \\ \dots \end{array} \right\}$$

Existen infinitos resultados para $k+m$, que formarán infinitos conjuntos $C(n)$, con las mismas propiedades.

Ejemplos

Si queremos formar una secuencia que termine en 45, asignaremos a m el valor de -44 y aplicaremos la siguiente función, de forma iterada, hasta llegar a $k(n)=1-m$:

$$f(k) = \begin{cases} (k+44)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad.} \\ (3k-43)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases}$$

Porque el dominio de esta función es $(k+m) > 0 \rightarrow k \geq 45$.

Secuencia empezada con $k=74, m=-44$:

74, 59, 67, 79, 97, 124, 84, 64, 54, 49, 52, 48, 46, 45, 46, 45, ...

Secuencia empezada con $k=12795, m=-44$:

12795, 19171, 28735, 43081, 64600, 32322, 16183, 24253, 36358, 18201, 27280, 13662, 6853, 10258, 5151, 7705, 11536, 5790, 2917, 4354, 2199, 3277, 4894, 2469, 3682, 1863, 2773, 4138, 2091, 3115, 4651, 6955, 10411, 15595, 23371, 35035, 52531, 78775, 118141, 177190, 88617, 132904, 66474, 33259, 49867, 74779, 112147, 168199, 252277, 378394, 189219, 283807, 425689, 638512, 319278, 159661, 239470, 119757, 179614, 89829, 134722, 67383, 101053, 151558, 75801, 113680, 56862, 28453, 42658, 21351, 32005, 47986, 24015, 36001, 53980, 27012, 13528, 6786, 3415, 5101, 7630, 3837, 5734, 2889, 4312, 2178, 1111, 1645, 2446, 1245, 1846, 945, 1396, 720, 382, 213, 298, 171, 235, 331, 475, 691, 1015, 1501, 2230, 1137, 1684, 864, 454, 249, 352, 198, 121, 160, 102, 73, 88, 66, 55, 61, 70, 57, 64, 54, 49, 52, 48, 46, 45, 46, 45, ...

Para todo entero $k \geq 45$, la iteración bajo esta transformación, terminará en 46, 45.

Si queremos que la secuencia acabe en el número $k(n)=-100$, asignaremos a m el valor de 101 y la iteración bajo esta transformación, para todo número entero $k \geq -100$, terminará en -99, -100.

$$f(k) = \begin{cases} (k-101)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de la misma paridad.} \\ (3k+102)/2, & \text{si } k \text{ y } m \text{ son de distinta paridad.} \end{cases}$$

Porque el dominio de esta función es $(k+m) > 0 \rightarrow k \geq -100$.

Secuencia empezada con $k=21, m=101$:

21, -40, -9, -55, -78, -66, -48, -21, -61, -81, -91, -96, -93, -97, -99, -100, -99, -100, . . .

Secuencia empezada con $k=0, m=101$:

0, 51, -25, -63, -82, -72, -57, -79, -90, -84, -75, -88, -81, -91, -96, -93, -97, -99, -100, -99, -100, . . .

Conclusión

Cualquier número entero $k \in \mathbb{Z}$ del dominio, sometido a la transformación de la función de manera iterada, acabará siempre en $k(n) = 1-m$.

Con esta función podemos determinar el número entero al que llegará cada secuencia, después de un número finito de iteraciones, en función del valor que asignemos a $m \in \mathbb{Z}$, del dominio.

La conjetura de Collatz se cumplirá para todo valor de k , porque en todos los conjuntos $C(n)$ existe una secuencia generada con el valor de $m=0$ que acabará en $k(n)=1-m$, o sea 1.

Calculador online de la función, generador de sucesiones: www.riodena.es

Miguel Cerdá Bennassar.
Octubre de 2021

dosena@riodena.com

OPCIONES DE REPARTO DE (C) ENTRE (A) Y (B)

Miguel Cerdá Bennassar – Febrero 2023

Resumen

La finalidad de este argumento es repartir un número natural (c) entre (a) y (b), conocer el número de opciones (n) únicas para hacerlo y calcular los valores de (a) y de (b). Evidentemente (c) también es el resultado de la suma de (a) y de (b), pero tenemos que verlo como una consecuencia del reparto, no como un fin.

CONJUNTO FINITO

Reparto o distribución de C, un número natural par ≥ 2 , entre A y B en sus N opciones posibles y únicas para hacerlo.

Las opciones (n) $N\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, (c-2)/2\}$ $|N|=c/2$

Los valores de (a) $A\{(c/2)-n, (c/2)-n, \dots, 1\}$ $|A|=c/2$

Los valores de (b) $B\{(c/2)+n, (c/2)+n, \dots, (c-1)\}$ $|B|=c/2$

El valor de (c) $C\{c, c, c, \dots, c\}$ $|C|=c/2$

Todos los elementos cumplen:

La igualdad $a+n = b-n = c/2$
 $a+2n = b = (c+2n)/2$

La congruencia $a \equiv b \equiv c/2 \pmod{n}$ $a \equiv b \equiv (c-1) \equiv 1 \pmod{2}$

Si (c) es un número par, la diferencia entre cualquier número de (a) y cualquier número de (b), es igual a la suma de sus valores de (n).

La diferencia de dos números, los dos de (a) o los dos de (b), es igual a la diferencia de sus valores de (n).

Si la suma de dos números cualesquiera (a) y (b) es menor que (c) y le sumamos la diferencia de sus valores de (n), entonces resulta igual a (c).

Si la suma de dos números cualesquiera (a) y (b) es mayor que (c) y le restamos la diferencia de sus valores de (n), entonces resulta igual a (c).

Desarrollo ilustrativo de $C=36$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
b	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
c	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36

Todas las (n) opciones son ciertas porque todos sus elementos cumplen la congruencia y las tres igualdades.

Reparto o distribución de C, un número natural impar ≥ 3 , entre A y B en sus N opciones posibles y únicas para hacerlo.

Las opciones (n) $N\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, (c-3)/2\} |N|=(c-1)/2$

Los valores de (a) $A\{(c-2n-1)/2, \dots, 1\} |A|=(c-1)/2$

Los valores de (b) $B\{(c+2n+1)/2, \dots, (c-1)\} |B|=(c-1)/2$

El valor de (c) $C\{c, c, c, \dots, c\} |C|=(c-1)/2$

Todos los elementos cumplen:

La igualdad $a+n = b-n-1 = (c-1)/2$
 $a+2n+1=b=(c+2n+1)/2$

La congruencia $a \equiv (b-1) \equiv (c-1)/2 \pmod{n}$ $a \equiv (b-1) \equiv (c-1)/2 \equiv 1 \pmod{2}$

Si (c) es un número impar, la diferencia entre cualquier número de (a) y cualquier número de (b), es igual a la suma de sus valores de (n) más 1.

La diferencia de dos números, los dos de (a) o los dos de (b), es igual a la diferencia de sus valores de (n).

Si la suma de dos números cualesquiera (a) y (b) es menor que (c) y le sumamos la diferencia de sus valores de (n), entonces resulta igual a (c).

Si la suma de dos números cualesquiera (a) y (b) es mayor que (c) y le restamos la diferencia de sus valores de (n), entonces resulta igual a (c).

Desarrollo ilustrativo de $C=39$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
b	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
c	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39

Todas las (n) opciones son ciertas porque todos sus elementos cumplen la congruencia y las tres igualdades

CONJUNTO INFINITO

Continuando los valores (n), las opciones de (a) son el cero y los números enteros negativos y se forma otro conjunto infinito, porque las (n) opciones son infinitas.

Para (c) par:

n	0	1	...	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	...
a	8	7	...	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	...
b	8	9	...	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	...
c	16	16	...	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	...

Todas las (n) opciones son ciertas porque todos sus elementos cumplen la congruencia y las tres igualdades.

Las opciones (n) $N\{c/2, (c+2)/2, (c+4)/2, \dots\}$

Los valores de (a) $A\{0, -1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$

Los valores de (b) $B\{c, c+1, c+2, c+3, \dots\}$

El valor de (c) $C\{c, c, c, c, \dots, c\}$

Todos los elementos cumplen:

La igualdad $a+n = b-n = c/2$

La congruencia $b \equiv c/2 \pmod{n}$

Para (c) impar:

n	0	1	...	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	...
a	13	12	...	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	...
b	14	15	...	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	...
c	27	27	...	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	...

Todas las (n) opciones son ciertas porque todos sus elementos cumplen la congruencia y las tres igualdades.

Las opciones (n) $N\{(c-1)/2, (c+1)/2, (c+3)/2, \dots\}$

Los valores de (a) $A\{0, -1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$

Los valores de (b) $B\{c, c+1, c+2, \dots\}$

El valor de (c) $C\{c, c, c, \dots, c\}$

Todos los elementos cumplen:

La igualdad $a+2n+1 = b = (c+2n+1)/2$

La congruencia $(b-1) \equiv (c-1)/2 \pmod{n}$

Cualquier número natural (c) se puede repartir entre (a) y (b) con no más de (c/2) opciones posibles si (c) es un número par, o con no más de (c-1)/2 opciones posibles si (c) es un número impar. Sin embargo, el mismo número se puede representar en infinitas opciones (n) como diferencia de dos números enteros.

ALGUNOS REPARTOS

1) Un cuadrado puede expresarse como la suma de dos cuadrados.

En el reparto o descomposición del número natural par $c(100)$ entre (a) y (b) también números naturales, tenemos $c/2$ opciones de hacerlo, de $n(0)$ hasta $n(49)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...	48	49
a	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	...	2	1
b	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	...	98	99
c	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	...	100	100

Todas las (n) opciones son ciertas porque cumplen la congruencia y las igualdades necesarias.

En la opción $n(14)$, los tres términos son segundas potencias, $a(36)$, $b(64)$ y $c(100)$, y se cumple la triple igualdad y también la congruencia.

$$\begin{aligned}
 &c = \text{un número par} & c^2 &= ((c^2+4)/4)^2 - ((c^2-4)/4)^2 & \text{donde } c = c^2, a = a^2 \text{ y } b = b^2 \\
 &b = (c^2-4)/4 \\
 &c = (c^2+4)/4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &a = \text{un número impar} & c^2 &= ((c^2+1)/2)^2 - ((c^2-1)/2)^2 \\
 &b = (c^2-1)/2 \\
 &c = (c^2+1)/2
 \end{aligned}$$

2) En el conjunto infinito, el cuadrado de cualquier número natural ≥ 3 , puede ser la diferencia de dos cuadrados.

$$(z^2 = -x^2 + y^2). \quad \text{donde } c = z^2, a = x^2 \text{ y } b = y^2$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
a	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	...
b	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	...
c	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	...

3) Un cubo se puede expresar como suma de tres cuadrados.

(suma de los dos términos del conjunto finito con (a) del conjunto infinito). Consideraremos que (a)

del conjunto infinito son números enteros positivos.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...	28	29	30	31	32	33	34	...	91	92	93	94	95	...
a	30	29	28	27	26	25	24	23	...	2	1	0	-1	-2	-3	-4	...	-61	-62	-63	-64	-65	...
b	31	32	33	34	35	36	37	38	...	59	60	61	62	63	64	65	...	122	123	124	125	126	...
c	61	61	61	61	61	61	61	61	...	61	61	61	61	61	61	61	...	61	61	61	61	61	...

$$25 + 36 + 64 = 125$$

4) Un cubo no puede expresarse como la suma de dos cubos.

En otro ejemplo de reparto o descomposición del número natural impar $c(729)$ entre (a) y (b) también números naturales, tenemos $(c-3)/2$ opciones de hacerlo, de $n(0)$ hasta $n(363)$.

n	0	1	2	3	4	5		147	148		358	359	360	361	362	363
a	364	363	362	361	360	359		217	216		6	5	4	3	2	1
b	365	366	367	368	369	370		512	513		723	724	725	726	727	728

Todas las (n) opciones son ciertas porque cumplen la congruencia y las igualdades necesarias.

En la opción $n(147)$, $a(217)$ y $b(512)$ y en la opción $n(148)$, $a(216)$ y $b(513)$.

En ambas opciones, siendo $c(729)$ una tercera potencia, solamente uno de los dos términos (a) ó (b) es también una tercera potencia.

El otro término no puede serlo porque no cumplirá la triple igualdad ni tampoco la congruencia y porque no existe ningún tercer cubo (a) o (b) cuya diferencia con x^3 o y^3 sea igual a $2n$ ó $2n+1$, si z^3 es un número par o impar.

En todas las (n) opciones (b) recibe $2n+1$ más que (a), y en los cubos: 1^3+2n+1 , 2^3+2n+1 , 3^3+2n+1 , ... y $(z-1)^3+2n+1$ en la última. Lo que reciba (b) no será nunca igual al cubo de un número, $(z-1)^3$, $(z-2)^3$, $(z-3)^3$, ... (1^3) , porque $2n+1$ nunca es suficiente como diferencia de dos cubos.

La distancia entre esos números siempre es mayor que $2n+1$, excepto para $z^3-(z-1)^3$ que es menor, por lo que no se cumplirán las igualdades ni la congruencia. Un cubo no se puede descomponer en dos cubos. Esto es así para cualquier opción de reparto con potencias ≥ 3 .

En el conjunto (D) en el que pretendamos repartir o distribuir un cubo (z^3) en dos cubos (x^3) e (y^3), las opciones en las que esto podría ser posible serían desde $n(0)$ hasta la opción $n((z-1)^3-z^3/2)$ si (z^3) es par o desde $n(0)$ hasta $n((z-1)^3-(z^3+1)/2)$, si (z^3) es impar.

En esta última (n) opción, (b) es $(z-1)^3$, que es el último cubo que puede haber. Entonces (a) sería $z^3-(z-1)^3$, por lo que también podemos descartar esa (n) opción de (a), pues la diferencia $z^3-(z-1)^3$, no es un cubo.

[illegible]

Y en el conjunto infinito, donde $c = -a^2 + b^2$, $b = b^2$ y $a = a^2$

n	0	1	2	...	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	...
a	6	5	4	...	-25	-26	-27	-28	-29	-30	-31	-32	-33	-34	-35	-36	-37	...
b	7	8	9	...	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	...
c	13	13	13	...	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	...

