Estudio sobre las secuencias simplificadas de Collatz: Composición, proporción armónica y estructura inversa

Dosena

Abril 2025

Abstract

Este estudio analiza las secuencias simplificadas de Collatz, definidas por la función $n_{i+1} = \frac{3n_i+1}{2}$ (si $3n_i + 1$ es divisible por 2), desde la perspectiva de su composición en tramos de impares, la proporción armónica $\frac{3}{2}$, y una nueva función inversa $n_{i+1} = \frac{2n_i-1}{3}$. Se presenta un lema que determina la longitud de los tramos, se demuestra la relación entre los valores de k, y se explora la convergencia de secuencias mediante ejemplos. La estructura de los tramos, su encadenamiento, y su visualización gráfica destacan la armonía matemática subyacente, conectada con la proporción 3:2 de Nicómaco.

1 Introduccion

La conjetura de Collatz, uno de los problemas abiertos más fascinantes de la teoría de números, define una secuencia para un número inicial n_0, donde $n_{i+1} = \frac{n_i}{2}$ si n_i es par, y $n_{i+1} = 3n_i + 1$ si es impar, hasta converger a 1. Este estudio se centra en una variante simplificada, donde $n_{i+1} = \frac{3n_i+1}{2}$ (si $3n_i+1$ es divisible por 2), aplicada a números impares hasta obtener un par.

Se propone una estructura de tramos, donde cada tramo comienza con un impar (de la forma $4n + 3$ o $4n + 1$) y termina con un par, encadenándose mediante divisiones sucesivas por 2 hasta el próximo impar. La proporción armónica $\frac{3}{2}$, relacionada con la quinta perfecta de Nicómaco, conecta los valores de k de los impares dentro de cada tramo. Además, se introduce una función inversa $n_{i+1} = \frac{2n_i-1}{3}$, que retrocede desde el par final hasta el impar inicial, formando un ciclo armónico.

Este trabajo presenta demostraciones, ejemplos de convergencia, y visualizaciones gráficas, destacando la belleza y regularidad de estas secuencias simplificadas. Se incluyen ejemplos específicos, como las secuencias desde $n_0 = 127$ y $n_0 = 255$, para ilustrar la estructura y convergencia.

2 Metodología

2.1 Definición de tramos

Un tramo directo se define como:

- Comienza con un número impar de la forma $4n + 3$ o $4n + 1$.
- Termina con el primer número par encontrado.
- Cada número impar n tiene un valor asociado k, definido como:

$$n = 2k - 1 \implies k = \frac{n+1}{2}$$

- Dentro de un tramo, los valores de k de los impares consecutivos siguen la proporción armónica:

$$k_i = k_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^i$$

donde k_0 es el valor de k del primer impar, e i es la posición dentro del tramo ($i = 0$ para el primer impar).

Los tramos se encadenan dividiendo el par final por 2 tantas veces como sea posible hasta obtener un nuevo impar, que inicia el siguiente tramo.

2.2 Lema de longitud

Para un tramo iniciado por un número impar con $k = 2^n$:

$$a_0 = 2k - 1 = 2^{n+1} - 1$$

el tramo tiene una longitud de:

$$n + 2 \text{ términos}$$

Demostración:
Consideremos la secuencia generada por a_0:

$$a_i = 3^i \cdot 2^{n+1-i} - 1, \quad i = 0, \ldots, n+1$$

Verifiquemos:

$$a_{i+1} = \frac{3a_i + 1}{2}$$

$$a_i = 3^i \cdot 2^{n+1-i} - 1$$

$$3a_i + 1 = 3\left(3^i \cdot 2^{n+1-i} - 1\right) + 1 = 3^{i+1} \cdot 2^{n+1-i} - 2$$

$$\frac{3a_i + 1}{2} = 3^{i+1} \cdot 2^{n+1-(i+1)} - 1$$

Para $i = n + 1$:

$$a_{n+1} = 3^{n+1} \cdot 2^{n+1-(n+1)} - 1 = 3^{n+1} - 1 \quad \text{(par)}$$

$$a_{n+2} = \frac{3^{n+2}}{2} - 1 \text{ (no entero)}$$

Por lo tanto, el tramo tiene $n + 2$ términos: $n + 1$ impares y un par final.