7) Con términos de ambos conjuntos, cualquier número impar mayor que 5 puede expresarse como suma de tres números primos.

(suma de los dos términos del conjunto finito con (a) del conjunto infinito).

Consideraremos que (a) del conjunto infinito son números enteros positivos.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
a	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	
b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
c	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	

$2 + 2 + 1 = 5$, $2 + 2 + 3 = 7$, $3 + 7 + 7 = 17$, $3 + 7 + 13 = 23$, $7 + 11 + 13 = 31$, ...

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
a	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	
b	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
c	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	

$3 + 3 + 1 = 7$, $3 + 3 + 3 = 9$, $3 + 3 + 5 = 11$, $3 + 5 + 11 = 19$, $5 + 11 + 11 = 27$, ...

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
a	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	
b	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
c	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	

$$7 + 7 + 3 = 17, \quad 7 + 7 + 5 = 19, \quad 3 + 11 + 3 = 17, \quad 3 + 11 + 5 = 19, \quad 3 + 11 + 7 = 21, \dots$$

8) Cualquier número par y mayor que 2 se puede expresar como suma de dos números primos.

Cualquier número par y mayor que 2 se puede expresar de manera infinita como diferencia de dos números primos en el conjunto infinito.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	...
a	12	11	10	9	8	7	6	5	4	...	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	...
b	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	...
c	24	24	24	24	24	24	24	24	24	...	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	...

9) Cualquier número primo ≥ 7 puede ser expresado como la suma de tres números primos.

(suma de los dos términos del conjunto finito con (a) del conjunto infinito). Consideraremos que (a) del conjunto infinito son números enteros positivos.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	...
a	12	11	10	9	8	7	6	5	4	...	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	...
b	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	...
c	24	24	24	24	24	24	24	24	24	...	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	...

$$11 + 13 + 5 = 29, \quad 7 + 17 + 5 = 29, \quad 7 + 17 + 7 = 31, \quad 11 + 13 + 7 = 31$$

10) Todo número impar se puede poner como suma de una potencia de dos y un número primo.

Todo número impar se puede poner de manera infinita como diferencia de una potencia de dos y un número primo, en el conjunto infinito.

Un número primo puede expresarse como la suma de otro número primo y un múltiplo de 2:

(suma de los dos términos del conjunto finito con (a) del conjunto infinito). Consideraremos que (a) del conjunto infinito son números enteros positivos.

n	0	1	...	12	13	14	...	45	46	47	...	57	58	59	...	177	178	179	...	561	562	...
a	50	49	...	38	37	36	...	5	4	3	...	-7	-8	-9	...	-127	-128	-129	...	-511	-512	...
b	51	52	...	63	64	65	...	96	97	98	...	108	109	110	...	228	229	230	...	612	613	...
c	101	101	...	101	101	101	...	101	101	101	...	101	101	101	...	101	101	101	...	101	101	...

$$37 + 72 = 109, \quad 37 + 192 = 229, \quad 97 + 12 = 109, \quad 97 + 132 = 229 \dots$$

11) Un número primo p es expresable como suma de dos cuadrados si y sólo si $p = 2$ ó $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Un número primo p es expresable como suma de dos cuadrados a y b si $a \equiv b-1 \equiv (p-1)/2 \pmod{n}$.

Un número primo p es expresable como diferencia de dos cuadrados.

0	1	2	3	4	5	6	7	...	28	29	30	31	32	33	34	...	91	92	93	94	95	...
30	29	28	27	26	25	24	23	...	2	1	0	-1	-2	-3	-4	...	-61	-62	-63	-64	-65	...
31	32	33	34	35	36	37	38	...	59	60	61	62	63	64	65	...	122	123	124	125	126	...
61	61	61	61	61	61	61	61	...	61	61	61	61	61	61	61	...	61	61	61	61	61	...

En cada opción (n), $a \equiv b \pmod{n}$ y $\pmod{2}$

$$2a \equiv c \pmod{n} \text{ y } \pmod{2}$$

$$2b \equiv c \pmod{n} \text{ y } \pmod{2}$$

Si (c) es un número par, la diferencia entre cualquier número de (a) y cualquier número de (b), es igual a la suma de sus valores de (n).

Si (c) = z^2 , (a) = x^2 y (b) = y^2 , resulta que $y^2 - x^2 = y^2 - (z^2/2) + (z^2/2) - x^2$.

Si (c) es un número impar, la diferencia entre cualquier número de (a) y cualquier número de (b), es igual a la suma de sus valores de (n) más 1:

Si (c) = z^2 , (a) = x^2 y (b) = y^2 , resulta que $y^2 - x^2 = y^2 - (z^2/2) + (z^2/2) - x^2 + 1$.

En ambos casos, la diferencia de dos números, los dos de (a) o los dos de (b), es igual a la diferencia de sus valores de (n).

Si $(c) = z^2$, $(a) = x^2$ y $(b) = y^2$, resulta que $X^2 - x^2 = x^2 - (X^2/2) + (X^2/2) - x^2$,

$$Y^2 - y^2 = y^2 - (Y^2/2) + (Y^2/2) - y^2$$

Si la suma de dos números cualesquiera (a) y (b) es menor que (c) y le sumamos la diferencia de sus valores de (n), entonces resulta igual a (c).

Si $x^2 + y^2 < z^2$ par, entonces $x^2 + y^2 + (y^2 - (z^2/2) + (z^2/2) - x^2) = z^2$

Si $x^2 + y^2 < z^2$ impar, entonces $x^2 + y^2 + (y^2 - (z^2/2) + (z^2/2) - x^2 + 1) = z^2$

Si la suma de dos números cualesquiera (a) y (b) es mayor que (c) y le restamos la diferencia de sus valores de (n), entonces resulta igual a (c).

Si $x^2 + y^2 > z^2$ par, entonces $x^2 + y^2 - (y^2 - (z^2/2) + (z^2/2) - x^2) = z^2$

Si $x^2 + y^2 > z^2$ impar, entonces $x^2 + y^2 - (y^2 - (z^2/2) + (z^2/2) - x^2 + 1) = z^2$

Para que la suma de dos cubos (a) y (b) sea igual a otro cubo (c), hay que restar o sumar los valores de (n).

MI DEMOSTRACION DE LA CONJETURA DE COLLATZ

Miguel Cerdá Bennassar - Febrero 2023

Resumen

Desde hace mucho tiempo, los matemáticos han estado fascinados por la idea de que los números puedan ser entendidos a través de patrones y regularidades. La raíz digital de un número es una herramienta interesante para explorar estos patrones.

La raíz digital de un número entero se define como la suma repetida de sus dígitos hasta que solo queda un dígito. Por ejemplo, la raíz digital de 12345 es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ y $1 + 5 = 6$.

En este escrito, se analizan las propiedades de la raíz digital de los números y se busca una posible conexión con las secuencias de la Conjetura de Collatz. La Conjetura de Collatz es un famoso problema sin resolver en matemáticas que se refiere a una secuencia de números obtenidos a partir de un número inicial y sucesivamente aplicando una serie de operaciones simples. Se cree que todas las secuencias de la Conjetura de Collatz eventualmente convergen a un ciclo de números repetidos, pero aún no se ha demostrado.

Este escrito se enfoca en explorar la posible conexión entre la raíz digital de los números y las secuencias de la Conjetura de Collatz. Específicamente, se investiga si hay algún patrón o regularidad en la raíz digital de los números en las secuencias de la Conjetura de Collatz. Si se encontrara una conexión entre estos dos conceptos, podría tener implicaciones importantes en nuestra comprensión de los números y su comportamiento.

En conclusión, este estudio es un paso importante en la exploración de los patrones y regularidades de los números y su posible conexión con la Conjetura de Collatz. Esperamos que este estudio abra nuevas líneas de investigación y contribuya al avance del conocimiento en matemáticas.

Palabras clave

Raíz digital, conjetura de Collatz, secuencia de Collatz.

1. Introducción

La raíz digital de un número es la suma de sus dígitos. Si la suma resulta un número con dos o más dígitos, el proceso se repite hasta obtener un número de un solo dígito. Este último número es la raíz digital del número original. Por ejemplo, el número 123 tiene una raíz digital de 6 ($1 + 2 + 3 = 6$). Para el número 12345, su raíz digital es 6 ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, y $1 + 5 = 6$). En definitiva, la raíz digital es el resultado final de repetir el proceso de sumar los dígitos hasta obtener un número de un solo dígito.

La raíz digital de los números naturales es una forma eficiente de comprimir y representar información numérica. Es una herramienta útil en criptografía y seguridad informática y se utiliza en algoritmos de cifrado para proteger la información sensible. Sirve para verificar la integridad de los datos transmitidos, detectando cambios no autorizados en la información. Se utiliza para generar números aleatorios y claves seguras y es un componente importante en la autenticación y verificación de identidad en línea. Proporciona una base para el estudio de algoritmos de búsqueda y ordenamiento y ayuda en el estudio de patrones y regularidades en secuencias numéricas.

La raíz digital se puede utilizar en algoritmos de cifrado como una forma de proteger la información sensible al generar una representación resumida y segura de un número o dato. Por ejemplo, la raíz digital se puede utilizar en el cifrado RSA, uno de los algoritmos de cifrado más comúnmente utilizados en la seguridad de la información. En este caso, la raíz digital se utiliza para generar claves públicas y privadas, que a su vez se utilizan para cifrar y descifrar mensajes sensibles. La raíz digital también se puede utilizar en otros algoritmos de cifrado, como en la firma digital, para garantizar la autenticidad y la integridad de la información transmitida. En la informática, la raíz digital es un algoritmo utilizado en la verificación de la integridad de datos, como en el cálculo de checksums y en la codificación de errores.

En la teoría de números, la raíz digital se utiliza para describir la estructura de los números y para investigar sus propiedades. La clasificación de números basada en sus raíces digitales se hace separando los números en diferentes grupos dependiendo de la suma de sus dígitos. La importancia radica en que esta clasificación puede utilizarse para analizar y agrupar patrones en los datos numéricos, lo que puede ser útil en diversas aplicaciones como el análisis de datos, la investigación matemática y la resolución de problemas.

En resumen, la raíz digital es un concepto matemático que tiene una amplia gama de aplicaciones prácticas y teóricas en diferentes disciplinas y campos, y su importancia radica en su capacidad para medir la magnitud de un número y para clasificar números en grupos.

Teorema de la raíz digital: El teorema de la raíz digital establece que la raíz digital de un número es un número con un solo dígito si y solo si el número es divisible por 9.

Propiedad de la raíz digital módulo 9: La propiedad de la raíz digital módulo 9 establece que la raíz digital de un número es igual al resto obtenido al dividir el número por 9.

Algunas de las razones por las que la raíz digital ayuda a encontrar relaciones y propiedades matemáticas incluyen:

Simplificación: La raíz digital reduce un número a un solo dígito, lo que facilita su comparación y análisis con otros números.

Clasificación: La raíz digital permite clasificar los números en grupos según sus propiedades, lo que facilita la identificación de patrones y relaciones entre ellos.

Modularidad: La raíz digital está estrechamente relacionada con el cálculo módulo 9, lo que permite investigar la estructura de los números y encontrar relaciones y propiedades matemáticas utilizando técnicas de teoría de números.

2. La raíz digital de los números y su relación con las secuencias de la Conjetura de Collatz.

La conjetura de Collatz es un problema matemático que se refiere a un cálculo iterativo que se aplica a un número natural inicial. A partir de ese número, la conjetura afirma que siempre se llega a 1, independientemente del número inicial elegido.

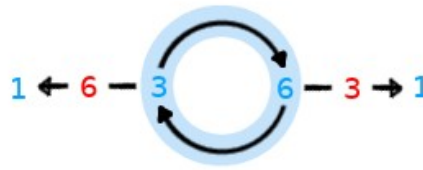
La función de la conjetura de Collatz:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n + 1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

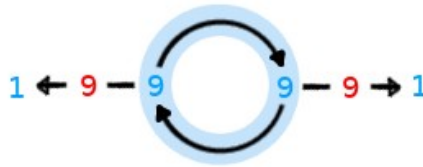
A continuación, gráficamente, las transformaciones de los números al aplicarles las operaciones de la función y su raíz digital.

Los números de color azul son los valores de la raíz digital de los números pares y los de color rojo son los valores de la raíz digital de los números impares. Los vectores indican el sentido de las transformaciones de los números en cada iteración.

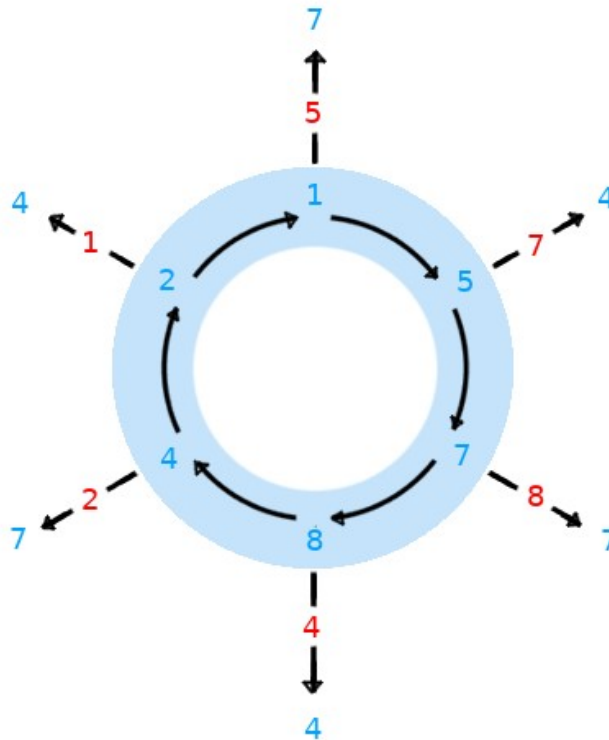
Grupo 1 donde
iteran los números
rd3, rd6



Grupo 2 donde
iteran los números
rd9



Grupo 3 donde
iteran los números
rd1, rd2, rd4
rd5, rd7, rd8



Axioma 1: Todos los números pares e impares de los grupos 1 y 2 llegarán a números pares con raíz digital 1.

Axioma 2: Todos los números pares e impares del grupo 3 llegarán a números pares con raíz digital 4 y 7.

Axioma 3: Todos los números pares con raíz digital 7 llegarán a números pares con raíz digital 4.

Axioma 4: Todos los números pares con raíz digital 4 llegarán a números impares con raíz digital 1.

Axioma 5: Todos los números llegarán a números impares con raíz digital 1.

Prueba: Inevitablemente, en una iteración, la secuencia llegará al menor de esos números y entrará en el ciclo 4, 2, 1, porque no hay otra opción y no existe otro ciclo posible.

*LA CONJETURA DE COLLATZ interpretada con la teoría de grafos
y las propiedades de la raíz digital de los números: un enfoque analítico.*

Miguel Cerdá Bennassar – Febrero de 2023

Resumen

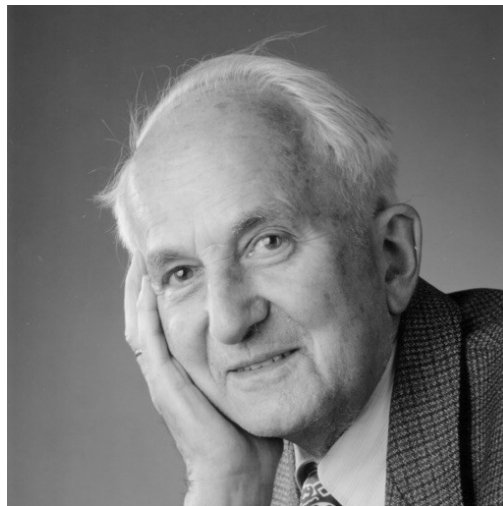
En este escrito presento un estudio del problema de Collatz y su conjetura utilizando la teoría de grafos y las propiedades de la raíz digital de los números naturales.

Palabras clave: Conjetura de Collatz, problema $3n+1$, secuencia numérica, sucesión de números, raíz digital, teoría de grafos.

Löthar Collatz (1910-1990) fue un matemático alemán que investigó principalmente en análisis numérico, con importantes estudios y publicaciones. Estudió en Alemania entre 1928 y 1935 y como era costumbre cursó en diversas universidades: Munich, Göttingen y Berlin.

La fórmula Collatz-Wielandt para matrices positivas en el teorema de Perron-Frobenius es nombrada en su honor. El artículo de 1957, escrito en conjunto con Ulrich Snogwitz, quien falleciera en el Bombardeo de Darmstadt durante la Segunda Guerra Mundial, creó el campo de la Teoría espectral de grafos.

Desde 1952 hasta su retiro en 1978, Collatz trabajó en la Universidad de Hamburgo, allí fundó el Instituto de Matemática Aplicada en 1953. Luego de su jubilación como profesor emérito, participó activamente en congresos.



Por su gran trabajo le fueron otorgados muchos galardones durante su vida, entre los cuales están:

- *Elegido miembro de la Academia alemana de las ciencias naturales Leopoldina, la Academia de Ciencias del Instituto de Boloña y la Academia de Modena en Italia.*
- *Miembro honorario de la Sociedad Matemática de Hamburgo.*

- Grados honoríficos, otorgados por la Universidad de São Paulo, la Universidad Técnica de Viena, la Universidad de Dundee (Escocia), la Universidad Brunel (Inglaterra), la Universidad de Hannover y la Universidad Politécnica de Dresde.

Lothar Collatz murió inesperadamente, de un ataque al corazón en Varna (Bulgaria), el 26 de septiembre de 1990, mientras asistía a un congreso.

Influenciado por sus profesores Landau y Schur, trató de representar las funciones aritméticas por grafos. Para ello unía $n \rightarrow m$ cuando $f(n)=m$ y trató de encontrar funciones simples que dieran lugar a ciclos. Para ello debería tenerse números tal que $f(n)<n$ y otros con $f(m)>m$. Fue de este modo que definió la función que hoy llamamos de Collatz.

Definiciones

La conjetura de Collatz Es un problema matemático no resuelto que plantea lo siguiente: para cualquier número natural, siempre se puede reducir a 1 siguiendo una serie de pasos definidos por operaciones matemáticas. Los pasos se definen de la siguiente manera: si el número es par, se divide entre 2; si es impar, se multiplica por 3 y se suma 1. La conjetura sugiere que, independientemente del número inicial, se llegará eventualmente al número 1 después de un número finito de pasos, entrando en un bucle infinito con los números $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$.

La raíz digital Es un concepto matemático que consiste en sumar los dígitos de un número y luego volver a sumar los dígitos del resultado, y así sucesivamente, hasta obtener un solo dígito. Este último número es la raíz digital del número original. Por ejemplo, el número 123 tiene una raíz digital de 6 ($1 + 2 + 3 = 6$). Para el número 12345, su raíz digital es 6 ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, y $1 + 5 = 6$).

En la teoría de números, la raíz digital se utiliza para describir la estructura de los números y para investigar sus propiedades. La clasificación de números basada en sus raíces digitales se hace separando los números en diferentes grupos dependiendo de la suma de sus dígitos.

Simplificación: La raíz digital reduce un número a un solo dígito, lo que facilita su comparación y análisis con otros números.

Clasificación: La raíz digital permite clasificar los números en grupos según sus propiedades, lo que facilita la identificación de patrones y relaciones entre ellos.

Modularidad: La raíz digital está estrechamente relacionada con el cálculo módulo 9, lo que permite investigar la estructura de los números y encontrar relaciones y propiedades matemáticas utilizando técnicas de teoría de números.

La teoría de grafos Es una rama de las matemáticas que estudia la relación entre objetos y las conexiones que existen entre ellos. Los objetos se representan como vértices (nodos) y las conexiones se representan como aristas (enlaces) que los conectan.

La teoría de grafos se utiliza en una amplia variedad de campos, incluyendo la informática, la ingeniería, la física, la biología, la sociología, la economía y muchas otras disciplinas.

Algunos de los problemas más importantes que se han resuelto con la teoría de grafos son los siguientes:

El problema del emparejamiento máximo. El problema del viajante de comercio. El problema de flujo máximo. El problema de coloreo de grafos. El problema de la máxima clique.

Estos son solo algunos ejemplos de los problemas que se han resuelto con la teoría de grafos. En general, esta teoría ha sido aplicada en una amplia variedad de campos, incluyendo la informática, la ingeniería, la física, la biología y la economía, entre otros.

En términos más precisos, un grafo es una estructura abstracta que consta de un conjunto de vértices (nodos) y un conjunto de aristas (enlaces) que conectan algunos o todos los vértices. Los grafos se pueden utilizar para representar una amplia variedad de situaciones en la vida real, como redes sociales, mapas de carreteras, circuitos eléctricos, redes de transporte, relaciones entre conjuntos de datos, y mucho más.

Introducción

Conjetura . Aplicando de forma iterativa la función de Collatz C a un número cualquiera llegaremos al número 1.

$$C(n) \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n+1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Un ejemplo de una secuencia empezada con el número 212:

212, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Si se continúa la secuencia, el 1 itera al 4 y éste al 2 y al 1, entrando en un bucle infinito con estos números.

La misma secuencia, en la que se han sustituido los números por el valor de sus raíces digitales: 5, 7, 8, 7, 8, 4, 2, 1, 5, 7, 8, 4, 2, 1.

Diagrama del desarrollo posible de cualquier secuencia generada por la función de la conjetura de Collatz. Los números naturales se distribuyen en los vértices según su raíz digital y las aristas indican la trayectoria que siguen en sus iteraciones a otros números. (Figura 1)

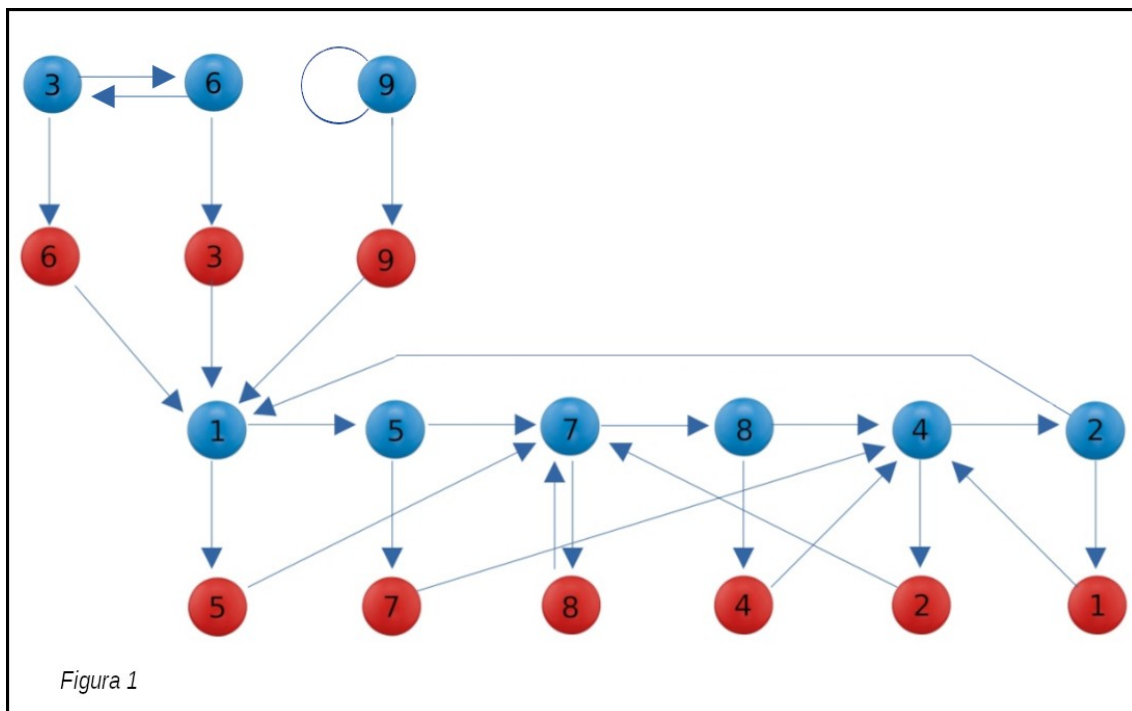
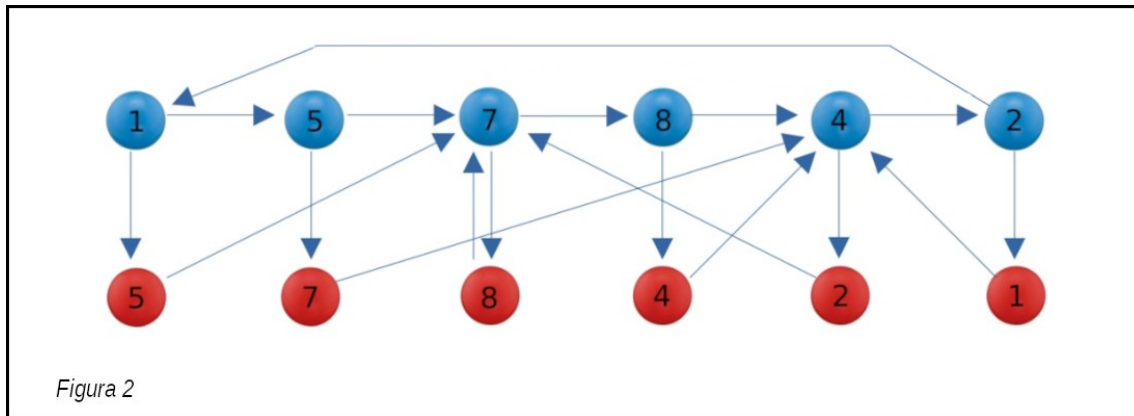


Figura 1

Los números naturales divididos en 9 grupos de números pares (vértices azules) y 9 grupos de números impares (vértices rojos), organizados por el valor de su raíz digital indicado en los vértices.

Las aristas indican el vértice al que pertenece el número obtenido a partir de la iteración del número anterior.

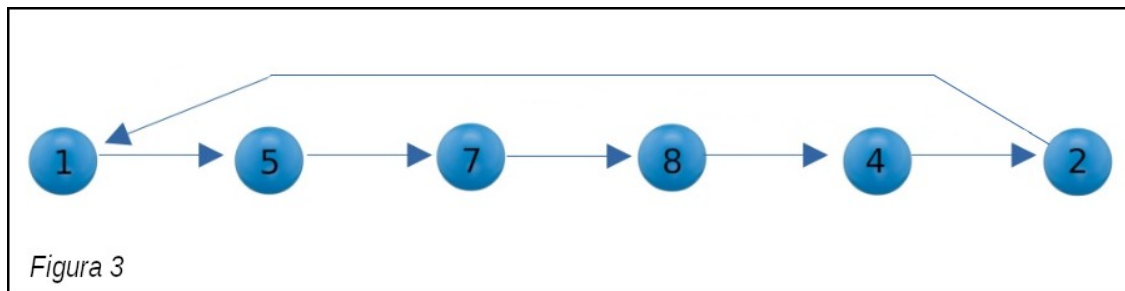
Los números de los vértices 3, 6, 9, 6, 3, 9, después de iterar a números del vértice 1 ya no volverán a salir en la secuencia, por lo que nos enfocaremos en otro diagrama que excluye estos números. (Figura 2)



El diagrama presenta una estructura cíclica que inicia y termina en el vértice 1, aunque podría ser cualquier otro vértice (1, 5, 7, 8, 4, 2). Se puede representar el diagrama 3D en la superficie externa de una forma cilíndrica.