2.3 Función inversa

La función inversa, que retrocede desde el par final hasta el impar inicial, se define como:

$$n_{i+1} = \frac{2n_i - 1}{3}, \quad \text{si } 2n_i - 1 \text{ es divisible por } 3$$

Demostración de inversa:
Partiendo de la función directa:

$$n_{i+1} = \frac{3n_i + 1}{2}$$

$$2n_{i+1} = 3n_i + 1 \implies 3n_i = 2n_{i+1} - 1 \implies n_i = \frac{2n_{i+1} - 1}{3}$$

Esta función inversa genera una secuencia que retrocede desde el par final hasta el primer impar del tramo.

2.4 Proporción armónica 3:2

La proporción $\frac{3}{2}$, conocida como la quinta perfecta en la teoría musical y estudiada por Nicómaco de Gerasa, conecta los valores de k dentro de un tramo. Para los impares consecutivos en un tramo, el valor de k se escala según:

$$k_{i+1} = k_i \cdot \frac{3}{2}$$

En la función inversa, los valores de k decrecen con el recíproco:

$$k_{\text{anterior}} = k_{\text{actual}} \cdot \frac{2}{3}$$

La composición de ambas proporciones refleja una simetría armónica:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

3 Resultados

3.1 Estructura de los tramos

Un tramo típico tiene:

- Varios impares de la forma $4n + 3$, generados consecutivamente por la función directa.
- Un único impar de la forma $4n + 1$, que precede al par final.
- Un par final, que marca el fin del tramo.

Ejemplo para $k = 16$:

$$n = 2 \cdot 16 - 1 = 31$$

Tramo:

$$31 \to 47 \to 71 \to 107 \to 161 \to 242$$

- Impares $4n+3$: $31, 47, 71, 107$. - Impar $4n+1$: 161. - Par: 242.

Número	Posición	Valor de k
31	0	16
47	1	$24 = 16 \cdot \frac{3}{2}$
71	2	$36 = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$
107	3	$54 = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$
161	4	$81 = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$
242	5	$-$

Ejemplo para $k = 32$:

$$n = 2 \cdot 32 - 1 = 63$$

Tramo:

$$63 \to 95 \to 143 \to 215 \to 323 \to 485 \to 728$$

- Impares $4n+3$: $63, 95, 143, 215, 323$. - Impar $4n+1$: 485. - Par: 728.

Número	Posición	Valor de k
63	0	32
95	1	$48 = 32 \cdot \frac{3}{2}$
143	2	$72 = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$
215	3	$108 = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$
323	4	$162 = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$
485	5	$243 = 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5$
728	6	$-$

3.2 Proporción 3:2 y armonía de Nicómaco

La proporción $\frac{3}{2}$, conocida como la quinta perfecta en la teoría musical y estudiada por Nicómaco de Gerasa, conecta los valores de k dentro de un tramo:

$$k_{i+1} = k_i \cdot \frac{3}{2}$$

La función inversa refleja esta proporción con su recíproco:

$$k_{\text{anterior}} = k_{\text{actual}} \cdot \frac{2}{3}$$

La composición de ambas proporciones forma un ciclo armónico:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

Este ciclo se observa al aplicar la función inversa al tramo con $k = 16$:

$$242 \to 161 \to 107 \to 71 \to 47 \to 31$$

Número	Posición inversa	Valor de k
242	0	–
161	1	81
107	2	$54 = 81 \cdot \frac{2}{3}$
71	3	$36 = 54 \cdot \frac{2}{3}$
47	4	$24 = 36 \cdot \frac{2}{3}$
31	5	$16 = 24 \cdot \frac{2}{3}$

3.2.1 Origen y significado de la proporción 3:2 de Nicómaco

Nicómaco de Gerasa, un matemático y filósofo neopitagórico del siglo I-II d.C., exploró las proporciones numéricas en su obra *Introducción a la Aritmética*. Entre ellas, destacó la proporción 3:2 como una relación fundamental en matemáticas y música. En términos matemáticos, 3:2 es una proporción que aparece en las series armónicas y en la divisibilidad, representando un equilibrio entre dos cantidades. En música, esta proporción define la *quinta perfecta*, la relación de frecuencias entre dos notas que producen un intervalo armónico agradable, como do (frecuencia base) y sol (frecuencia $\frac{3}{2}$ veces la de do). Por ejemplo, si la frecuencia de do es 261.63 Hz (do central), la de sol es aproximadamente 392.44 Hz, una proporción exacta de 3:2.