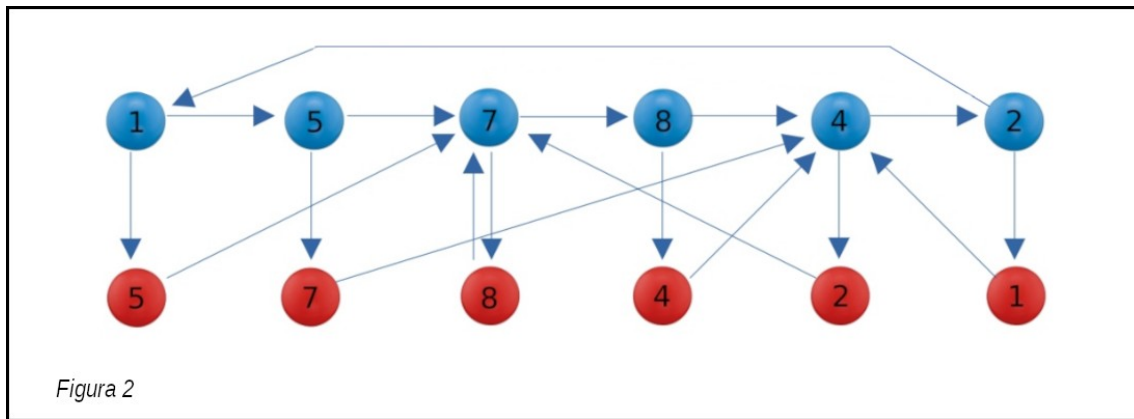
Los números de los vértices (5, 7, 8, 4, 2, 1) iteran a números de los vértices (7 y 4), que con un grado de entrada 4 cada uno, salen en las secuencias con mayor frecuencia que los demás números.

En las iteraciones se forman varios ciclos: (7, 8, 7), (7, 8, 4, 2, 7), (4, 2, 1, 4), (4, 2, 7, 8, 4, 4), entre otros posibles, pero el ciclo principal que conduce las secuencias hasta el número 1, es el de los vértices azules de los números pares. (Figura 3)



Es lógico asegurar que ciertos números pares recorren este ciclo una o más veces, por ejemplo el número 4096, que lo recorre dos veces.

Otros números, con las inevitables iteraciones con los números impares de los vértices rojos, provocan desorden y ausencia de un patrón aparente en las secuencias, pero el ciclo es el mismo, aunque la secuencia tarde más en su recorrido.



De nuevo la figura 2 para mejor visualización de las siguientes **afirmaciones**:

1 . Todos los números pares pueden iterar a números impares y éstos únicamente a números pares de los vértices 7 y 4, por lo que todos los números, en algún momento de la secuencia llegan a estos números.

2 . Las iteraciones de los números de los vértices 7 y 4 son: $7 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2$.

Los números del vértice 7 pueden ir a números del vértice 8, que vuelven al vértice 7.

Los números del vértice 8 pueden ir a números del vértice 4, que llegan al vértice 4.

Los números del vértice 4 pueden ir a números del vértice 2, que llegan al vértice 7.

3 . Todos los números llegan a números del vértice 2.

4 . Los números del vértice 2 iterarán a números del vértice 1 y a números del vértice 1.

Cuando iteran a números del vértice 1, la secuencia puede finalizar llegando al número 1 o iterar a un número del vértice 4, que volverá al vértice 2.

Cuando iteran a números del vértice 1, la secuencia entra en un nuevo ciclo, al final del cual llegará de nuevo a números del vértice 2 y el ciclo se repetirá o la secuencia acabará.

5 . En cada iteración de un número par, éste se reduce a la mitad, lo que hace que la secuencia sea decreciente en ese punto, por lo que cuantos más vértices de números pares haya con más de una arista entrante, más veces la secuencia pasará por ellos y más decreciente será. Se observa en el diagrama que dichos vértices son el 7 y el 4, cada uno con cuatro aristas entrantes, mientras que los demás vértices solo tienen una arista entrante.

Los ciclos influyen de forma importante en el desarrollo de una secuencia, siendo necesario resaltar lo siguiente:

Ciclos . 1 . El ciclo principal es el de los vértices (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1).

2 . Los vértices (7, 8, 7), con un grupo de números pares y un grupo de números impares, hace que la secuencia sea creciente y será más creciente cuanto más tiempo permanezca la secuencia en él.

3 . Los vértices (7, 8, 4, 2, 7), tres grupos de números pares y sólo un grupo de números impares, hace que la secuencia sea decreciente y será más decreciente cuanto más tiempo permanezca la secuencia en él.

4 . Los vértices (4, 2, 1, 4), dos grupos de números pares y sólo un grupo de números impares, hace que la secuencia sea decreciente y será más decreciente cuanto más tiempo permanezca la secuencia en él.

Existen otros ciclos, pero estos son los más importantes y el ciclo de los vértices (7, 8, 7) es determinante en el número de pasos de las secuencias, ya que hace que estas sean crecientes, en la medida del tiempo que se tarda en salir de él.

A continuación, un ejemplo de una secuencia que empieza con el número 511, con los valores de la raíz digital debajo de cada número.

511	1534	767	2302	1151	3454	1727	5182	2591	7774	3887	11662	5831	17494	8747	26242
7	4	2	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7

13121	39364	19682	9841	29524	14762	7381	22144	11072	5536	2768	1384	692	346	173	520
8	7	8	4	4	2	1	4	2	1	5	7	8	4	2	7

260	130	65	196	98	49	148	74	37	112	56	28	14	7	22	11
8	4	2	7	8	4	4	2	1	4	2	1	5	7	4	2

34	17	52	26	13	40	20	10	5	16	8	4	2	1
7	8	7	8	4	4	2	1	5	7	8	4	2	1

Los números resaltados en color azul son los tramos más importantes de la secuencia, cuando los números iteran en los ciclos.

Con el número 2302 la secuencia entra en el ciclo (7, 8, 7) y sale con el número 39364 (multiplicidad 7) y en este tramo el crecimiento de la secuencia ha sido muy importante.

La secuencia entra en el ciclo (4, 2, 1, 4) con el número 29524, iterando en él hasta llegar al número 22144. Lo mismo ocurre con el número 148 que llega hasta el número 56. En estos ciclos, la secuencia es decreciente siempre.

El número 1384 entra en el ciclo (7, 8, 4, 2, 7) y sale con el número 98, ocasionando un importante decrecimiento a la secuencia.

Conclusión

La iteración de los números de las secuencias sucede con un patrón bien definido, en el que el valor de su raíz digital sigue estrictamente el orden cíclico presentado en este escrito. Todos los números llegan a otros números pares de raíz digital 2 y después de un número indeterminado de iteraciones y ciclos, finalmente llegarán al número 1.

LA CONJETURA DE COLLATZ

Orden y armonía en los números de las secuencias.

Miguel Cerdá Bennassar – Abril 2023

Resumen

Si Collatz definió su conjetura inspirado en sus investigaciones para representar las funciones aritméticas mediante grafos, es posible que la solución al problema se encuentre dentro de la teoría de grafos. Si bien es imposible representar los números naturales en un grafo, sí se pueden representar grupos de números clasificados según el valor de la raíz digital.

En este escrito expongo una visión personal del problema de Collatz y su conjetura, utilizando las propiedades de la raíz digital de los números naturales y la teoría de grafos.

Palabras clave: Löthar Collatz. Conjetura de Collatz. Función de Collatz. Problema $3n+1$. Secuencia de números. Raíz digital. Teoría de grafos. Digrafo. Grafo dirigido.

Introducción

Löthar Collatz (1910-1990) fue un matemático alemán que investigó principalmente en análisis numérico, con importantes estudios y publicaciones. En su artículo de 1957, escrito en colaboración con Ulrich Snogwitz, creó el campo de la Teoría Espectral de Grafos.

Influenciado por sus profesores Landau y Schur, trató de representar las funciones aritméticas por grafos. Para ello unía $n \rightarrow m$ cuando $f(n)=m$ y trató de encontrar funciones simples que dieran lugar a ciclos. Para ello debería tenerse números tal que $f(n)<n$ y otros con $f(m)>m$. Fue de este modo que definió la función que hoy llamamos de Collatz.

La conjetura de Collatz: Es un problema matemático no resuelto que plantea lo siguiente: para cualquier número natural, siempre se puede reducir a 1 siguiendo una serie de pasos definidos por operaciones matemáticas. Los pasos se definen de la siguiente manera: si el número es par, se divide entre 2; si es impar, se multiplica por 3 y se suma 1. La conjetura sugiere que, independientemente del número inicial, se llegará eventualmente al número 1 después de un número finito de pasos, entrando en un bucle infinito con los números 4, 2, 1, 4.

La raíz digital: Es un concepto matemático que consiste en sumar los dígitos de un número y luego volver a sumar los dígitos del resultado, y así sucesivamente, hasta obtener un solo dígito. Este último número es la raíz digital del número original. Por ejemplo, el número 123 tiene una raíz digital de 6 ($1 + 2 + 3 = 6$). Para el número 12345, su raíz digital es 6 ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, y $1 + 5 = 6$).

En la teoría de números, la raíz digital se utiliza para describir la estructura de los números y para investigar sus propiedades. La clasificación de números basada en sus raíces digitales se hace separando los números en diferentes grupos dependiendo de la suma de sus dígitos.

Simplificación: La raíz digital reduce un número a un solo dígito, lo que facilita su comparación y análisis con otros números.

Clasificación: La raíz digital permite clasificar los números en grupos según sus propiedades, lo que facilita la identificación de patrones y relaciones entre ellos.

Modularidad: La raíz digital está estrechamente relacionada con el cálculo módulo 9, lo que permite investigar la estructura de los números y encontrar relaciones y propiedades matemáticas utilizando técnicas de teoría de números.

La teoría de grafos: Es una rama de las matemáticas que estudia la relación entre objetos y las conexiones que existen entre ellos. Los objetos se representan como vértices (nodos) y las conexiones se representan como aristas (enlaces) que los conectan.

La teoría de grafos se utiliza en una amplia variedad de campos, incluyendo la informática, la ingeniería, la física, la biología, la sociología, la economía y muchas otras disciplinas.

Algunos de los problemas más importantes que se han resuelto con la teoría de grafos son los siguientes:

El problema del emparejamiento máximo. El problema del viajante de comercio. El problema de flujo máximo.

El problema de coloreo de grafos. El problema de la máxima clique.

Estos son solo algunos ejemplos de los problemas que se han resuelto con la teoría de grafos. En general, esta teoría ha sido aplicada en una amplia variedad de campos, incluyendo la informática, la ingeniería, la física, la biología y la economía, entre otros.

En términos más precisos, un grafo es una estructura abstracta que consta de un conjunto de vértices (nodos) y un conjunto de aristas (enlaces) que conectan algunos o todos los vértices. Los grafos se pueden utilizar para representar una amplia variedad de situaciones en la vida real, como redes sociales, mapas de carreteras, circuitos eléctricos, redes de transporte, relaciones entre conjuntos de datos, y mucho más.

Conjetura: Aplicando de forma iterativa la función de Collatz a un número cualquiera llegaremos al número 1.

$$F(n) \begin{cases} n/2, & \text{si } n \text{ es par} \\ 3n+1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Un ejemplo de una secuencia empezada con el número 212:

212, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Si se continúa la secuencia, el 1 itera al 4 y éste al 2 y al 1, entrando en un bucle infinito con estos números.

La misma secuencia, en la que se han sustituido los números por el valor de sus raíces digitales: 5, 7, 8, 7, 8, 4, 2, 1, 5, 7, 8, 4, 2, 1.

Grafo de las raíces digitales

En las figuras 1 y 2, los números naturales han sido organizados en 9 grupos de números pares (representados por vértices azules) y 9 grupos de números impares (representados por vértices rojos), según el valor de su raíz digital, indicado en el nodo correspondiente.

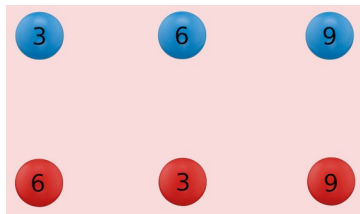


Figura 1

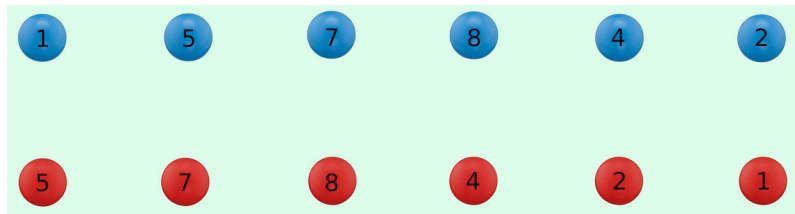


Figura 2

En las figuras 3 y 4, las aristas indican el camino que siguen los números pares en sus iteraciones hacia otros números.

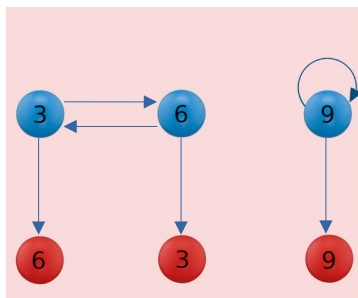


Figura 3

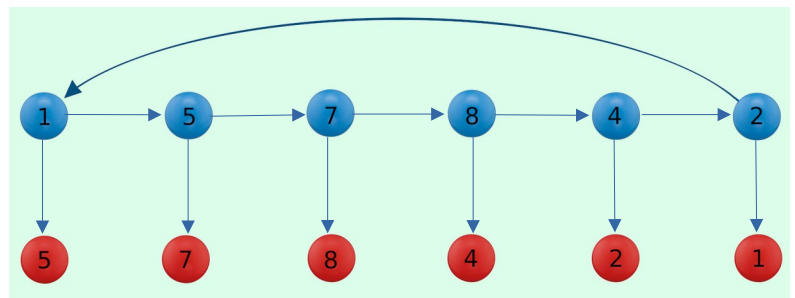


Figura 4

En las figuras 5 y 6, las aristas indican el camino que siguen los números impares en sus iteraciones hacia otros números.

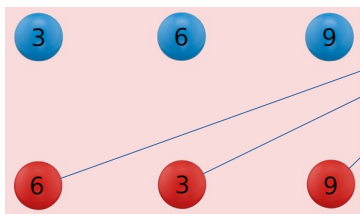


Figura 5

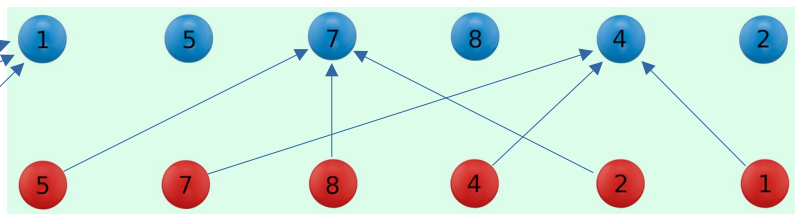
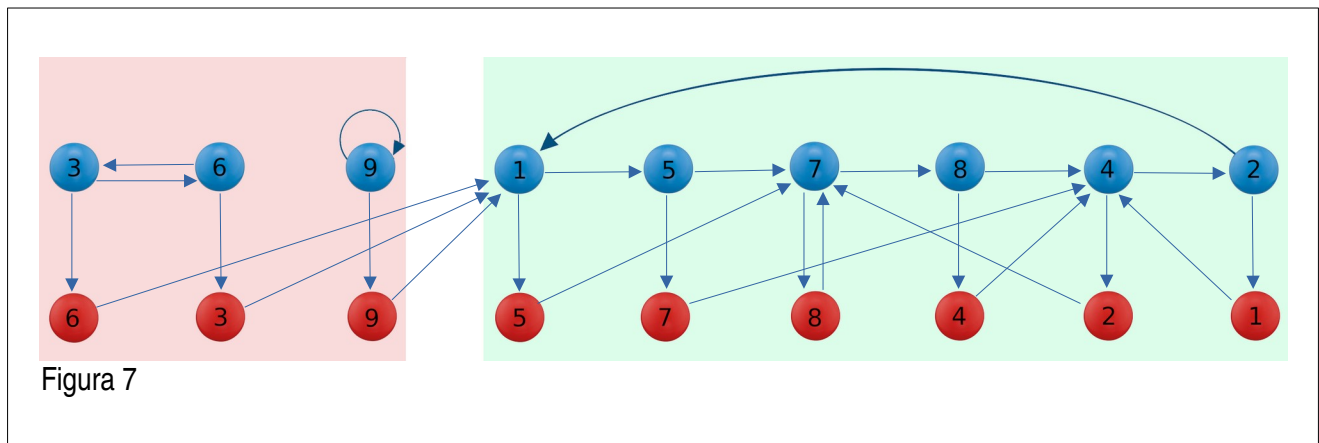


Figura 6

Figura 7. $G(18, 27)$:



Los números de los vértices (3, 6, 9) y (6, 3, 9), después de llegar a números del vértice (1), no volverán a salir en la secuencia, ya que ésta queda atrapada en los números de la figura 6.

Todos los números impares iteran hacia los vértices de números pares (1, 7, 4).

Los números impares de los vértices (6, 3, 9) iteran a números pares del vértice (1) solamente una vez.

Los números impares de los vértices (5, 7, 8, 4, 2, 1) iteran a números pares de los vértices (7, 4), lo que hace que estos números aparezcan en las secuencias con mayor frecuencia que los demás.

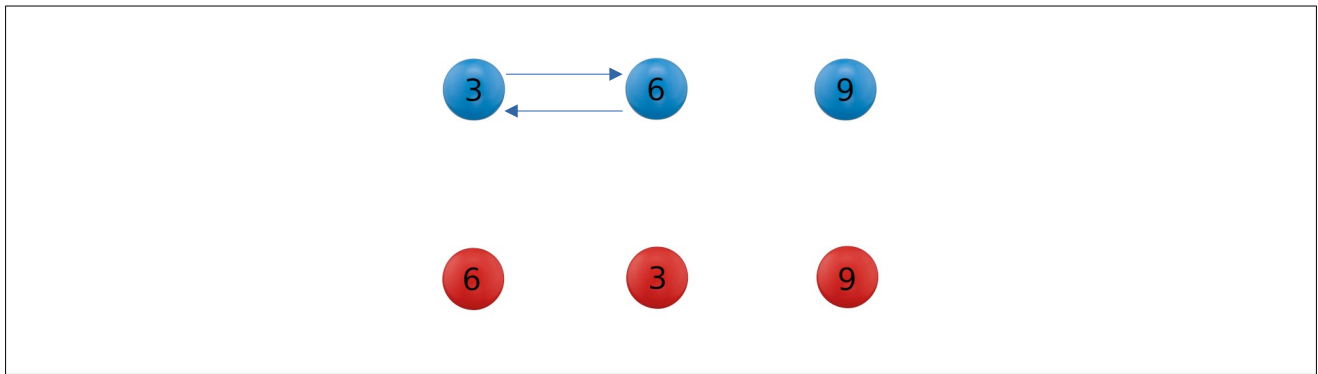
Ciclos

Al reemplazar los números de las secuencias por el valor de su raíz digital se puede observar un patrón cíclico muy definido en el desarrollo de las secuencias, el cual se repite en los siguientes ciclos:

1. (3, 6, 3), formado por dos grupos de números pares. La secuencia es decreciente.
2. (9, 9), un solo grupo de números pares y la secuencia es decreciente.
3. (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1), con seis grupos de números pares y la secuencia es decreciente.
4. (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1), cinco grupos de números pares y un grupo de números impares. La secuencia es decreciente.
5. (1, 5, 7, 4, 2, 1), cuatro grupos de números pares y un grupo de números impares. La secuencia es decreciente.
6. (7, 8, 7), un grupo de números pares y un grupo de números impares y la secuencia es creciente.
7. (1, 5, 7, 8, 4, 4, 2, 1), seis grupos de números pares y un grupo de números impares y la secuencia es decreciente.
8. (7, 8, 4, 2, 7), tres grupos de números pares y un grupo de números impares y la secuencia es decreciente.
9. (4, 2, 1, 4), dos grupos de números pares y un grupo de números impares y la secuencia es decreciente.
10. (1, 5, 7, 8, 4, 4, 2, 1), cinco grupos de números pares y dos grupos de números impares y la secuencia es decreciente.
11. (7, 8, 4, 4, 2, 7), tres grupos de números pares y dos grupos de números impares y la secuencia es decreciente.

A continuación, diagramas de estos ciclos, los números que entran en algunos y el número de circuitos que completan.

1. (3, 6, 3):



Solo entran en el ciclo los números que son inicio de la secuencia. En las siguientes tablas, los números con los que una secuencia entrará en el ciclo, el número de circuitos que completará y los factores de reducción de los números.

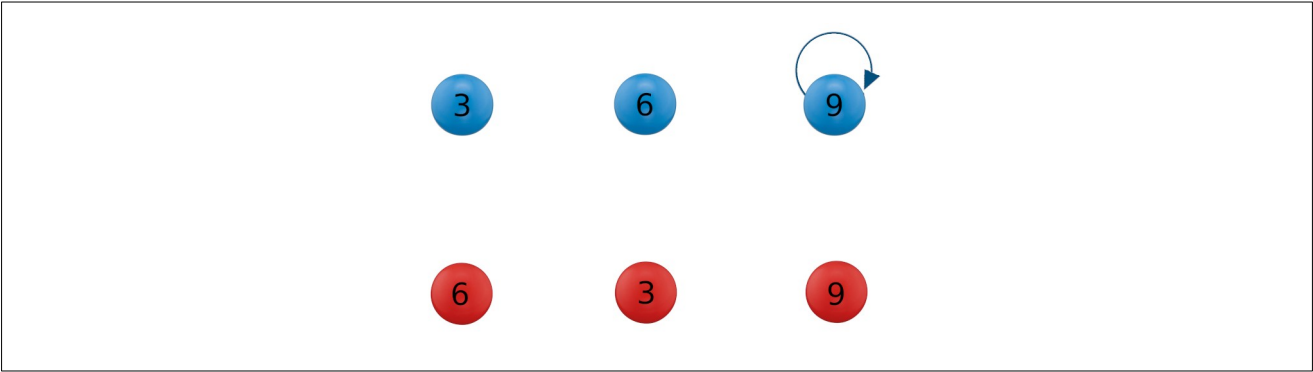
Circuito (3, 6, 3):

24(6n-1)	120, 264, 408, 552, 696, . . .	(3, 6, 3)	$1/2^3$
48(6n-5)	48, 336, 624, 912, 1200, . . .	(3, 6, 3, 6)	$1/2^4$
96(6n-1)	480, 1056, 1632, 2208, 2784, . . .	(3, 6, 3, 6, 3)	$1/2^5$
192(6n-5)	192, 1344, 2496, 3648, 4800, . . .	(3, 6, 3, 6, 3, 6)	$1/2^6$
384(6n-1)	1920, 4224, 6528, 8832, 11136, . . .	(3, 6, 3, 6, 3, 6, 3)	$1/2^7$
768(6n-5)	768, 5376, 9984, 14592, 19200, . . .	(3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6)	$1/2^8$
1536(6n-1)	7680, 16896, 26112, 35328, 44544, . . .	(3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3)	$1/2^9$
....			

Circuito (6, 3, 6):

4(6n-5)	24, 168, 312, 456, 600, . . .	(6 3 6)	$1/2^3$
48(6n-1)	240, 528, 816, 1104, 1392, . . .	(6 3 6 3)	$1/2^4$
96(6n-5)	96, 672, 1248, 1824, 2400, . . .	(6 3 6 3 6)	$1/2^5$
192(6n-1)	960, 2112, 3264, 4416, 5568, . . .	(6 3 6 3 6 3)	$1/2^6$
384(6n-5)	384, 2688, 4992, 7296, 9600, . . .	(6 3 6 3 6 3 6)	$1/2^7$
768(6n-1)	3840, 8448, 13056, 17664, . . .	(6 3 6 3 6 3 6 3)	$1/2^8$
1536(6n-5)	1536, 10752, 19968, 29184, . . .	(6 3 6 3 6 3 6 3 6)	$1/2^9$
....			

2. (9, 9):



Solo entran en el ciclo los números que son inicio de la secuencia. En la siguiente tabla, los números con los que una secuencia entrará en el ciclo, el número de circuitos que completará y los factores de reducción de los números.

Circuito (9, 9):

$36(2n-1)$	36, 108, 180, 252, 324, . . .	(9, 9)	$1/2^2$
$72(2n-1)$	72, 216, 360, 504, 648, . . .	(9, 9, 9)	$1/2^3$
$144(2n-1)$	144, 432, 720, 1008, 1296, . . .	(9, 9, 9, 9)	$1/2^4$
$288(2n-1)$	288, 864, 1440, 2016, 2592, . . .	(9, 9, 9, 9, 9)	$1/2^5$
$576(2n-1)$	576, 1728, 2880, 4032, 5184, . . .	(9, 9, 9, 9, 9, 9)	$1/2^6$
$1152(2n-1)$	1152, 3456, 5760, 8064, 10368, . . .	(9, 9, 9, 9, 9, 9, 9)	$1/2^7$
$2304(2n-1)$	2304, 6912, 11520, 16128, . . .	(9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9)	$1/2^8$
. . . .			

3. (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1):

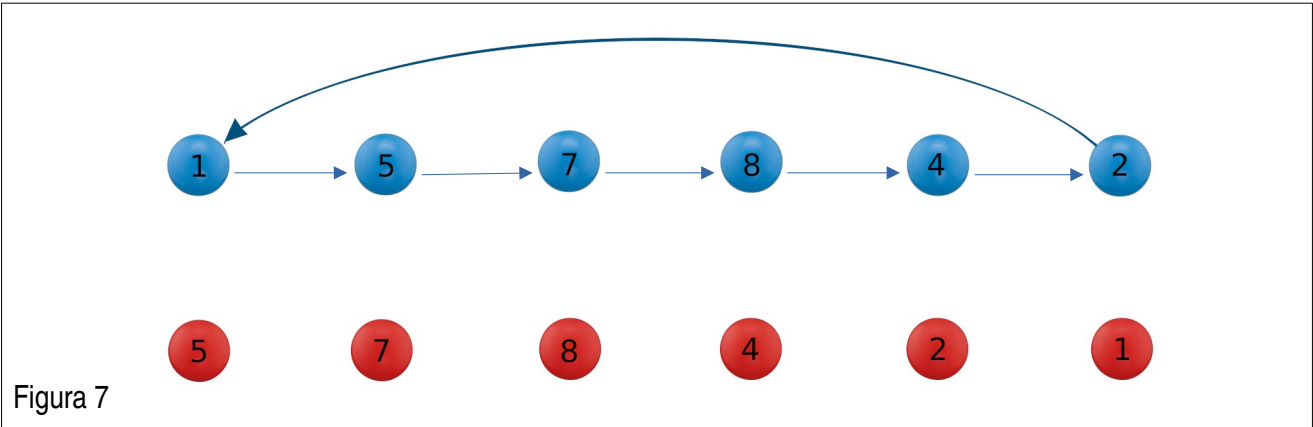


Figura 7

Este es el ciclo principal en el que todos los números pares son reducidos a la mitad en cada iteración, hasta llegar al número 1. Un número que completa el circuito una vez, se reduce en un factor de $1/2^7$. Si completa

el circuito dos veces, se reduce en un factor de $1/2^{13}$, con tres circuitos un $1/2^{19}$, etc. Los vértices de entrada al ciclo son: (1), (7) y (4), pero el número de inicio de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo. En las siguientes tablas, los números con los que una secuencia entrará en el ciclo y el número de circuitos que completará:

Circuito (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1):

Circuitos (n)	1	2	3	4	5	...
$5 \cdot 2^{(6n+1)}$	640	40960	2621440	167772160	10737418240	...
$14 \cdot 2^{(6n+1)}$	1792	114688	7340032	469762048	30064771072	...
$23 \cdot 2^{(6n+1)}$	2944	188416	12058624	771751936	49392123904	...
$32 \cdot 2^{(6n+1)}$	4096	262144	16777216	1073741824	68719476736	...
$41 \cdot 2^{(6n+1)}$	5248	335872	21495808	1375731712	88046829568	...
...	...	...	...	...	...	...