En el contexto de las secuencias simplificadas de Collatz, la proporción 3:2 emerge como la relación entre los valores de k de los impares consecutivos dentro de un tramo, reflejando una armonía matemática que conecta números y estética. Nicómaco veía estas proporciones como manifestaciones de la armonía universal, una idea que resuena con la estructura cíclica y simétrica de nuestras secuencias.

3.3 Encadenamiento de tramos

Las secuencias simplificadas se forman encadenando tramos. Desde $n_0 = 127$:

Tramo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n = 0$	127	1093	205	77	29	11	13	5	1
$n = 1$	191	1640	308	116	44	17	20	8	2
$n = 2$	287					26			
$n = 3$	431								
$n = 4$	647								
$n = 5$	971								
$n = 6$	1457								
$n = 7$	2186								
k	64	547	103	39	15	6	7	3	1

Desde $n_0 = 255$:

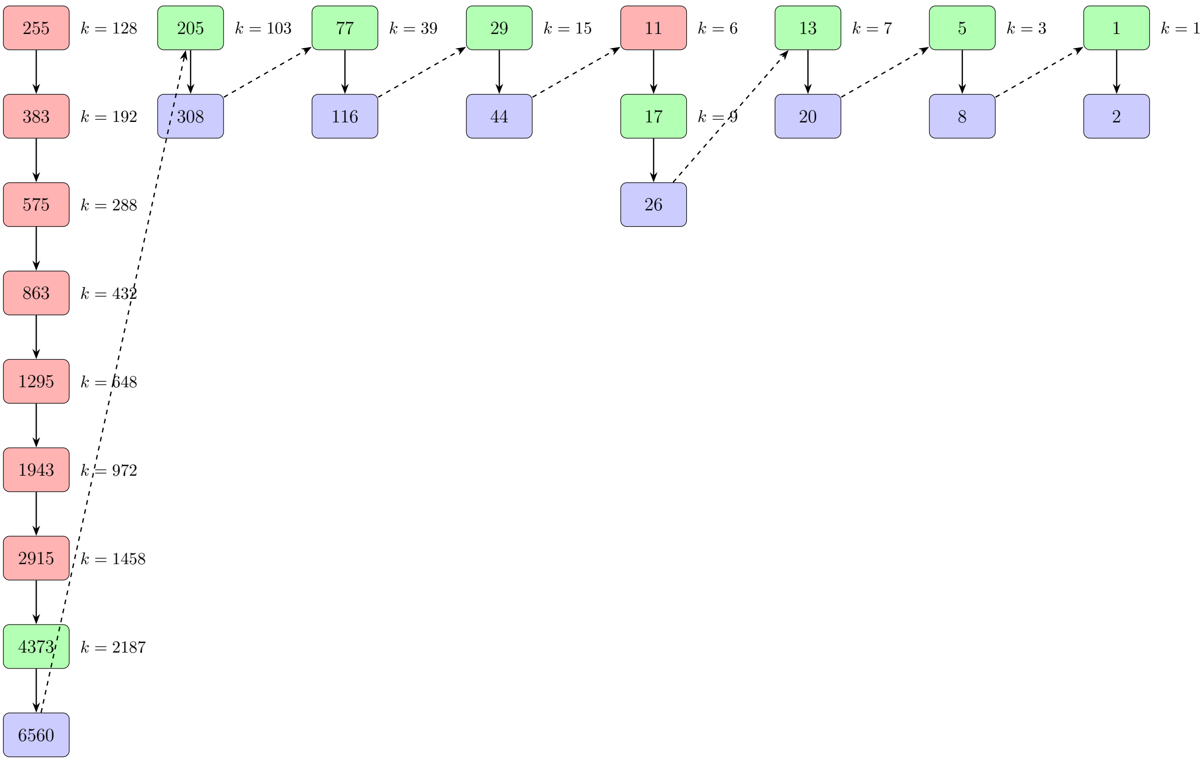
Tramo	1	2	3	4	5	6	7	8
$n=0$	255	205	77	29	11	13	5	1
$n=1$	383	308	116	44	17	20	8	2
$n=2$	575				26			
$n=3$	863							
$n=4$	1295							
$n=5$	1943							
$n=6$	2915							
$n=7$	4373							
$n=8$	6560							
k	128	103	39	15	6	7	3	1