Circuito (5, 7, 8, 4, 2, 1, 5):

Circuitos (n)	1	2	3	4	5	...
$7 \cdot 2^{(6n+1)}$	896	57344	3670016	234881024	15032385536	...
$16 \cdot 2^{(6n+1)}$	2048	131072	8388608	536870912	34359738368	...
$25 \cdot 2^{(6n+1)}$	3200	204800	13107200	838860800	53687091200	...
$34 \cdot 2^{(6n+1)}$	4352	278528	17825792	1140850688	73014444032	...
$43 \cdot 2^{(6n+1)}$	5504	352256	22544384	1442840576	92341796864	...
...	...	...	...	...	...	...

Circuito (7, 8, 4, 2, 1, 5, 7):

Circuitos (n)	1	2	3	4	5	...
$8 \cdot 2^{(6n+1)}$	1024	65536	4194304	268435456	17179869184	...
$17 \cdot 2^{(6n+1)}$	2176	139264	8912896	570425344	36507222016	...
$26 \cdot 2^{(6n+1)}$	3328	212992	13631488	872415232	55834574848	...
$35 \cdot 2^{(6n+1)}$	4480	286720	18350080	1174405120	75161927680	...
$44 \cdot 2^{(6n+1)}$	5632	360448	23068672	1476395008	94489280512	...
...	...	...	...	...	...	...

Circuito (8, 4, 2, 1, 5, 7, 8):

Circuitos (n)	1	2	3	4	5	...
$4 \cdot 2^{(6n+1)}$	512	32768	2097152	134217728	8589934592	...
$13 \cdot 2^{(6n+1)}$	1664	106496	6815744	436207616	27917287424	...
$22 \cdot 2^{(6n+1)}$	2816	180224	11534336	738197504	47244640256	...
$31 \cdot 2^{(6n+1)}$	3968	253952	16252928	1040187392	66571993088	...
$40 \cdot 2^{(6n+1)}$	5120	327680	20971520	1342177280	85899345920	...
...	...	...	...	...	...	...

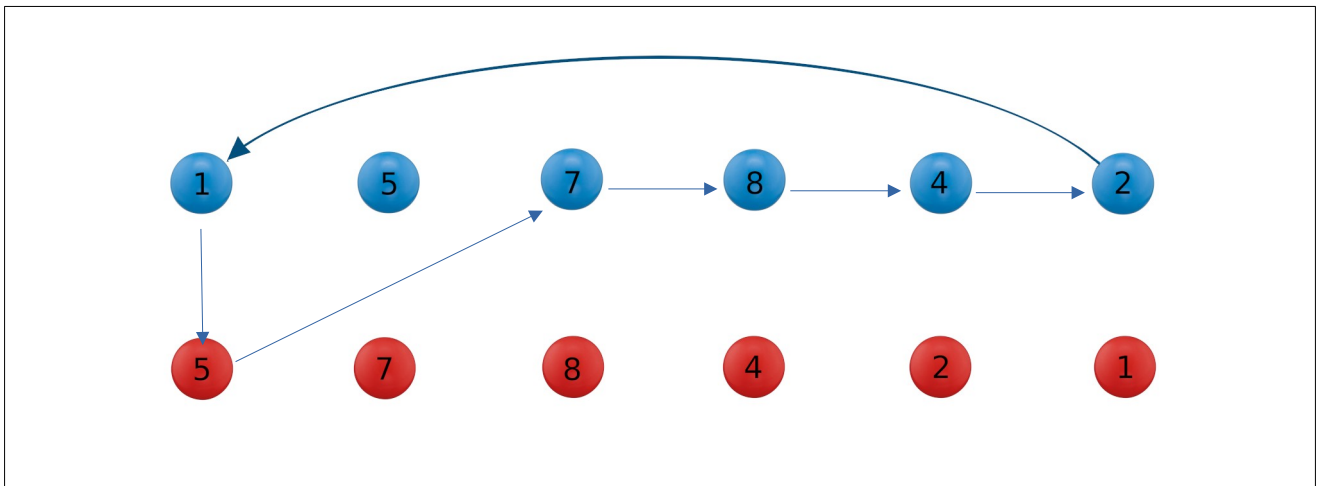
Circuito (4, 2, 1, 5, 7, 8, 4):

Circuitos (n)	1	2	3	4	5	...
$2 \cdot 2^{(6n+1)}$	256	16384	1048576	67108864	4294967296	...
$11 \cdot 2^{(6n+1)}$	1408	90112	5767168	369098752	23622320128	...
$20 \cdot 2^{(6n+1)}$	2560	163840	10485760	671088640	42949672960	...
$29 \cdot 2^{(6n+1)}$	3712	237568	15204352	973078528	62277025792	...
$38 \cdot 2^{(6n+1)}$	4864	311296	19922944	1275068416	81604378624	...
...	...	...	...	...	...	...

Circuito (2, 1, 5, 7, 8, 4, 2):

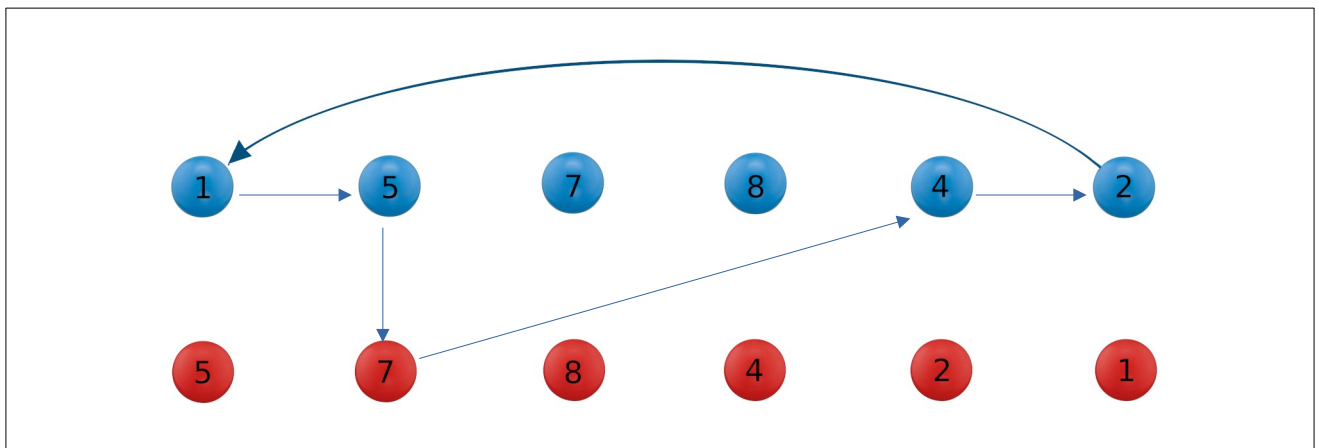
Circuitos (n)	1	2	3	4	5	...
$2^{(6n+1)}$	128	8192	524288	33554432	2147483648	...
$10 \cdot 2^{(6n+1)}$	1280	81920	5242880	335544320	21474836480	...
$19 \cdot 2^{(6n+1)}$	2432	155648	9961472	637534208	40802189312	...
$28 \cdot 2^{(6n+1)}$	3584	229376	14680064	939524096	60129542144	...
$37 \cdot 2^{(6n+1)}$	4736	303104	19398656	1241513984	79456894976	...
...	...	...	...	...	...	...

4. (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1)



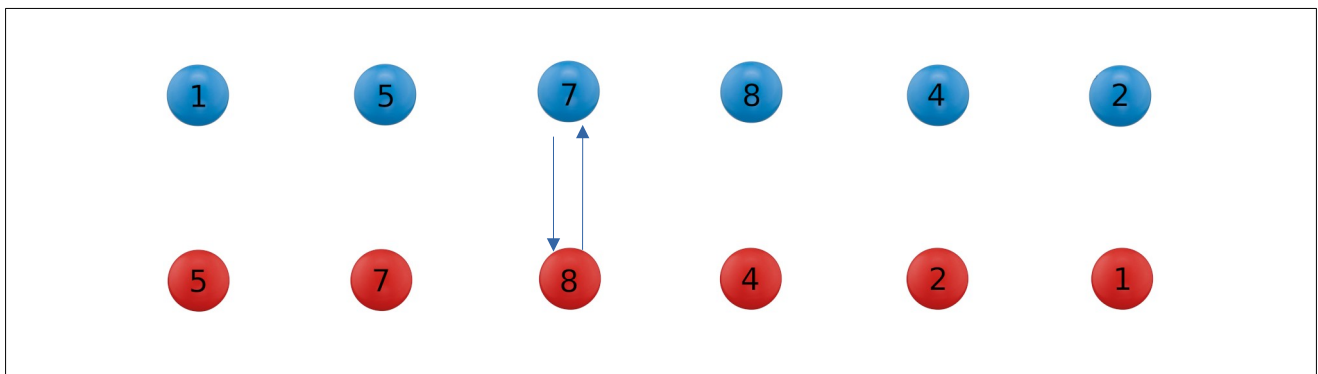
En este ciclo el número par del vértice (1), al ser dividido entre 2, sale del ciclo principal (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1) y llega a un número impar del vértice (5), pero en la siguiente iteración llega al vértice (7). Los vértices de entrada al ciclo son: (1), (7) y (4), pero el número de inicio de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo.

5. (1, 5, 7, 4, 2, 1):



En este ciclo el número par del vértice (5), al ser dividido entre 2, sale del ciclo principal (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1) y llega a un número impar del vértice (7), pero en la siguiente iteración llega al vértice (4). Los vértices de entrada al ciclo son: (1) y (4), pero el número de inicio de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo.

6. (7, 8, 7):



En este ciclo el número par del vértice (7), al ser dividido entre 2, sale del ciclo principal (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1) y llega a un número impar del vértice (8), pero en la siguiente iteración es devuelto al mismo vértice. Esto ocurrirá hasta que la iteración llegue a un número par del vértice (8), reconduciendo a la secuencia en el ciclo principal. El vértice de entrada al ciclo es el (7), pero el primer número de la secuencia puede entrar por cualquiera de los dos vértices.

Todos los números $72n-38$ completan un circuito. Los $144n-74$ completan dos circuitos. Los $288n-146$ completan tres circuitos, y así sucesivamente. La secuencia es creciente.

Para conocer el primer número de cada serie y el número de circuitos que completan en el ciclo:

$$C(n)=2(9 \times 2^{n-1}) \rightarrow 34, 70, 142, 286, 574, \dots$$

$$\text{Circuitos completados} \rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots$$

<u>Números</u>	<u>Circuitos completados</u>
$72n-38$ 34, 106, 178, 250, 322, ...	uno
$144n-74$ 70, 214, 358, 502, 646, ...	dos
$288n-146$ 142, 430, 718, 1006, 1294, ...	tres
$576n-290$ 286, 862, 1438, 2014, 2590, ...	cuatro
...	...

Algunos ejemplos de secuencias que completan el ciclo:

430, 215, 646, 323, 970, 485, 1456, 728, 364, 182, 91, ...

7 8 7 8 7 8 7 8 4 2 1 tres circuitos.

1150, 575, 1726, 863, 2590, 1295, 3886, 1943, 5830, 2915, 8746, 4373, 13120, ...

7 8 7 8 7 8 7 8 7 8 7 8 7 seis circuitos.

Circuito (8, 7, 8):

Todos los números $72n-37$ completan un circuito. Los $144n-73$ completan dos circuitos. Los $288n-145$ completan tres circuitos, y así sucesivamente. Solo es posible con el primer número de la secuencia.

$$C(n)=9 \times 2^{(n+1)}-1 \rightarrow 35, 71, 143, 287, 575, \dots$$

$$\text{Circuitos completados} \rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots$$

Números

72n-37	35, 107, 179, 251, 323, ...
144n-73	71, 215, 359, 503, 647, ...
288n-145	143, 431, 719, 1007, 1295, ...
576n-289	287, 863, 1439, 2015, 2591, ...
...	...

Circuitos completados

uno
dos
tres
cuatro
...

Algunos ejemplos de secuencias que completan el ciclo:

719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, ...

8 7 8 7 8 7 8

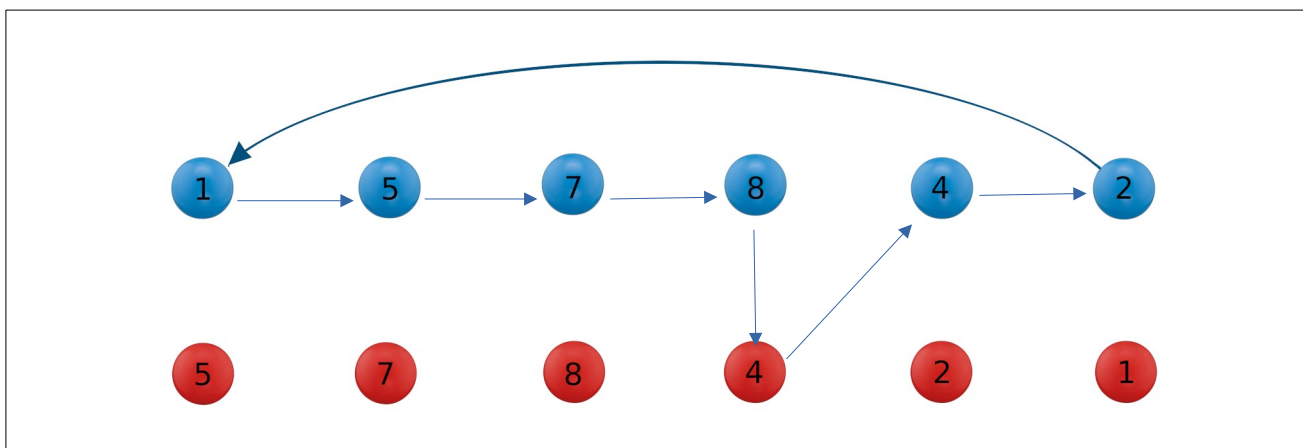
tres circuitos.

1439, 4318, 2159, 6478, 3239, 9718, 4859, 14578, 7289, 21868, 10934, ...

8 7 8 7 8 7 8 7 8

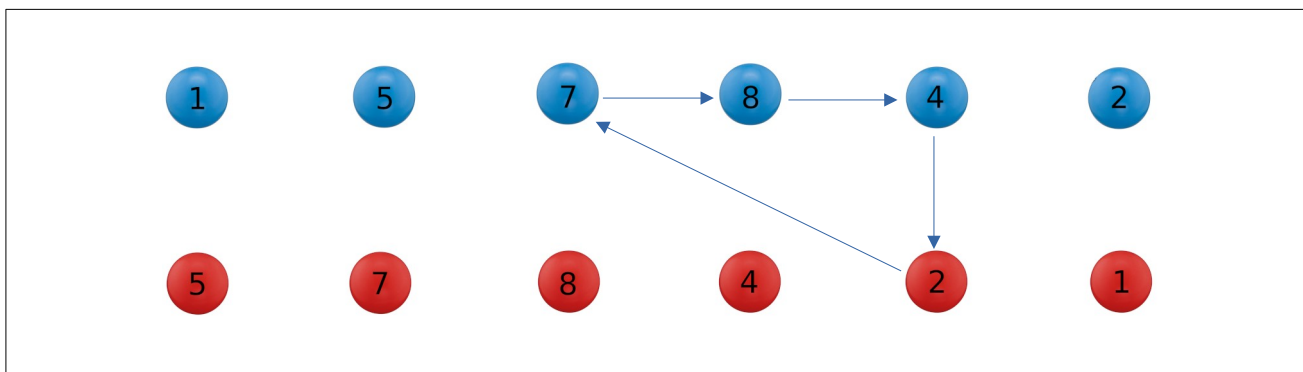
cuatro circuitos.

7. (1, 5, 7, 8, 4, 4, 2, 1):



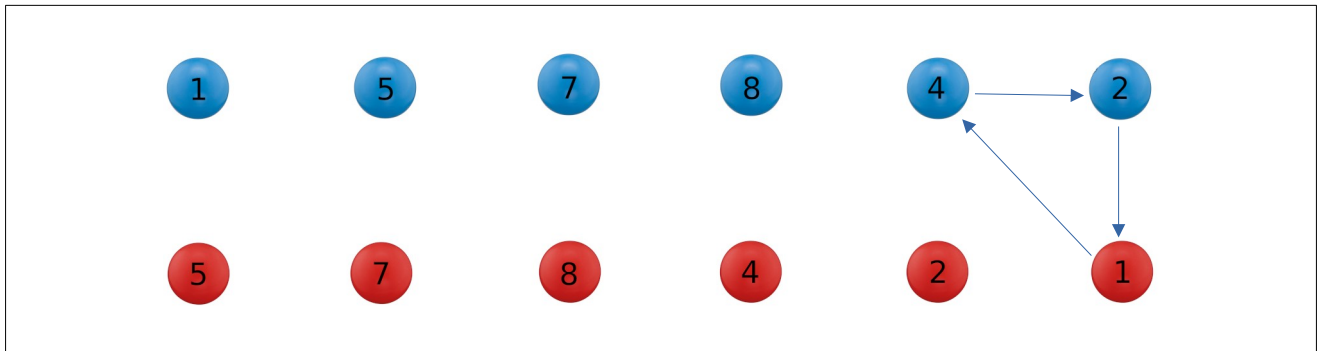
En este ciclo el número par del vértice (8), al ser dividido entre 2, sale del ciclo principal (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1) y llega a un número impar del vértice (4), pero en la siguiente iteración llega al vértice (4). Los vértices de entrada al ciclo son: (1), (7) y (4), pero el primer número de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo.

8. (7, 8, 4, 2, 7):



En este ciclo el número par del vértice (4), al ser dividido entre 2, sale del ciclo principal (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1) y llega a un número impar del vértice (2), pero en la siguiente iteración es devuelto al vértice (7). Esto ocurrirá hasta que la iteración llegue a un número par del vértice (2), reconduciendo la secuencia en el ciclo principal. Los vértices de entrada al ciclo son: (7) y (4), pero el primer número de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo.

9. (4, 2, 1, 4):



En este ciclo el número par del vértice (2), al ser dividido entre 2, sale del ciclo principal (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1) y llega a un número impar del vértice (1), pero en la siguiente iteración es devuelto al vértice (4). Esto ocurrirá hasta que la iteración llegue a un número par del vértice (1), reconduciendo a la secuencia en el ciclo principal.

Todos los números $72n+4$ completan un circuito. Los $288n+4$ completan dos circuitos. Los $1152n+4$ completan tres circuitos, y así sucesivamente. La secuencia es decreciente. El vértice de entrada al ciclo es el (4), pero el primer número de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo.

Para conocer el primer número de cada serie y el número de circuitos que completan en el ciclo:

$C(n)=2(9 \times 2^{(2n)}+2) \rightarrow 76, 292, 1156, 4612, 18436, \dots$
 Circuitos completados $\rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots$

Números que entran en él y las veces que lo completan:

<u>Números</u>		<u>Circuitos completados</u>
$72n+4$	76, 148, 220, 292 . . .	uno
$288n+4$	292, 580, 868, 1156, . . .	dos
$1152n+4$	1156, 2308, 3460, 4612, . . .	tres
$4608n+4$	4612, 9220, 13828, 18436, . . .	cuatro
. . .	. . .	. . .

El número 4 es el único número que completa el circuito infinitas veces.

Algunos ejemplos de secuencias que completan el ciclo:

3460, 1730, 865, 2596, 1298, 649, 1948, 974, 487, 1462, 731, 2194, . . .

4 2 1 4 2 1 4 2 1 4

tres ciclos.

4612, 2306, 1153, 3460, 1730, 865, 2596, 1298, 649, 1948, 974, 487, 1462, 731, ...

4 2 1 4 2 1 4 2 1 4 2 1 4

cuatro ciclos.

Circuito (2, 1, 4, 2):

Todos los números $72n+2$ completan un circuito. Los $288n+2$ completan dos circuitos. Los $1152n+2$ completan tres circuitos, y así sucesivamente. La secuencia es decreciente.

Para conocer el primer número de cada serie y el número de circuitos que completan en el ciclo:

$C(n)=2(9 \times 2^{(2n)+1}) \rightarrow 74, 290, 1154, 4610, 18434, \dots$

Circuitos completados $\rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots$

Números que entran en él y las veces que lo completan:

<u>Números</u>		<u>Circuitos completados</u>
$72n+2$	74, 146, 218, ...	uno
$288n+2$	290, 578, 866, ...	dos
$1152n+2$	1154, 2306, 3458, ...	tres
$4608n+2$	4610, 9218, 13826, 18434, ...	cuatro
...	...	...

Algunos ejemplos de secuencias que completan el ciclo:

866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, ...

2 1 4 2 1 4 2

dos ciclos.

2306, 1153, 3460, 1730, 865, 2596, 1298, 649, 1948, 974, 487, 1462,

2 1 4 2 1 4 2 1 4 2

tres ciclos.

Circuito (1, 4, 2, 1):

Todos los números $72n+1$ completan un circuito. Los $288n+1$ completan dos circuitos. Los $1152n+1$ completan tres circuitos, y así sucesivamente. La secuencia es decreciente.

Para conocer el primer número de cada serie y el número de circuitos que completan en el ciclo:

$C(n)=9 \times 2^{(2n+1)+1} \rightarrow 73, 289, 1153, 4609, 18433, \dots$

Circuitos completados $\rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots$

Números que entran en él y las veces que lo completan:

<u>Números</u>		<u>Circuitos completados</u>
$72n+1$	73, 145, 217, 289, 361, ...	uno
$288n+1$	289, 577, 865, 1153, 1441, ...	dos
$1152n+1$	1153, 2305, 3457, 4609, ...	tres
$4608n+1$	4609, 9217, 13825, 18433, ...	cuatro
...	...	...

Algunos ejemplos de secuencias que completan el ciclo:

217, 652, 326, 163, 490, 245, 736, 368, 184, 92, 46, 23, ...

1 4 2 1 4 2

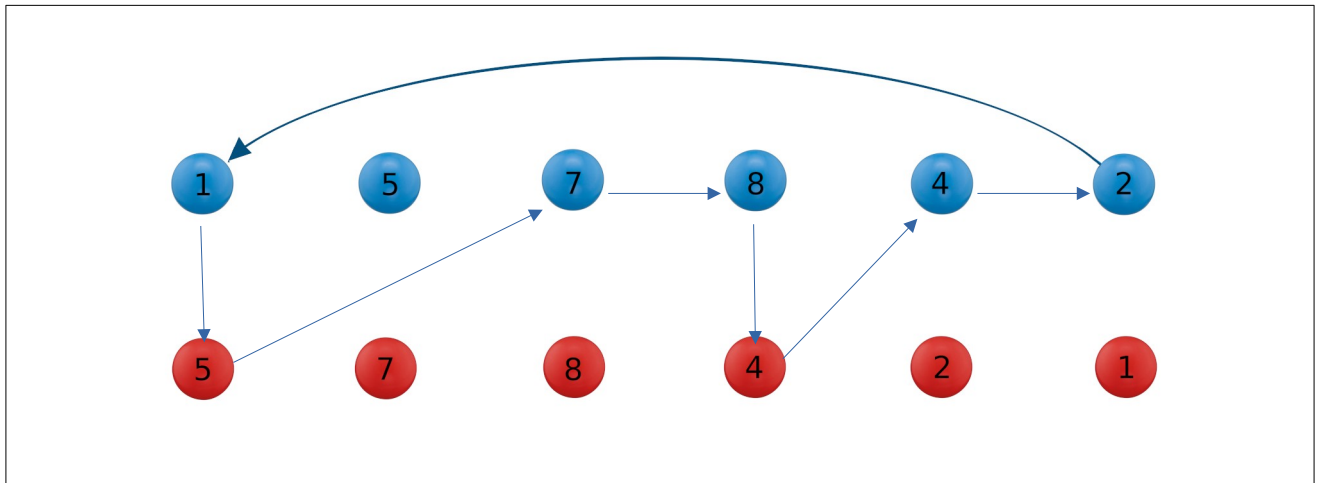
un ciclo

865, 2596, 1298, 649, 1948, 974, 487, 1462, 731, 2194, ...

1 4 2 1 4 2 1

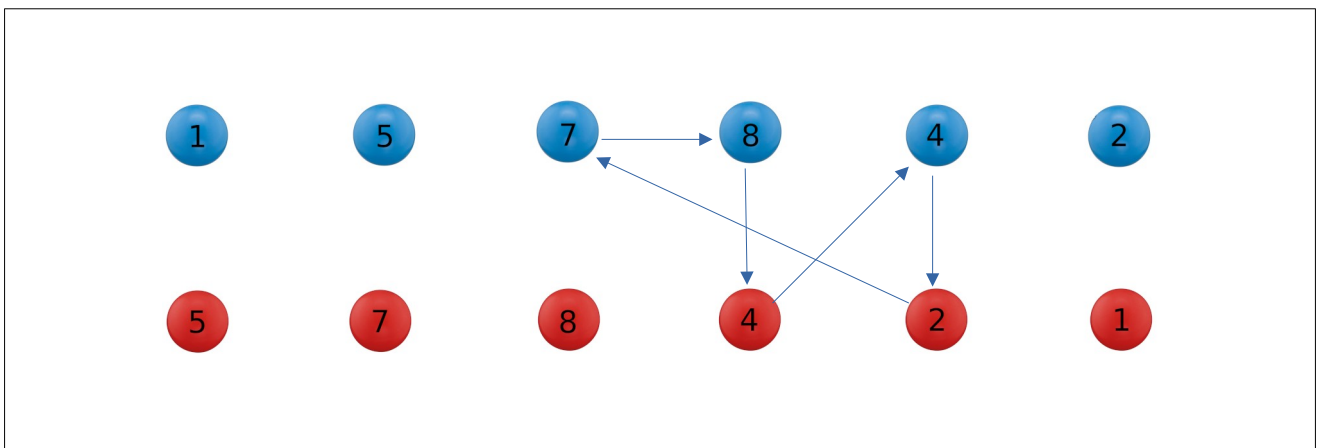
dos ciclos

10. (1, 5, 7, 8, 4, 4, 2, 1)



En este ciclo ocurre lo mismo con los vértices (5) y (4). Los vértices de entrada al ciclo son: (1), (7) y (4), pero el primer número de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo.

11. (7, 8, 4, 4, 2, 7):



En este ciclo ocurre lo mismo con los vértices (4) y (2). Los vértices de entrada al ciclo son: (7) y (4), pero el primer número de la secuencia puede entrar por cualquier vértice del ciclo.

Axiomas

1. En los 18 vértices del grafo están representados todos los números naturales.
4. Todos los ciclos provocan que las secuencias sean decrecientes a la salida, excepto el ciclo número 6 (7, 8, 7) que hace que las secuencias sean crecientes.
5. En el ciclo principal (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1), los números $4n-2$ iteran a números impares, pero en la siguiente iteración vuelven a los vértices de números pares (7) y (4), entrando de nuevo en el ciclo principal donde son reducidos a la mitad.
6. Las iteraciones de los números de los vértices (7) y (4) son $(7) \rightarrow (8) \rightarrow (4) \rightarrow (2)$, porque:
Los números del vértice (7) pueden ir a números del vértice (8), que vuelven al vértice (7).
Los números del vértice (8) pueden ir a números del vértice (4), que llegan al vértice (4).
Los números del vértice (4) pueden ir a números del vértice (2), que llegan al vértice (7).
7. En algún momento los números de la secuencia iteran a números del vértice (2).
8. Los números del vértice (2) iteran a números del vértice (1) y a números del vértice (1).
Cuando lo hacen a números del vértice (1), la secuencia puede finalizar llegando al número 1 o iterar a un número del vértice (4), que volverá al vértice (2). Cuando iteran a números del vértice (1), la secuencia entra en un nuevo ciclo, al final del cual llegará de nuevo a números del vértice (2) y el ciclo se repetirá o la secuencia acabará.
9. En cada iteración de un número par, éste se reduce a la mitad, lo que hace que la secuencia sea decreciente en ese punto, por lo que cuantos más vértices de números pares haya con más de una arista entrante, más veces la secuencia pasará por ellos y más decreciente será. Estos vértices son el (7) y el (4), cada uno con cuatro aristas entrantes, mientras que los demás vértices solo tienen una arista entrante.