3.4 Convergencia

Ambas secuencias convergen a 1, mostrando patrones de encadenamiento. La secuencia desde 127 tiene 9 tramos, y desde 255 tiene 8 tramos, cada uno siguiendo la proporción $\frac{3}{2}$. La función inversa permite retroceder dentro de cada tramo, confirmando la simetría armónica.

3.5 Visualización

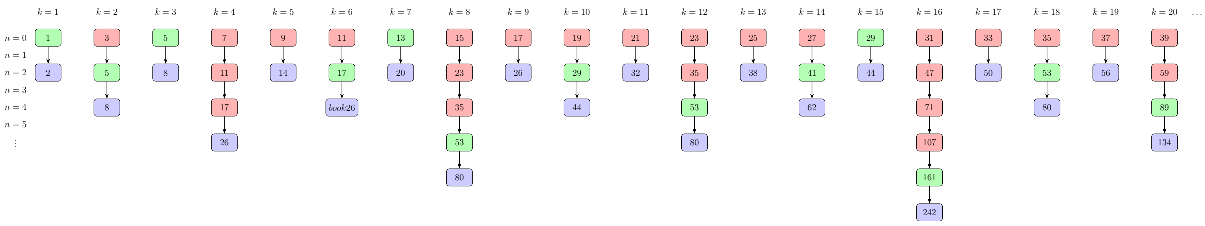
El gráfico de la secuencia desde 255, con impares $4n+3$ en rojo, $4n+1$ en verde, y pares en azul, visualiza esta estructura:



El gráfico muestra los tramos encadenados, con flechas que indican la transición entre términos dentro de un tramo (líneas continuas) y entre tramos (líneas punteadas). Los valores de k resaltan la proporción $\frac{3}{2}$.

3.6 Gráfico de tramos posibles

El gráfico representa los tramos posibles hasta $k = 20$, con impares $4n+3$ en rojo, $4n+1$ en verde, y pares en azul. Las etiquetas n indican las posiciones dentro de cada tramo, y los puntos suspensivos (...) sugieren la posibilidad de extender el gráfico infinitamente:



4 Discusión

La estructura de tramos revela una regularidad en las secuencias simplificadas de Collatz, donde los impares $4n+3$ y $4n+1$ alternan hasta un par final. La proporción $\frac{3}{2}$ conecta los k, reflejando la armonía de Nicómaco, y la función inversa completa el ciclo. El gráfico de tramos posibles ofrece una representación visual elegante, destacando cómo la longitud de los tramos varía según k, y las visualizaciones gráficas de las secuencias muestran el encadenamiento en acción.

La convergencia de las secuencias a 1 sugiere un comportamiento cíclico, donde los tramos encadenados forman una secuencia completa. La variabilidad en la longitud de los tramos, determinada por las iteraciones posibles de la función directa, abre preguntas sobre patrones más amplios en Collatz.

5 Conclusión

Este estudio demuestra que las secuencias simplificadas de Collatz pueden descomponerse en tramos estructurados, con una proporción armónica $\frac{3}{2}$ que define su dinámica interna. La función inversa y las visualizaciones gráficas enriquecen esta comprensión, abriendo nuevas preguntas sobre la convergencia y los patrones de Collatz. La armonía matemática subyacente sugiere una conexión profunda entre números y música.

Futuras direcciones:

- Explorar secuencias más largas para identificar patrones en la longitud de los tramos.
- Desarrollar visualizaciones interactivas para analizar tramos dinámicamente.
- Investigar conexiones entre la proporción 3:2 y otras proporciones armónicas en contextos matemáticos.