Conclusión

Las secuencias siempre son decrecientes a la salida de los ciclos, excepto del ciclo número 6 (7, 8, 7), que son crecientes.

Los vértices de números pares (7) y (4) tienen grado de entrada 4, mientras que los otros vértices, incluidos los de los números impares, tienen grado de entrada 1.

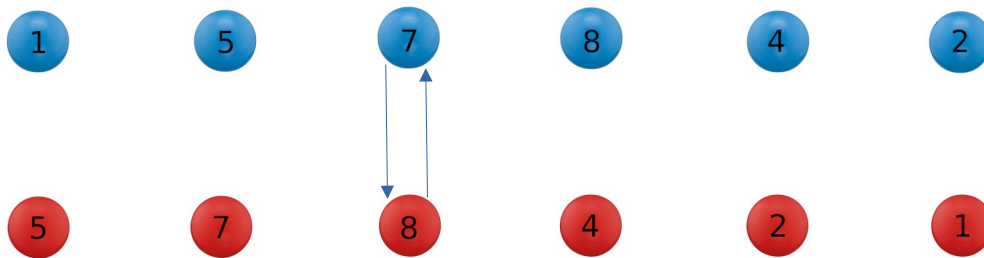
Todas las secuencias se desarrollan en un ciclo cerrado en el que los números pares son divididos entre 2 y aunque los números $4n-2$ provocan las salidas del ciclo hacia los números impares, en la siguiente iteración la secuencia vuelve a entrar en el ciclo principal por los vértices (7) y (4). Estos números provocan desorden y ausencia de un patrón aparente en las secuencias, pero el ciclo es el mismo, aunque la secuencia tarde más en su recorrido.

Todas las secuencias llegarán hasta el ciclo 4, 2, 1, 4 y seguirán en él de manera infinita.

A continuación un ejemplo de la secuencia empezada con el número 343 y los diferentes ciclos que recorre:

343, 1030, 515, 1546, 773, 2320, 1160, 580, 290, 145, 436, 218, 109, 328, 164, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

6. (7, 8, 7):



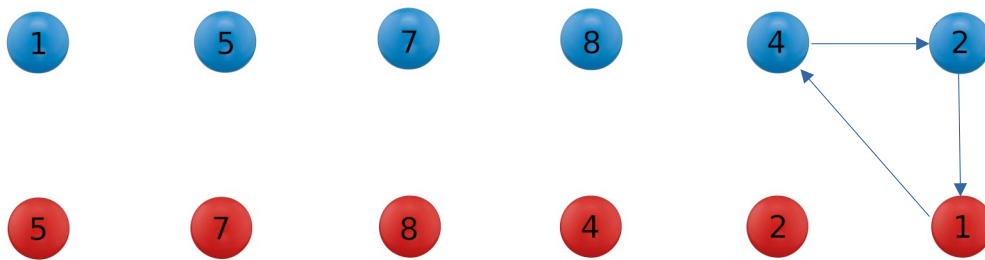
Números: 1546, 773, 2320, 1160, ... 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, ...
Raíz digital: (7 8 7) (7 8 7 8 7 8 7)

790, 395, 1186, 593, 1780, 890 ... 502, 251, 754, 377, 1132, 566, ...
(7 8 7 8 7) (7 8 7 8 7)

1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, ...
(7 8 7 8 7 8 7 8 7)

2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, ... 70, 35, 106, 53, 160, 80, ...
(7 8 7 8 7 8 7) (7 8 7 8 7)

9. (4, 2, 1, 4):

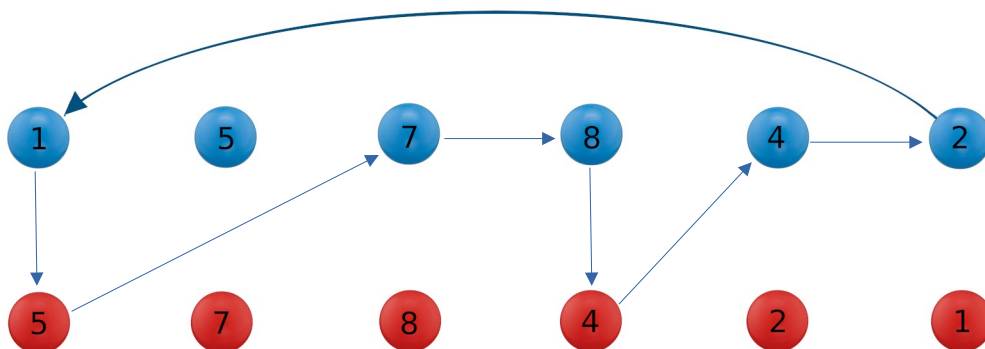


Números: 580, 290, 145, 436, 218, 109, 328, 164, ... 364, 182, 91, 274, 137, ...

Raíz digital: (4 2 1 4 2 1 4) (4 2 1 4)

2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, ... 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...
(4 2 1 4 2 1 4 2 1 4) (4 2 1 4 2 1 4 2 1 ...)

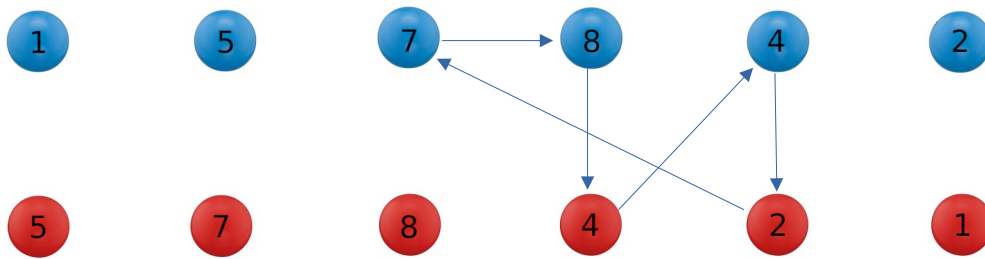
10. (4, 2, 1, 5, 7, 8, 4, 4)



Números: 328, 164, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, ...

Raíz digital: (4 2 1 5 7 8 4 4)

11. (7, 8, 4, 4, 2, 7):



Números: 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, ...

Raíz digital: (7 8 4 4 2 7)

412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, ...

(7 8 4 4 2 7)

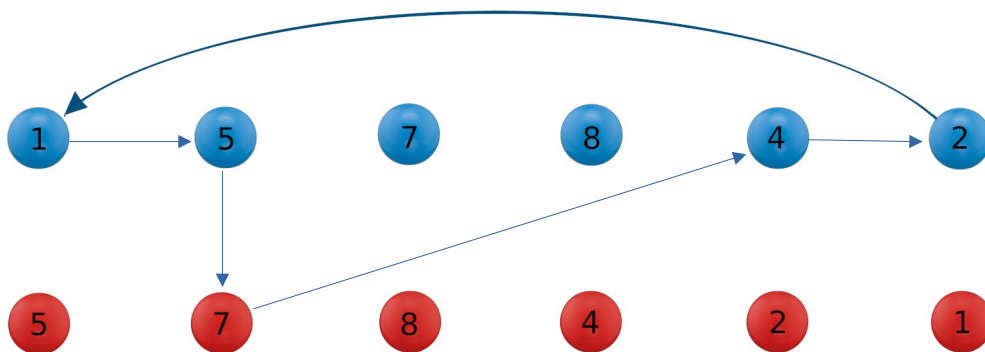
700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, ...

(7 8 4 4 2 7)

1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, ...

(7 8 4 4 2 7 8 4 4 2 7)

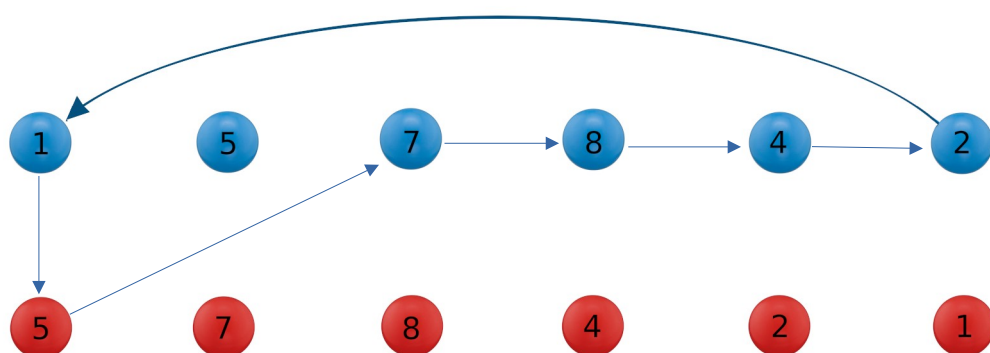
5. (1, 5, 7, 4, 2, 1):



Números: 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, ...

Raíz digital: (2 1 5 7 4 2)

4. (1, 5, 7, 8, 4, 2, 1)



Números: 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, ...
Raíz digital: (8 4 2 1 5 7 8)

Demostración de la Unicidad del Bucle en las Secuencias de Collatz Basada en Raíces Digitales y Teoría de Grafos.

Miguel Cerdá Bennassar – Marzo 2025

Resumen:

Este estudio demuestra que el bucle 4, 2, 1, 4 es el único bucle posible en las secuencias de Collatz, utilizando un análisis detallado de las raíces digitales de los números involucrados y modelando el sistema como un grafo dirigido. Mediante este enfoque, se muestra que las propiedades matemáticas de las raíces digitales y las reglas de la conjetura de Collatz hacen imposible la existencia de otros bucles. Se concluye que, basado en este análisis, no pueden existir otros bucles en las secuencias de Collatz.

Introducción:

La conjetura de Collatz es un problema matemático no resuelto que involucra secuencias generadas a partir de operaciones simples sobre números enteros positivos. Aunque se ha observado empíricamente que todas las secuencias terminan en el bucle 4, 2, 1, 4, no se ha demostrado formalmente que este sea el único bucle posible. Este estudio utiliza el concepto de raíces digitales y la teoría de grafos dirigidos para demostrar que no pueden existir otros bucles en las secuencias de Collatz.

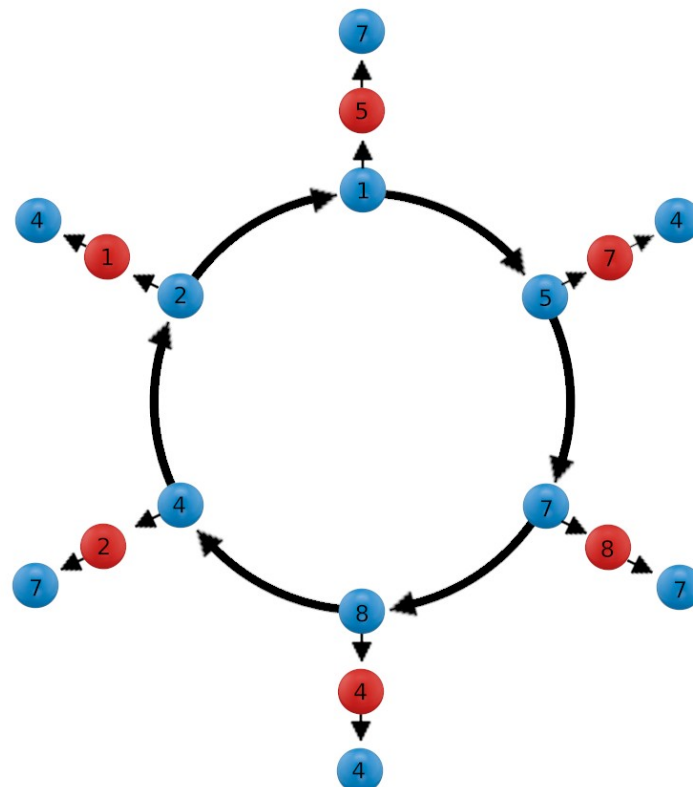
Metodología:

Se generaron secuencias de Collatz para una variedad de números iniciales y se calcularon las raíces digitales de cada número en la secuencia. Las raíces digitales se obtuvieron sumando repetidamente los dígitos de un número hasta obtener un solo dígito. Se clasificaron los números en pares e impares y se registraron las transiciones entre raíces digitales. Estas transiciones se representaron en un grafo dirigido, donde los nodos representan las raíces digitales y las aristas dirigidas (flechas) indican las transiciones entre ellas.

Resultados:

El grafo dirigido muestra las transiciones entre raíces digitales en las secuencias de Collatz. Se observa que las raíces digitales 3, 6 y 9 no aparecen en las secuencias después del primer número impar, ya que estos números son múltiplos de 3 y no persisten en la secuencia. Las transiciones entre raíces digitales revelan patrones consistentes que convergen hacia las raíces digitales 4 y 7. Los nodos de color azul representan las raíces digitales de los números pares y los de color rojo a los números impares.

Grafo dirigido:



Discusión:

El análisis del grafo dirigido muestra que todas las secuencias de Collatz eventualmente convergen hacia números con raíces digitales 4 y 7, que están asociadas con el bucle 4, 2, 1, 4. La exclusión de las raíces digitales 3, 6 y 9 limita las posibles transiciones y hace imposible la existencia de otros bucles. Además, las propiedades matemáticas de las operaciones involucradas en la conjetura de Collatz hacen que sea imposible concebir otro bucle que no esté relacionado con el bucle conocido.

Conclusión:

Basado en el análisis de las raíces digitales y los patrones observados en el grafo dirigido, se demuestra que el bucle 4, 2, 1, 4 es el único bucle posible en las secuencias de Collatz. Las propiedades matemáticas de las raíces digitales y las reglas de la conjetura de Collatz hacen imposible la existencia de otros bucles. Este estudio proporciona una base teórica sólida para afirmar que no pueden existir otros bucles en las secuencias de Collatz.